数理解析研究所講究録
297巻 1977年 54-68

Genus 2 の Heegaard 分解をもつ S^3 について

東工大 理学部 本間龍雄

Poincaré 予想がもしも肯定的に解決したとしても、群が trivial かどうかを判定する方法が決定されていないから、与えられた 3-manifold が 3-Sphere かどうか判定する方法が見つかるとは限らない。この paper では genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold は 3-sphere かどうかを判定する単純な algorithm が存在することを証明する。

<u>Def</u> M, L が genus 2 の solid torus で, $N = M \cap L = \partial M = \partial L$ であるとき, $\{M, L, N\}$ を 3-manifold $M \cup L$ の <u>genus 2 の Heegaard 分解</u> という。

今後 M, L, N は上述の定義の genus 2 の二つの solid torus と torus をそれぞれ意味するものとする。

<u>Def.</u> $M(L)$ の proper な disc の boundary

を meridian (longitude) と呼ぶ。 $\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$ ($\lambda = \{l_1, l_2, l_3\}$) が互いに交わらない meridian (longitude) で，どの二つも $H_1(N)$ で一次独立なとき，meridian－系 (longitude－系) と呼ぶ。また $\{\mu, \lambda\}$ を m.l.－系 と呼ぶ。

Def. meridian と longitude が transversal に交わり，両者の二つの弧によって N の disc が bound されないとき，m.l.－系 は normal であるという。

meridian 又は longitude を N 上の isotopy で動かして，任意の m.l.系 は normal にできるから，今後 normal な m.l. 系 のみを扱う。

$\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$, $\lambda = \{l_1, l_2, l_3\}$ が normal な m.l.－系 であるとき，$M \cup L$ が homology-sphere なら

$$N - (m_1 \cup m_2 \cup m_3 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3)$$

の各連結成分の boundary は，4つの弧，又は6つの弧，又は8つの弧からできていて，meridian と longitude の弧が交互に並んでいる。それぞれの場合各連結成分の閉包を四辺形，六辺形，八辺形といい，これ等を m.l.－系 $\{\mu, \lambda\}$ の多辺形と呼ぶ。homology sphere かどうかの判定は容易なので，ここで扱う 3-manifold は homology sphere に限ることにする。

Def. m.l.-系の多辺形で一つのmeridianあるいは一つのlongitudeに属する二辺をもつものが存在するとき，**reducible**であるという。前者の場合を**m-reducible**，後者の場合を**l-reducible**という。reducibleでないとき**irreducible**という。

reducibleなときに実際にreductionが存在することを示すためにm.l.-系の性質を調べる。つぎのことは良く知られている。

Prop. 1（m.l.-系の対称性）$\{\mu, \lambda\}$ が任意の m.l.-系であるとき，N の involution T $(T^2 = I)$ が存在し

$$T(m_i) = m_i \quad , \quad T(l_i) = l_i \qquad i=1,2,3.$$

を満たす。

もちろん $N-(m_1 \cup m_2 \cup m_3)$ は二つの連結成分をもつがその一つの閉包 N^+ 内の longitude の様子により，m.l.-系の性質もある程度判明する。例えばつぎの命題が成立する。

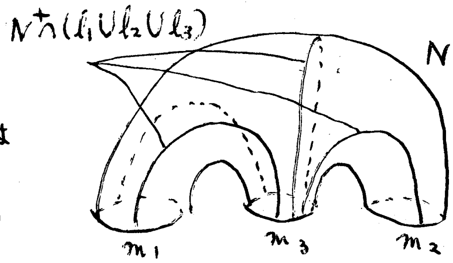


図1

Prop. 2 多辺形で m_3 に属する二つの弧をもつ（従って m.l.-系は m-reducible）ものが存在するための必要充分条件は，$N^+ \cap (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ に含まれる弧で，m_1 と m_3，m_2 と m_3 ~~に属する~~ を結ぶ弧が存在し，m_1 と m_2 を結ぶ弧が存在しないことである。

<u>Proof</u>　m_1とm_2を結ぶlongitudeの弧が存在すればm_3の二つの弧を二辺とする多辺形は存在し得ない。またhomology sphereであるからm_1とm_3, m_2とm_3を結ぶlongitudeの弧が存在する。

<u>Remark</u>　Prop. 2でm_3から出てm_3に入るlongitudeの弧がある場合とない場合（後に述べる0-型）とがある。図1はそのような弧が存在する場合である。

