数理解析研究所講究録
298巻 1977年 124-136

2次元Poiseuille乱流の統計的平衡状態について

名大 工学部 桑原真二

§1. Gibbsの統計力学と統計流体力学との対応

Gibbsの統計力学はHamiltonの力学系に対する確率保存の方程式，すなわちLiouville方程式にもとずいている：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp_\ell}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell}, \quad \frac{dq_\ell}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}, \\ &\frac{\partial P}{\partial t} + [H, P] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$[f, g] \equiv \sum_\ell \left(\frac{\partial f}{\partial p_\ell}\frac{\partial g}{\partial q_\ell} - \frac{\partial f}{\partial q_\ell}\frac{\partial g}{\partial p_\ell}\right),$$

ここで$P = P(p, q, t)$は運動量p_ℓ，座標q_ℓのはる相空間における確率分布密度，HはHamiltonianである。
Liouville方程式の定常解 $\partial P/\partial t = 0$ すなわち

$$[H, P] = 0 \tag{1.2}$$

は $\quad P = P(E) \qquad H(p, q) = E \qquad (1.3)$

となり，相空間の各点に対応する系の全エネルギーだけの関数となる。 Gibbs は カノニカル分布：

$$P = Ce^{-\beta E}, \qquad C, \beta = consts. \tag{1.4}$$

をしらべ，熱平衡に対応することを示した。

統計流体力学は，Navier-Stokes 力学系に対する一般化 Liouville 方程式にもとずいている。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{Q}(\mathbf{v}), \\ &\frac{\partial P}{\partial t} + \int \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{Q}P)\, d^3\mathbf{x} . \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

ここで $P = P[\mathbf{v}(\mathbf{x}), t]$ は相空間（関数空間）$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ における確率分布密度，$\delta/\delta\mathbf{v}$ は汎関数微分である。 $\mathbf{Q}$ は Navier-Stokes 方程式により

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v} + \nu\nabla^2\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p \tag{1.6}$$

であるが，Green 関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \qquad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V \\ &G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \qquad \mathbf{x} \in V + \delta V, \quad \mathbf{x}' \in \delta V \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

（V は 流体のしめる体積，∂V はその境界）をもちいれば，

圧力項は速度だけによって表わされる：

$$\mathrm{grad}\ p/\rho = -\int_V G\ \mathrm{grad}'[\mathrm{div}'\{(\mathbf{v}'\cdot\mathrm{grad}')\mathbf{v}'\}]\ d^3\mathbf{x}'$$

$$-\int_{\partial V}\left[\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}'\cdot\mathrm{grad}')\mathbf{v}' - \nu\nabla'^2\mathbf{v}'\right]\frac{\partial G}{\partial n'}\ dS' \qquad (1.8)$$

次に統計流体力学における統計的平衡を考えよう。
一般的概念からいって，統計的平衡は

$$\partial P/\partial t = 0 \quad \text{したがって} \quad \int \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{Q}P)\,d^3\mathbf{x} \qquad (1.9)$$

と考えてよいであろう。一様な乱流では一般に粘性散逸があり，エネルギー供給がないから，特殊なばあい —— 速度場のフーリエ変換における高波数領域等 —— をのぞいて，統計的平衡は実現しない。そこで、統計流体力学の立場からは、Poiseuille乱流やCouette乱流のように，エネルギー供給があり，ある一定の統計的平衡の実現が予想される流れがもっと基本的である。

§2. 統計流体力学の定式化

古典統計力学において，ミクロカノニカル分布から近似的にカノニカル分布を出したり，カノニカル分布から熱平衡

の法則を導出する等と同様な手法を統計流体力学において実行することは，今日のところ不可能である。統計流体力学においては，各点の速度が確率変数であり，それ故 相空間は連続無限次元の関数空間である。更に，各点における，したがって各力学変数に対する力学が同等でなく，いわば"同一粒子"の力学系でなく，"無限異種粒子"の力学系であり，したがって確率分布も複雑になる。

