数理解析研究所講究録
298巻 1977年 87-95

局所化された意味でのD.I.A.

名大 工　　金田 行雄

非常に大きな渦は非常に小さな渦を，主として，変形せずに流すだけ，というよく知られた仮説を考えに入れて，ある注目する流体粒子とともに動く座標系でD.I.A.を定式化しなおし，それについて議論する。

§1. Navier-Stokes 方程式と D.I.A.

1.1. 非圧縮性粘性流体に対する Navier-Stokes 方程式は

$$\dot{u}_i = \nu \Delta u_i + \sum_{j,k} M_{ijk} u_j u_k + \sum_j D_{ij} f_j \equiv F_i[u] \qquad (1)$$

$$D_{ij} = \delta_{ij} - \Delta^{-1} \partial_i \partial_j , \quad -2M_{ijk} = \partial_j D_{ik} + \partial_k D_{ij}$$

に帰着される。(たとえば，文献[1]参照)　ここで，ドット˙は時間微分，uは速度，νは動粘性率，fは外力，i, j, k,は座標軸の方向を表わす。　空間座標や時刻などの変数の組(r_1, t_1, i_1)を1等と略記すれば(1)は一般の

$$\dot{X}(1)=\alpha(1,2)X(2)+\beta(1,2,3)X(2)X(3)+\gamma(1) \qquad (2)$$

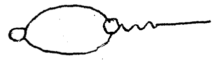
（ただし，$\beta(1,2,3)=\beta(1,3,2)$ とする）の形の一つの特別な場合である。[2] （なお，これ以後，繰り返される引数（(2)では2と3）については適当な和をとることにする。）

たとえば，(1) に対応して $\alpha(1,2)$ は次のようになる。

$$\alpha(1,2)=\nu\Delta_{r_1}\delta(r_1-r_2)\delta(t_1-t_2)\delta_{i_1 i_2}\ .$$

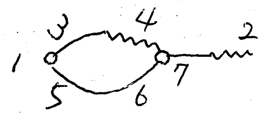
1.2. Eulerian D.I.A. では，外力のない場合，(2) において X として u を，α,β として (1) に対応するものをとり，$\langle X(1)X(2)\rangle\equiv Q(1,2)$，$\langle\delta X(1)/\delta\gamma(2)\rangle\equiv G(1,2)$ を

$$\frac{\partial}{\partial t_1}Q(1,2)=\alpha(1,3)Q(3,2)$$

$+\,4$  $+\,2$  (3)

$\frac{\partial}{\partial t_1}G(1,2)=\alpha(1,3)\cdot G(3,2)+4$  (4)

（ただし，以下，$\langle X\rangle=0$ とする）で近似する。ここで，○は β，――は Q，〜〜は G を表わす。たとえば，(4) の最後の項は

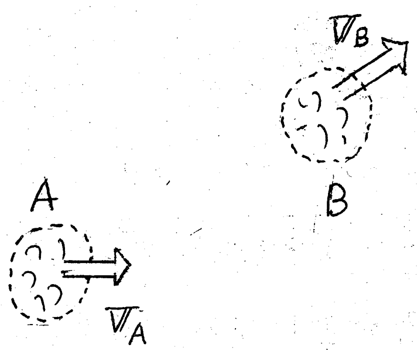


$=\beta(1,3,5)G(3,4)\beta(4,6,7)Q(5,6)G(7,2)$

である。 外力がない（$\gamma=0$）場合，(3)(4)に対応する近似式は形式的には，(1)だけではなく，たとえば§4.の(6)に対しても構成できる。 なお本稿では，とくにことわらない限り D.I.A. とは Eulerian D.I.A. をさすものとする。 その導出については，たとえば[1]や[2]等を参照されたい。

§2. D.I.A. の問題点

2.1. D.I.A. では大きな渦の小さな渦に対する役割のとり入れ方に問題があることは良く知られている。（たとえば，[1]，[3]〜[5] 参照。 本節での議論は主としてこれらの文献に依っている。） ここではそれをふり返ってみる。



右図は強い乱流場を模式的に表わしたものである。 強い乱流では，ある小さな流体の塊Aは，全体としてほぼ一様な速度 $V=V_A$ で流されており，V_A はエネルギーを含む大きな渦の性質によって決まると考えられる。 もちろん，Vは場所（たとえば上図でA，Bのいる位置），時刻によって異なるランダムな量である。 今，考えている乱流場が一様，準定常で $\langle V\rangle=0$，$\langle V^2\rangle=3V_0^2$ とすれば，たとえば，オイラ