MUL は homology sphere であることと Prop. 2 よりつぎの命題が直ちに導びかれる。

<u>Prop. 3</u>　Prop. 2の条件のもとで，$(l_1 \cup l_2 \cup l_3)-(m_1 \cup m_2)$の弧$a$で$m_1$と$m_2$を結ぶものが存在し，$a$は$m_3$と交わる。（図2）

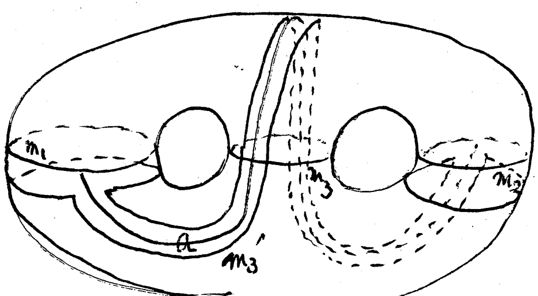


図2

<u>Reductionの方法</u>

$\{\mu, \lambda\}$がreducibleとする。

たとえばProp. 2の条件を満足したとする。図2のようにaを中心線とするbandでm_1とm_2をつなぐと新しいmeridian系$\mu' = \{m_1, m_2, m_3'\}$を得る。（後に述べるsimple transformation）　つぎの命題によりこの変換$\{\mu, \lambda\} \longrightarrow \{\mu', \lambda\}$はreductionとなっている。

<u>Prop. 4</u>　meridian系とlongitude系の交点数は

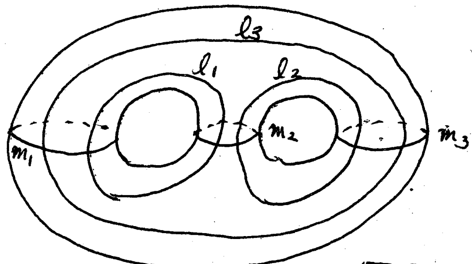
$\{\mu',\lambda\}$ が $\{\mu,\lambda\}$ より少なくなっている。

<u>Proof</u>　m_1 と m_2, λ はそのままだから, m_3' と λ の交点数が, m_3 より少なくなっていることを示せば良い。図1を見れば判るように m_3 と λ の交点数は

m_1 の交点数 + m_2 の交点数 + m_3 を結ぶ弧の数

であるが, 図2で判るように m_3' と λ の交点数は m_3 と a の交点数だけ少なくなる (normal になおすので実際はもっと少なくなる。)

<u>Def.</u>　任意の meridian と任意の longitude が丁度一点で交わるとき, その m.l.-系は標準形と呼ばれる。



標準形　図3

m.l.-系が標準形ならば, もちろん 3-manifold $M \cup L$ は 3-sphere となるが, 次の定理がこの paper の主定理である。

<u>Theorem</u>　S^3 の genus 2 の Heegaard 分解の irreducible な m.l.-系は標準形である。

<u>S^3 判定の algorithm</u>　genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold $M \cup L$ が与えられれば homology sphere かどうかは直ちに判定できる。homology sphere ならばその m.l.系が reducible か irreducible かを判定し

(判定の方法は簡単である) reducible ならば irreducible になるまですでに述べた手段で reduction を繰り返し，最後に得た irreducible な m.l.-系 が標準形ならば S^3，標準形でなければ S^3でない。

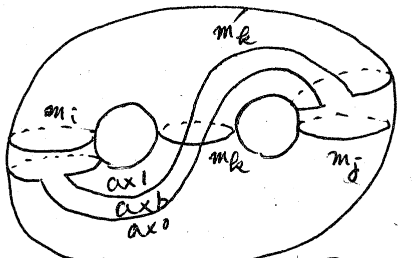


図4

<u>Def.</u> meridian系 (longitude系) の <u>simple transformation $\mu \xrightarrow{s} \mu'$</u> ($\lambda \xrightarrow{s} \lambda'$) とは，$\mu=\{m_i, m_j, m_k\}$ の二つの meridian m_i, m_j はそのままにして，残りの一つの meridian m_k の代りに m_i と m_j を <u>band $a\times b$</u> ($a=b=[0,1]$) でつないで新しい meridian系 $\mu'=\{m_i, m_j, m_k'\}$ を作ることである。(図4)

<u>Remark</u> band $a\times b$ が m_k と交わらなければ，m_k' は N上の isotopy で m_k に移れるから μ と μ' は同じ meridian 系と考えられる。故に band $a\times b$ は常に m_k と交わるものとする。