統計平衡における統計分布を理論的に求めることは非常にむずかしいから，数値実験によって求めることを考えよう。Pをもちいる上の定式化は，アンサンブル平均を考えているわけであるが，アンサンブル平均 = 時間平均 というエルゴードの仮説をおいてもよいであろう。

次に力学変数（各点の流速）をもっと簡単な変数で表わすことを考える。

一般に L^2（2乗可積分の関数の全体）では、完備正規直交関数系 $\{\varphi_\ell(x)\}$ をつくることができて，任意の L^2 に属する関数は $\{\varphi_\ell\}$ によって展開できる。

$$f \in L^2(R) \Longrightarrow f = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \varphi_\ell(x) \qquad (2.1)$$

一方，2乗和が収束する数列を係数とする上の関数系による展開は L^2 に属する（Riesz-Fisher の定理）：

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |c_\ell|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \varphi_\ell \in L^2(R) \qquad (2.2)$$

以上のことは，RがR^3になっても，$\{\varphi_\ell\}$がベクトルになっても成立する。

必要があれば，適当な性質のよい関数$u(x)$を考えている関数$v(x, t)$より引いたものを考えてもよい。無限遠で一様流になるような流れは，L^2に属さないが，無限遠で一様流になるような適当な関数を引いてやればL^2に属するようにすることができる。そこで一般に速度場は，既知の関数と正規直交関数展開の和として表わすことができる：

$$v(x, t) = u(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell(t) v_\ell(x) \qquad (2.3)$$

更に

$$\mathrm{div}\, u = 0 \qquad \mathrm{div}\, v_\ell = 0 \qquad (2.4)$$

そして，u, $\{v_\ell\}$が境界条件（周期条件）を満足していると仮定する。上の展開をNavier-Stokes方程式に代入すれば

$$a_\ell = \sum L_\ell^{m} a_m + \sum N_\ell^{mn} a_n a_m \qquad (2.5)$$

となる。L_ℓ^mはuと各モードとの相互作用及び粘性項に

対応し、M_l^{mn} は モード間の非線形相互作用に対応する。

§3. 数値実験

統計流体力学では、確率分布を知って平均量やそれらの間の関係を導くのが目的であるが，確率分布自体を出すことが非常にむずかしい。前節でのべたようにエルゴードの仮説をもちいて，時間平均から統計分布を数値的に出すことをこころみる。