一的な二時刻相関関数 $\langle u(1)u(2)\rangle \equiv U_{i_1i_2}(\mathbf{r},t_1,t_2)$ やレスポンス関数（(3)(4)の G に対応する）$g_{i_1i_2}(\mathbf{r},t_1,t_2)$，（$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$），を $\mathbf{r}$ についてフーリエ変換した $\tilde{U}_{i_1i_2}(k,t_1,t_2)$ や $\tilde{g}_{i_1i_2}(k,t_1,t_2)$ の $t=t_1-t_2$ に対する依存性を示す特性時間 τ は V_0 に依存するであろう。 慣性小領域では $\tau_1^{-1}\equiv\varepsilon^{1/3}\times k^{2/3}\sim V_0L^{-1/3}k^{2/3} \ll \tau_2^{-1}\equiv V_0k$（$\varepsilon$ は単位時間，単位質量当たりのエネルギー散逸率，L はエネルギーを含む大きな渦のスケール，$k=|k|$）であることから，この領域では $\tau\sim(V_0k)^{-1}$ と考えるのが自然であろう。 このような特性時間 $\tau\sim(V_0k)^{-1}$ をもつ $\tilde{U}$ や $\tilde{g}$ を使って D.I.A. から $k^{-5/3}$ 乗則を導き難いことは良く知られている。 たとえば，文献[1]の Ch.6. のような方法で $k^{-5/3}$ 乗則を導くには $\tau\propto k^{-2/3}$ が必要である。 D.I.A. の一つの特徴は二時刻の関数 U や g を使うことにあり，その利点としていわゆる乱流のかきまぜによる記憶減衰効果をとり入れられる反面，このような欠点が生じるのである。 中野氏が筆者に指摘されたように，とくにオイラー座標での平均操作には注意が必要であろう。

たとえば，ある小さな流体の塊A内の構造を知るのに，上述の大きな渦によるところの V がランダムであることに大きく影響する平均量を基に近似を構成するのは一定非能率であろう。 なぜなら，そのAにとって V は時間，空間的に

ほぼ一定であって，ランダムではなく，又，主として流すだけの役割をすると考えられるからである。

本節の議論と Kraichnan の指摘したガリレイ変換に対する不変性の必要性とは深い関連があるが，その必要性については，たとえば [1]，[3]，[4] 等を参照されたい。

2.2　D.I.A. の問題点としては摂動展開の立場からもみることができる。　よく知られたように（たとえば [6]）D.I.A. は静止座標系でのレイノルズ数展開に基づいたくりこまれた近似として解釈できる。　レイノルズ数展開をするということは，まず粘性の効果をとり入れることである。

ところが，強い乱流では，静止座標系でのオイラー的なある小さな領域の時間発展を決めるのは粘性の効果よりも，むしろ，その領域の近傍全体がほぼ一定の速度で流されている効果のほうが強い。　まず，この効果を考慮するのが望ましいと思われる。

§3. Vertex のくりこみ

D.I.A. はくりこまれた展開の低次の打ち切りの近似として解釈されることは良く知られている。（たとえば，[2]）　D.I.A. で $k^{-5/3}$ 乗則が導き難いとすれば，高次の

近似，たとえば vertex のくりこみを用いた近似ではどうなるか興味がもたれる。　実際，そのような近似で $k^{-5/3}$ 乗則が導かれるという報告がある。[7]　しかし，[1] の Ch. 6. や [7] のような解析の方法が正当であるとする限り，そのような近似は $k^{-5/3}$ 乗則と同時 $\bar{v}$ や $\tilde{q}$ の特性時間 τ としては，より自然であろう $\tau \propto k^{-1}$ ではなく，$\tau \propto k^{-5/3}$ を導くと考えられる。（§2.1 及び [7]，[8] を参照されたい。）　すなわち，$k^{-5/3}$ 乗則の導出は良いとしても，特性時間についての問題が，少なくとも静止系でのオイラー的な vertex のくりこみを用いた近似では，生じる。

§4.　局所化された意味での D.I.A.