つぎの Prop. は明らかである。

<u>Prop. 5</u> (Simple transformation の み糸糸性)

simple transformation $\mu \to \mu'$ と $\mu \to \mu''$ において，$\mu=\{m_i, m_j, m_k\}$, $\mu'=\{m_i, m_j, m_k'\}$, $\mu''=\{m_i, m_j, m_k''\}$

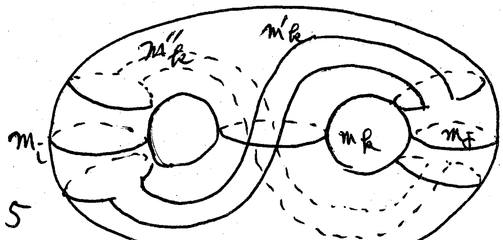
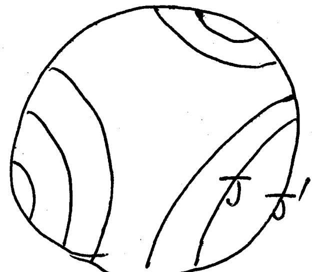


図5

で，両者の band が交わらず m_i と m_j を反対側からつないで，μ'_k と μ''_k が作られるならば，μ'_k と μ''_k は N 上の isotopy で互いに移れるから，μ' と μ'' は同じ meridian 系と考えて良い。

Def. $\mu=\mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \mu_2 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \mu_m = \mu'$ が simple transformation の列で，(1) μ_i の新しい meridian と古い meridian の一つを band をつないで μ_{i+1} の新しい meridian が作られ，(2) $\mu_i \xrightarrow{s} \mu_{i+1}$ の band は $\mu_{i-1} \xrightarrow{s} \mu_i$ の band の中を通っているとき，この列を elementary transformation と呼び，$\mu \xrightarrow{e} \mu'$ と書く。

m, $\{m_1, m_2, m_3\}$ は meridian と meridian 系で normal に交わるものとする。D, $\{D_1, D_2, D_3\}$ をそれぞれに対応する meridian disc とする。$D\cap(D_1\cup D_2\cup D_3)$ は $D_1\cup D_2\cup D_3$ の boundary の二点を結ぶ曲線の集合からできているとして良いが，その中で outermost なものを一つ選び J とし，それに対応する boundary arc (meridian の弧) を J' とする。m を二点 $\partial J = \partial J'$ で切断してできる弧を $\bar{m}'$, $\bar{m}''$ とし，$\{m, \bar{m}'\cup J', \bar{m}''\cup J'\}$



D_i 図5

$\partial D_i = m_i$

を normal になおして meridian 系 $\{m, m', m''\}$ を得る。これは m' と m'' を band をつないで m を作る操作の逆をしたことになる。

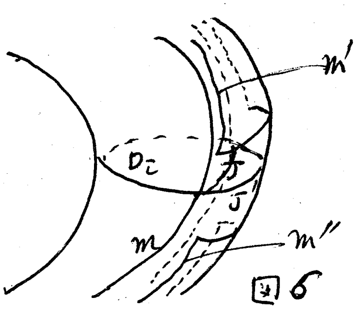


図6

<u>Prop. 6</u> (meridian 系作成の一意性) 上に述べた $\{m, m', m''\}$ は J の選び方に無関係に一意的に定まる。(mod. isotopy)

<u>Proof</u> J の選び方によって、二つの meridian 系 $\mu_1 = \{m, m_1', m_1''\}$, $\mu_2 = \{m, m_2', m_2''\}$ が作られたとする。m_1' は μ_2 と交わらず, m_2'' は μ_1 と交わらないとして差支えない。meridian 系 μ_i $(i=1, 2)$ と交わらない meridian は μ_i の三つの meridian のどれか一つと isotopic である。故に μ_1 と μ_2 は isotopic である。

二つの meridian 系 $\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$ と $\bar{\mu} = \{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$ があたえられたとき, 上に述べた meridian 系の作り方と同じ方法で新しい meridian 系 $\mu' = \{m_1', m_2', m_3'\}$ を作り, $\mu' \xrightarrow{s} \mu$ は simple transformation となり, μ' と $\bar{\mu}$ の交点数を μ と $\bar{\mu}$ の交点数より下げることができる。Prop. 6 よりつぎの命題を得る。

Prop. 7 (simple transformation 作成の一意性) 上に述べた $\mu' \xrightarrow{s} \mu$ の作り方において，μ' は μ と $\bar{\mu}$ によってのみ一意的に定まる。(mod. isotopy)