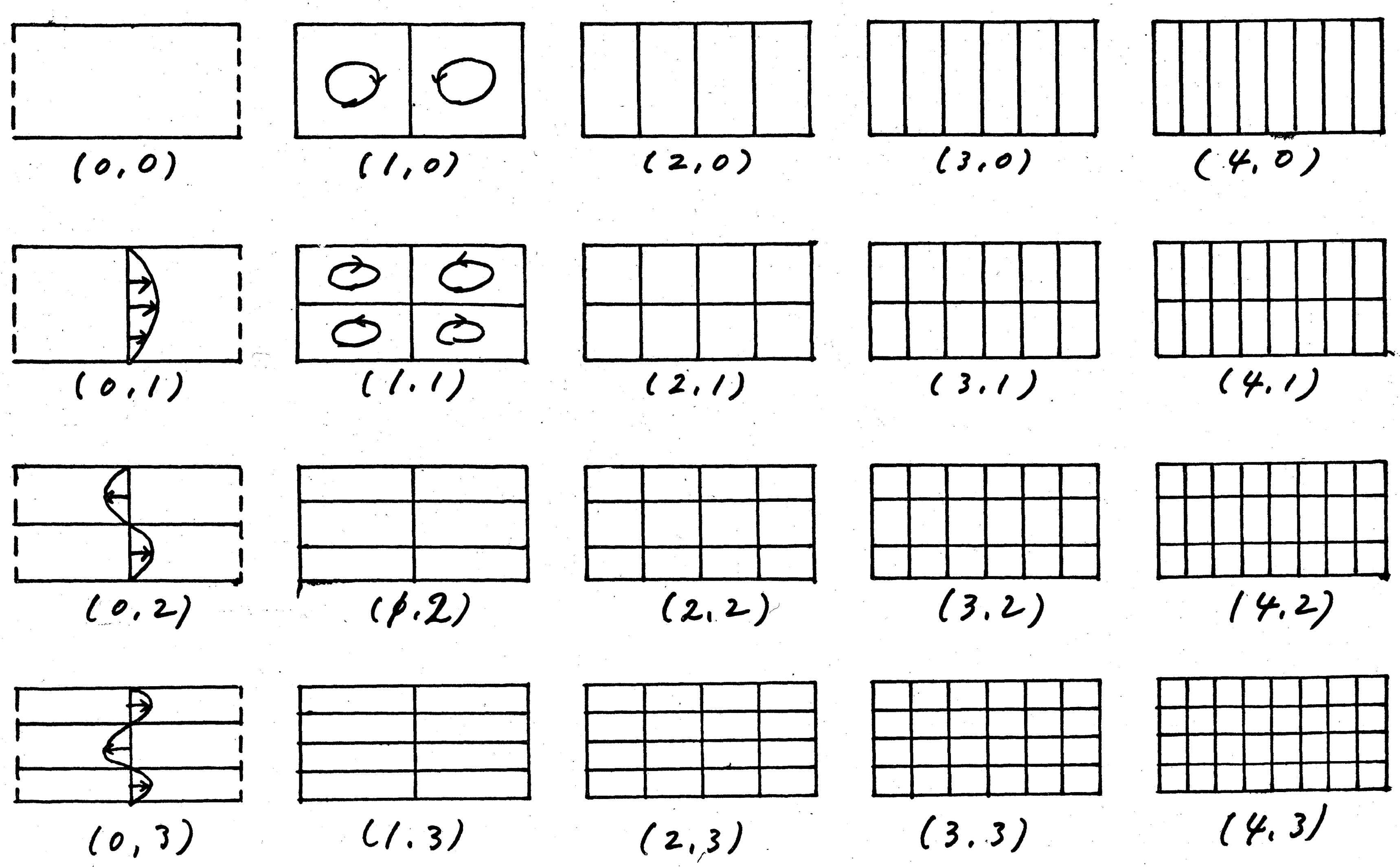
2次元Poiseuille乱流を考え，$u(X)$ として一定圧力勾配での層流Poiseuille流速をとる。更に数学的簡単化のために，流れの方向に周期2（巾を1）の周期性を仮定する。2次元攪乱を考え、オ1図の19モードでcut offする。モード（l, m）の中 $m \neq 0$ は複素数値で2つの独立変数をふくみ，独立変数は計35である。オ2図にReynolds数（一定圧力勾配での層流Poiseuille流の最大速度，壁の巾にもとずく）$R = 30{,}000$ のときの振巾 $\mathcal{R}e\, a_{lm}$, $\mathcal{I}m\, a_{lm}$ の一部及びモードのエネルギ $a^*_{lm}\, a_{lm}$ の時間的発展が示されている。この図によって統計的平衡がほゞ保たれていることがわかる。オ3 (a)～(d) 図には，オ2図と同じ時間々隔 約1560～1610 での 250時刻での振巾の頻度分布（確率分布）が示されている。

以上の結果からはっきりした結論はえられない。統計

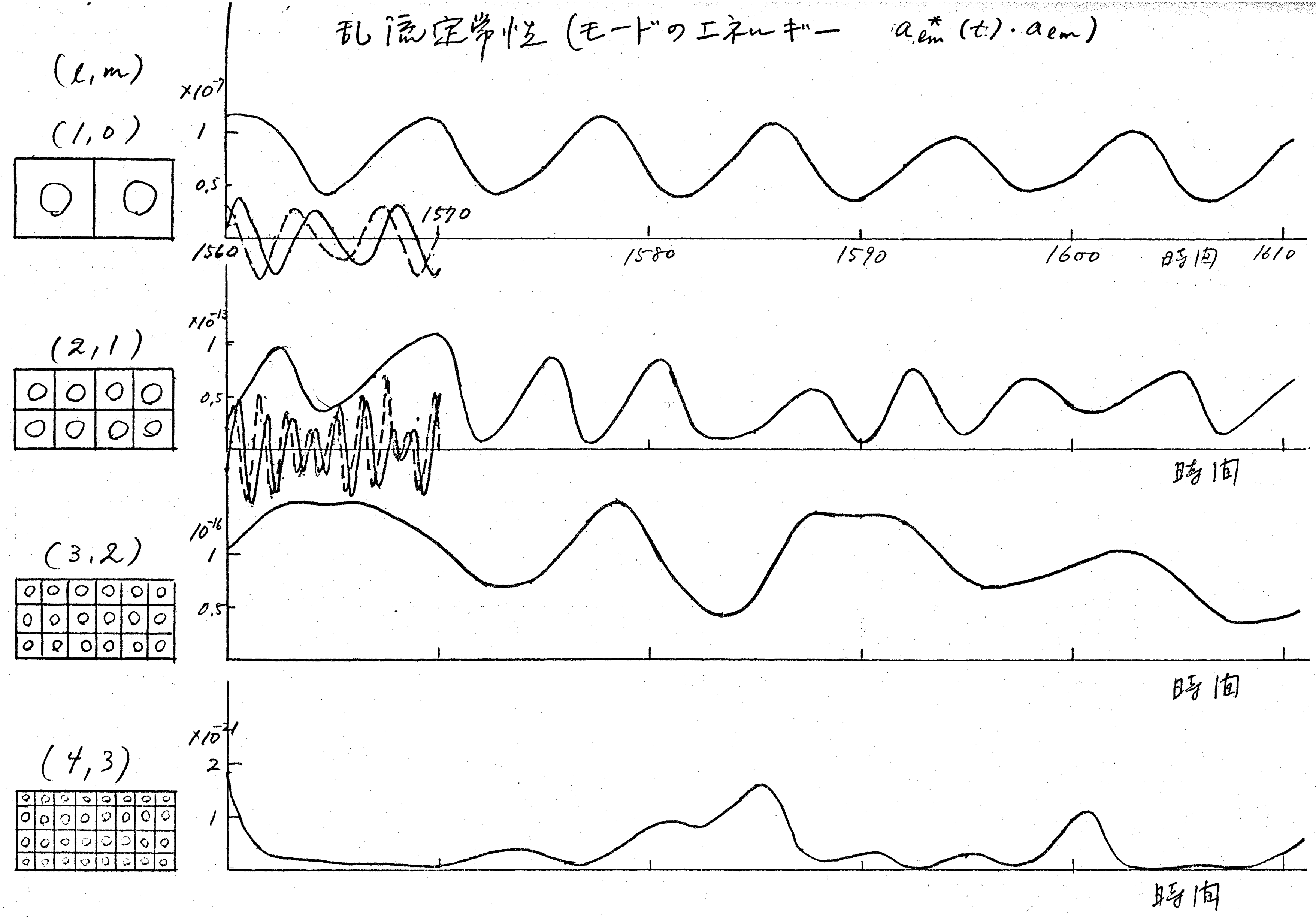
的独立性のつよいモードは正規分布になるはずであり、モードのエネルギーを一定にするような分布では、2つの山の分布と予想される（複素 $a_{\ell m}$ の運動は $|a_{\ell m}|$ = 一定 での、複素面での回転となる）。 そのような考えのもとで 頻度分布をながめると、上の2つの分布の傾向を適当な割合でもった分布のように思われる。

参考文献：

1）桑原真二，桑原邦郎，第8回乱流シンポジウム報告集（東大，宇宙研 1976） 98－106
2）桑原真二，数理解析研究所講究録 275 （統計流体力学の研究，1976/7） 99－120
3）桑原真二，統計流体力学 ― 流体力学の展望 1（流体力学懇談会，1976） 49－83