Prop. 7 を繰り返して用いることによりつぎの Lemma を得る。

Lemma 1 二つの meridian 系 $\mu, \bar{\mu}$ が与えられれば，elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ が存在し，一意的に定まる。

つぎの Lemma は良く知られている。

Lemma 2 (Waldhausen の定理) S^3 の genus 2 の Heegaard 分解は標準形の m.l. 系をもつ。

Lemma 1 と Lemma 2 よりつぎの Lemma を得る。

Lemma 3 S^3 の任意の genus 2 の Heegaard 分解の m.l. 系を $\{\mu, \lambda\}$ とする。標準形 $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\}$ からの elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ が存在し，一意的に定まる。

elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ とは meridian 系の elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ と longitude 系の elementary transformation $\bar{\lambda} \xrightarrow{e} \lambda$ を組み合わせたもので，

$$\bar{\mu} = \mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \lambda_{\ell-1} \xrightarrow{s} \lambda_\ell = \lambda$$

と表わされているものとする。

定理の証明では $\{\mu, \lambda_i\}$ の reducibility を i に関する induction で確かめる。もしも $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band が μ の meridian を横切れば、$j \geqq i$ なるすべての j に対し、$\lambda_{j-1} \xrightarrow{s} \lambda_j$ の band が μ を横切って、$\{\mu, \lambda_j\}$ はすべて l-reducible で、もちろん $\{\mu, \lambda\}$ も l-reducible となるから、(i) <u>$\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band は μ を横切らない</u>と仮定して良い。

もしも $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band が $\bar{\lambda} = \lambda_0$ を横切らなければ、μ は標準形となり (i) より λ も標準形となって定理は自明となるので、(ii) <u>$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band は $\bar{\lambda} = \lambda_0$ を横切る</u>ものとする。

<u>Def.</u> m.l.-系が八辺形をもつとき、<u>0-型</u>という。

八辺形ならば四辺は meridian の弧であり、他の四辺は longitude の弧であるから、二辺は一つの meridian に属し、二辺は一つの longitude に属するからつぎの命題が成立つ。

<u>Prop. 8</u> 0-型の m.l.-系は m-reducible であり、l-reducible である。

<u>Def.</u> $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band $a \times b$ の subband

$[t_1, t_2] \times b$ $(0 < t_1 < t_2 < 1)$ がλ_iの二つのlongitudeを結んでいてそれ以外ではλ_iのlongitudeと交わらないとき，$[t_1, t_2] \times b$を<u>bridge</u>と呼ぶ。

<u>Def.</u> $\{\mu, \lambda_i\}$をbridgeを用いてつぎのように分類する。

<u>1-型</u>：1対のlongitudeにbridgeが存在し，他の二対にbridgeが存在しない。

<u>2-型</u>：2対のlongitudeにbridgeが存在し，他の一対にbridgeが存在しない。

<u>3-型</u>：三対のlongitudeともbridgeが存在する。

<u>Prop. 8</u> $\{\mu, \lambda_i\}$が1-型，2-型または3-型ならば，m-reducibleである。

<u>Proof</u> bridge $[t_1, t_2] \times b$は四辺形で，二辺$[t_1, t_2] \times \dot{b}$は$\mu$の一つのmeridianに属するから，いずれの場合もm-reducibleである。

定理の証明には，(i), (ii)の仮定のもとですべての$\{\mu, \lambda_i\}$が$\{\mu, \lambda_i\}$が0, 1, 2, 3-型のいずれかであることを確める。つぎの命題が定理の証明に非常に役に立つ。

<u>Lemma 4</u> simle transformation $\lambda_{i-1} \xrightarrow{S} \lambda_i$で結ばれる$\lambda_{i-1}$の二つのlongitudeをつなぐbrideが存在すれば，$\lambda_i \xrightarrow{S} \lambda_{i+1}$で結ばれる二つのlongitudeをつなぐbridgeが存在する。

<u>Proof</u>　$\lambda_{i-1}=\{l_1, l_2, l_3\}$，$\lambda_i=\{l_1, l_2, l_3'\}$ で，l_1 と l_2 を結ぶ bridge が存在したとする。l_3' は l_1 と l_2 を band で結んでできる longitude であるから，λ_i において l_1 と l_3' を結ぶ bridge と，l_2 と l_3' を結ぶ bridge が共に存在する。simple transformation $\lambda_i \xrightarrow{s} \lambda_{i+1}$ は l_1 と l_3' を band で結ぶか，l_2 と l_3' を band で結ぶかのどちらかであるから，Lemma 4 が成立する。