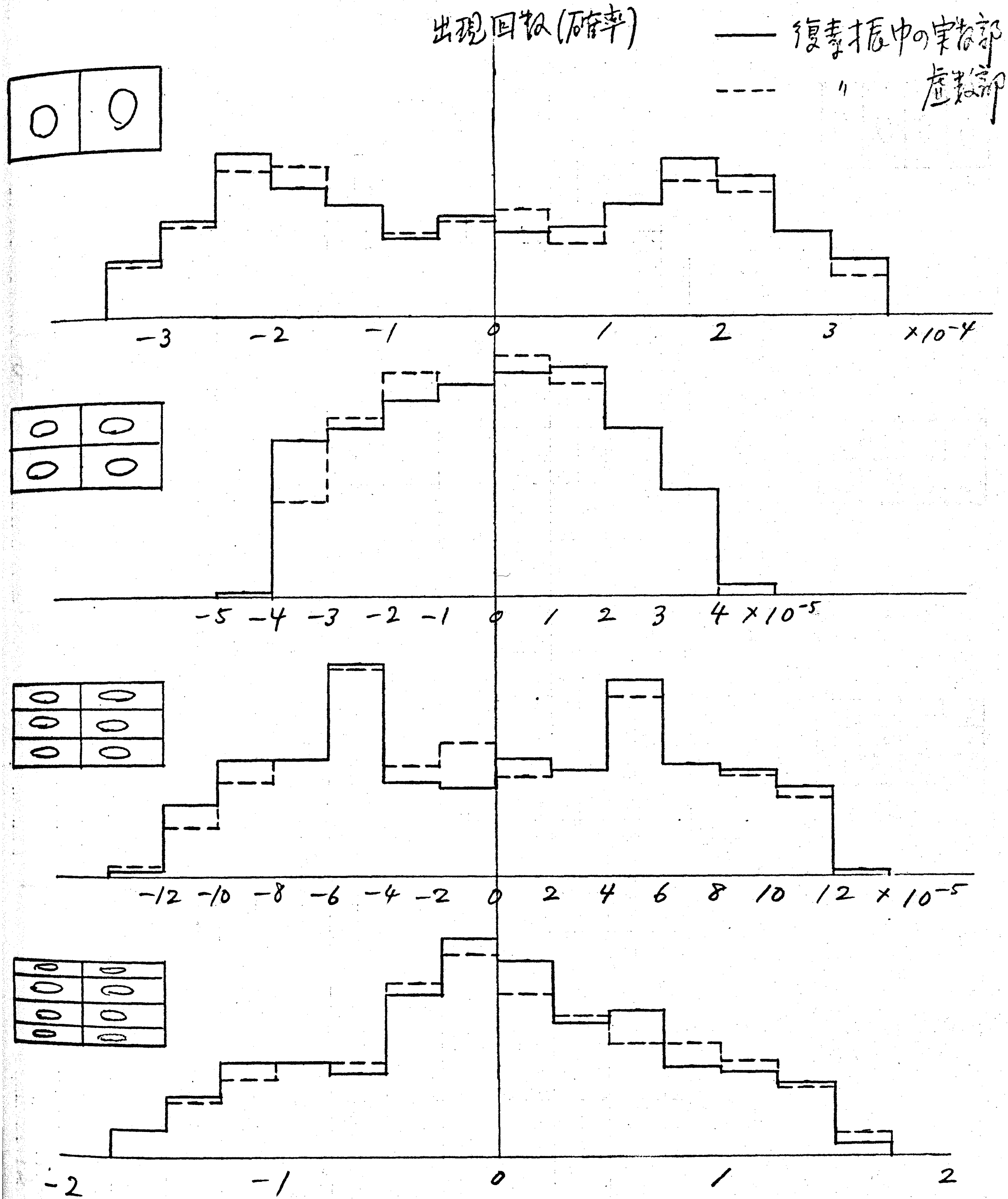


第1図，モードの流線模様



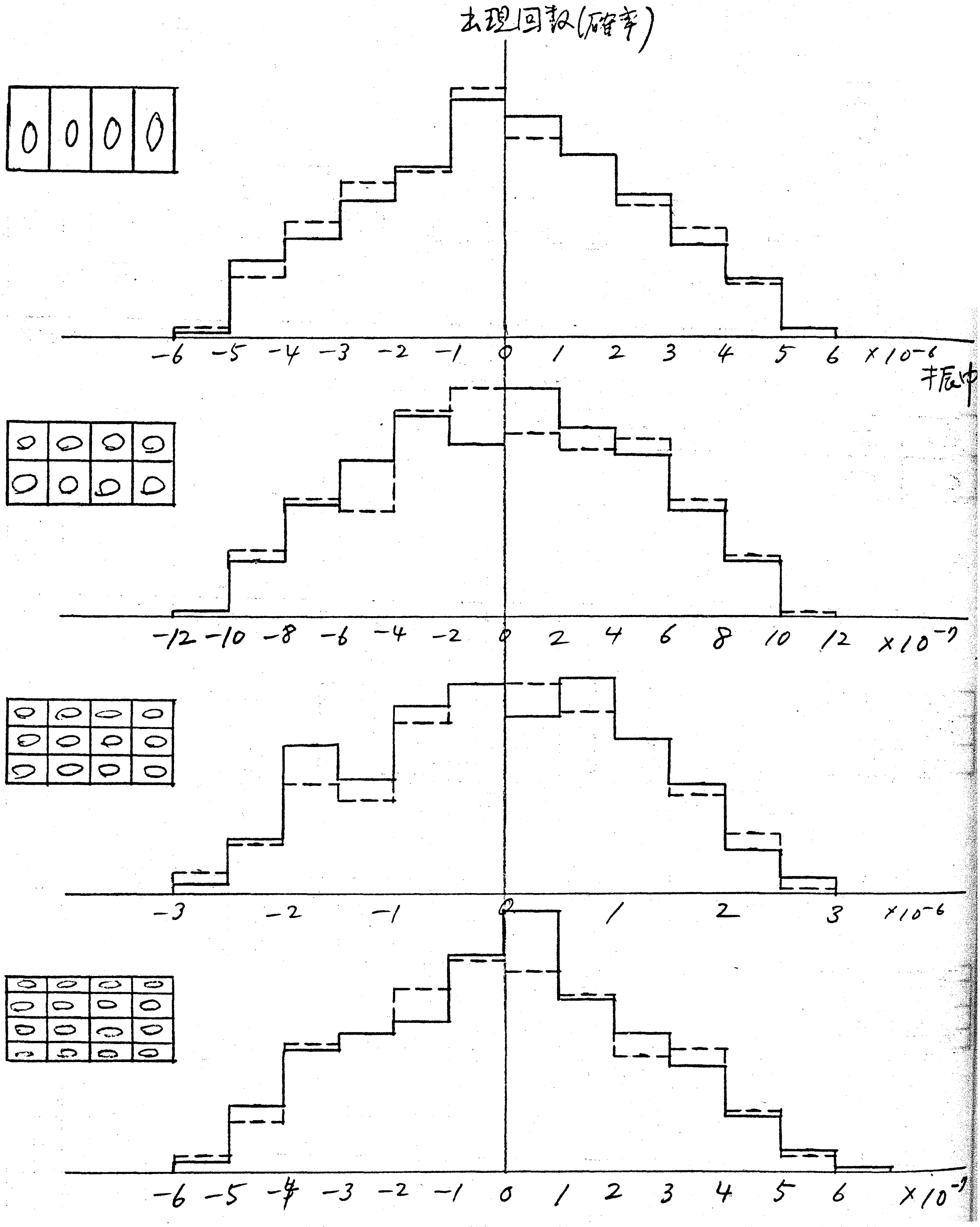
第2図，モードのエネルギーの時間発展

R = 30,000 I



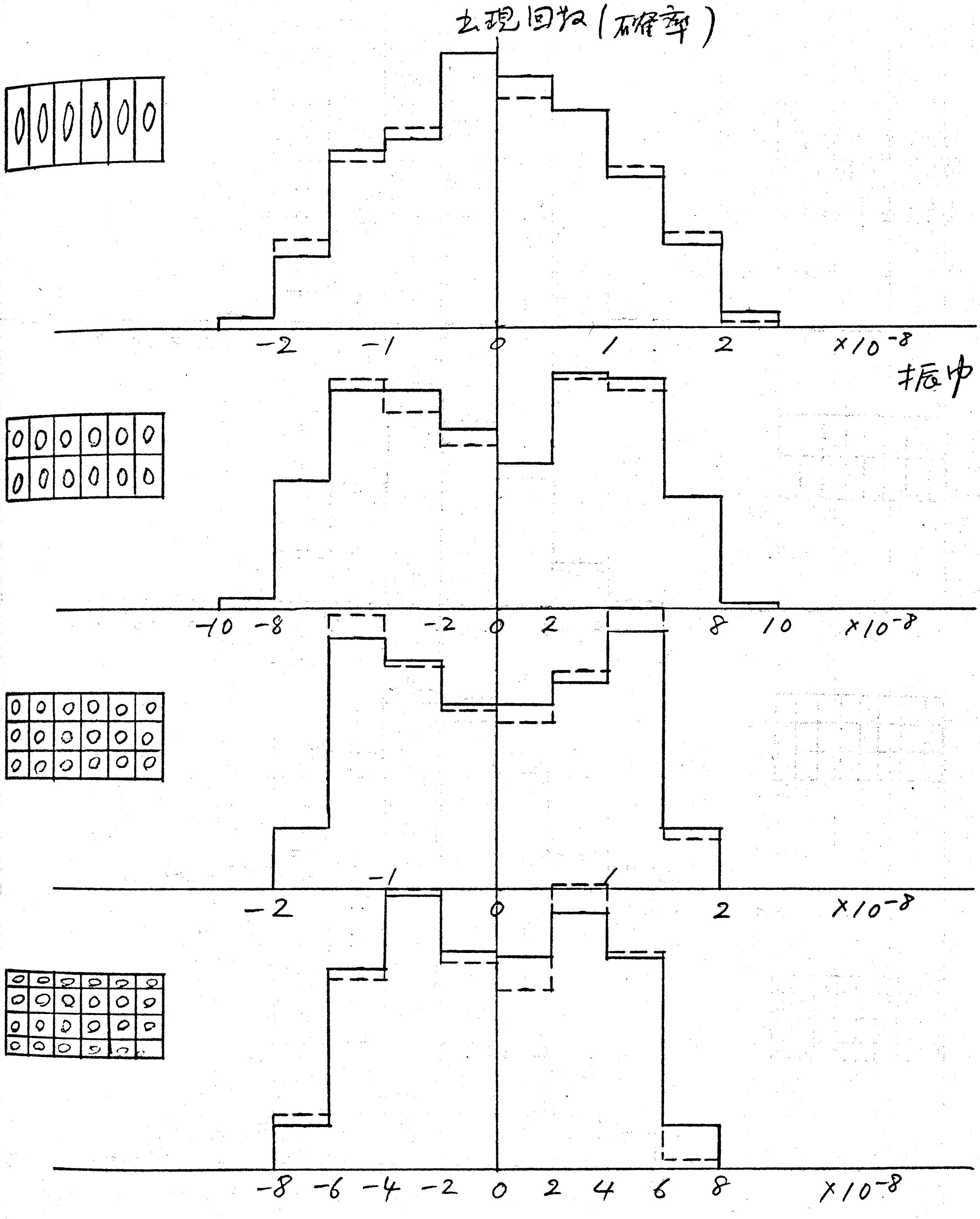
第3図 モード振巾の出現ひん度(確率分布)(a)

R=30,000 II (Plane Poiseuille Turbulence)