Lemma 4 の前提の条件を $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ が満足すればそれ以後の $\lambda_j \xrightarrow{s} \lambda_{j+1}$ $(i \leqq j)$ はすべてその条件を満足することを Lemma 4 は明らかにしている。故に結論として $\{\mu, \lambda\}$ にも bridge が存在し，従って m-reducible である。

<u>定理の証明</u>　elementary transformation

$$\{\mu, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_1\} \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_{e-1}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda\}$$

の各 step の m.l. 系 $\{\mu, \lambda_i\}$ が 0, 1, 2, 3－型 のどれかであることを確める。仮定(iii)より $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band は $\bar{\lambda}=\lambda_0$ を横切るが，bridge が存在しなければ isotopy で band と $\bar{\lambda}$ の交わりはなくせるから，bridge は必らず存在するとして良い。故に induction の出発点の $\{\mu, \bar{\lambda}\}$ は 1, 2, 3 型 のいずれかである。

a) <u>$\{\mu, \bar{\lambda}\}$ が 3－型の場合</u>，この場合は $\bar{\lambda}=\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$

Lemma 4 の前提の条件が満足されるので，inductive にすべての段階でこの条件が満され，結局 $\{\mu, \lambda\}$ は m-reducible となる。

b) $\{\mu, \lambda\}$ が 1-型の場合，この場合は，$\lambda = \lambda_0 = \{l_1, l_2, l_3\}$ で l_1 と l_2 を結ぶ bridge が存在したとする。もしも simple trasformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ において，l_1 と l_2 が band で結ばれるなら Lemma 4 より，a) の場合と同じ理由で $\{\mu, \lambda\}$ は m-reducible となる。故に l_1 と l_3 または l_2 と l_3 を band で結ぶ場合のみを考えれば良い。いま l_1 と l_3 が band で結ばれ新しい λ_1 の longitude l_3' ができたとする。仮定(i)よりその band は μ を横切らないことと，l_1 と l_2 にかかる bridge が存在することより，l_2 と l_3' を結ぶ bridge の数は l_2 と l_3 を結ぶ bridge の数より少なくなる。引き続き longitude-系の simple transformation を進めると，$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude 系の交わりが減っていく。$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude が交わらなくなった後は，$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と，$\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band の交わりの中に八の字形が現われるから，$\{\mu, \lambda_i\}$ は 0-型となる。$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude が交わって

いる向はもちろん$\{\mu, \lambda_i\}$は m-reducible であるから，いずれにしても reducible である。

c) <u>$\{\mu, \lambda\}$が2-型の場合</u>　この場合は$\lambda = \lambda_0 = \{l_1, l_2, l_3\}$において$l_1$と$l_2$を結ぶ bridge と$l_1$と$l_3$を結ぶ bridge が存在したとする。Lemma 4 より simple transformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ はl_2とl_3を band で結ぶ場合を考えれば良い。このとき二つの場合が考えられる。まず$\{\mu, \lambda_1\}$が3-型になる場合であるが，この場合は a) に帰着する。つぎは$\{\mu, \lambda_1\}$が2-型または1-型となる場合で，このときは$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$の band と$\lambda_1$の交わりは減っている。さらに引続く simple transformation で交わりは単調に減っていくから，b) の場合に帰する。　<u>証明終り</u>

[1] によるとソ連の A. Volodin, V. E. Kuznetsov, A. T. Fomenko は同じような Algorithm を genus が一般の場合の Heegaard 分解に対して考えている。10^6個の例について試したところ正しかったそうであるが，まだ証明はできていないらしい。

参照文献

[1]　A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko,

The Problem of Discriminating Algorithmically the Standard Three-dimensional Sphere, Russian Math. Surveys, 29:5 (1974), P.71—74.

〔2〕 Birman J. S. and Hilden H. M., The homeomorphism for S^3. Bulletin of the A.M.S. vol. 79 No.5 (1973), P.1006～1010。

〔3〕 高橋元男，種数2のHeegaard分解についてのBirman-Hildenの定理の別証，数理解析研究所講究録，243，(1975).

〔4〕 F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegung der 3-Sphäre, Topology, 7 (1968) P.195～203

〔5〕 本間龍雄，S^3判定のAlgorithmについて，(多様体の低余次元位置問題について)，数理解析研講究録，243，(1975)。