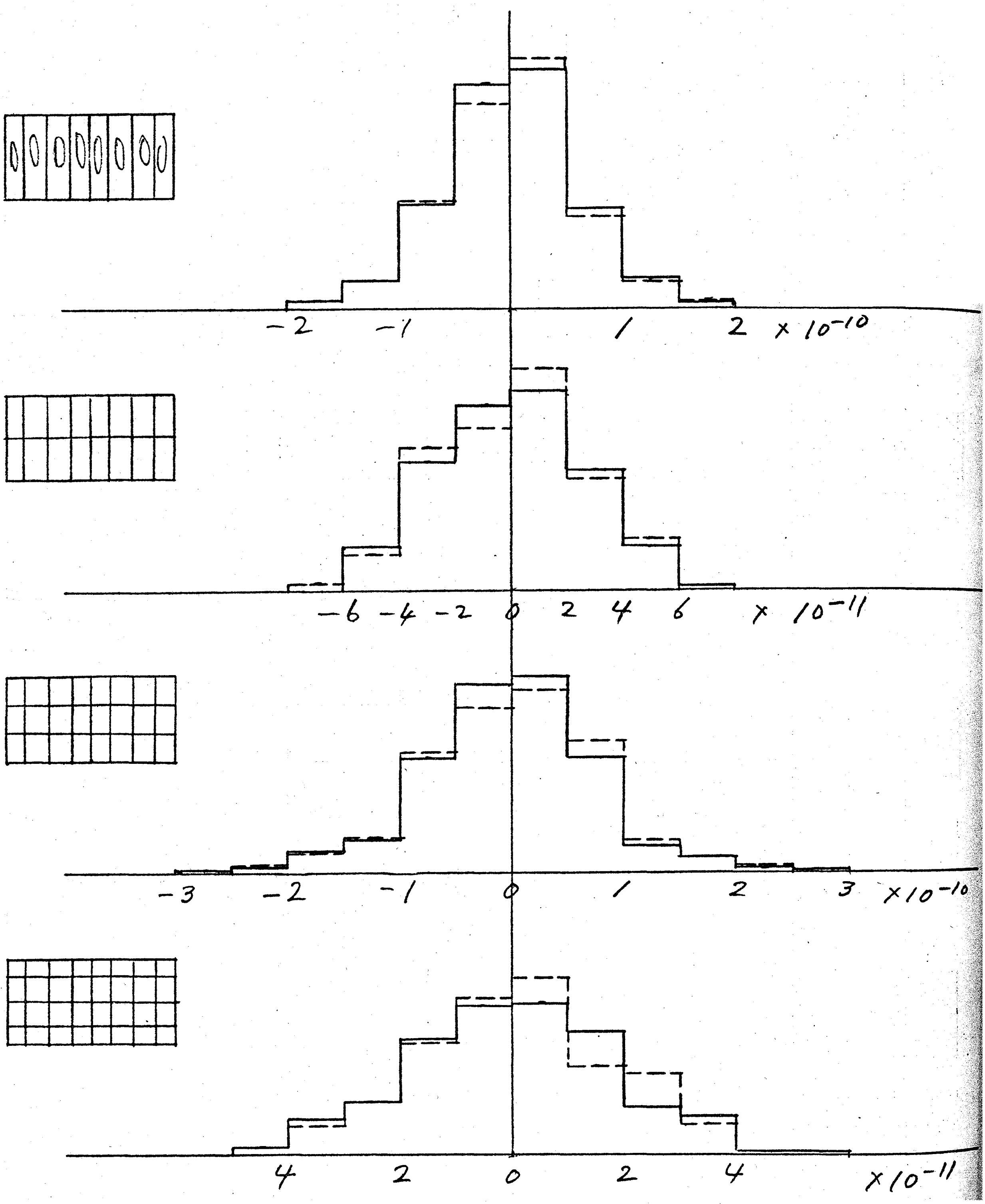
第3図 (b)

R = 30,000 III (Plane Poiseuille Turbulence)



第3図 (c)

R = 30,000 TV (Plane Poiseuille Turbulence)



第3図(d)