§2，§3．の議論によって，たとえば，ある小さな流体の塊 A 内の構造を知るには，何らかの意味でその A の動きに乗る，あるいは A を追いかければ良いと示唆される。Kraichnan 等はラグランジュ的取り扱いの必要性を強調した（たとえば [1] [3] 参照）が，我々はここで，大きな渦による速度 $\bar{v}$ は，たとえば A の近傍では，ほぼ一定であることに注意して，次の，Kolmogorov[9] の用いたのと類似の変換をして，ラグランジュ的ではなく，オイラー的に取り扱う。

$$\mathfrak{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t), \qquad \mathfrak{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0(t), \qquad (5)$$

ここで，$\mathbf{r}_0(t)$，$\mathbf{u}_0(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ は各々，ある注目する流体粒子の静止座標系における位置座標と速度である。　我々のここでの目的はこの粒子の近傍についての近似を得ることである。　(5)の変換によって，(1) は新しい座標系（$\mathbf{r}_1 \to \mathfrak{z}_1$ などに注意）で

$$\dot{v}_i = F_i[v] - \{F_i[v]\}_{\mathfrak{z}=0}, \quad \left(= F_i[v] - \dot{u}_{0_i}(t)\right), \qquad (6)$$

となる。　X を v とおけば (6) も (2) の型の式の一つであり，$\langle v \rangle = 0$ で，外力のないとき，(6) に対応する α, β をとれば，(3) (4) に対応する，D.I.A. に類似の近似式が構成できる。　たとえば，Q(1,2) を D.I.A. の $\langle u(1) u(2) \rangle$ の代りに，$\langle v_{i_1}(\mathfrak{z}_1, t_1) v_{i_2}(\mathfrak{z}_2, t_2) \rangle$ でおきかえるなどすれば良い。　いま，仮りに，この近似を「局所化された意味での D.I.A.」と呼び，以下，L.D.I.A. と略記する。

ここで，我々は Kolmogorov[9] の考えを参考にして，次の仮定をする。

仮定（局所性の仮定）

「ある点（仮りに $\mathfrak{z}=0$，$t=t_0$ とする）のある近傍領域 $\mathcal{D}$ 内の構造の $\mathcal{D}$ 外の構造への依存は弱い。」

Kolmogorov の考えによれば（ただし，詳しくいえば，Kolmogorov は (5) で与えられる ξ とは少し違った量を用いてはいるが） $\mathcal{D} = \{\xi, t : |\xi - 0| \ll L, |t - t_0| \ll T\}$ $(T = L/V_0)$ であろう。

我々の L.D.I.A. は $\xi = 0$ の近傍以外でも良い近似であるとは期待できない。しかし，$\mathcal{D}$ 内では v は大きくないこと，D.I.A. は大きくないレイノルズ数では一定の成功を収めていること（たとえば [10] 参照），及び，上の仮定は，L.D.I.A. が，たとえ $\mathcal{D}$ 外では悪くても，その悪さが $\mathcal{D}$ 内の近似に本質的な影響を与えないという意味で，$\mathcal{D}$ 内で閉じた，良い近似であることを期待させる。

詳細は省くが，

$$\langle v_i(\xi_1, t_1)\, v_j(\xi_2, t_2)\rangle = \langle \{u_i(\xi_1 + r_0(t_1), t_1) - u_i(r_0(t_1), t_1)\} \times \{u_j(\xi_2 + r_0(t_2), t_2) - u_j(r_0(t_2), t_2)\}\rangle \qquad (7)$$

また，乱流が一様で，$t_1 = t_2$ のとき，たとえば，

$$\langle u_i(\xi_1 + r_0(t_1), t_1)\, u_j(\xi_2 + r_0(t_1), t_1)\rangle = U_{ij}(\xi_1 - \xi_2, t_1, t_1),$$ など

であることに注意して，[1] の Ch. 6. に類似の議論をすることによって，若干の仮定のもとに，D.I.A. の基本的難点であった，レスポンス方程式（(4) に対応する）の発散の問題[7]

を回避できることが示される。

§5. 自己無撞着場的方法

前節で得られた L.D.I.A. は (7) からもわかるように，かなり複雑である。 ところで，D.I.A. と基本的に類似した近似が自己無撞着場的方法によって得られることが知られている。(たとえば [1] 参照) 我々は，この自己無撞着場的方法の発想を借りて，(6) を基にして，L.D.I.A. に類似の，L.D.I.A. より簡単な近似を構成することができる。 この簡単化された近似を用いて，実際 Kolmogorov 定数を求めることは，別の機会に譲りたい。

文献

[1] D. C. Leslie: Developments in the theory of turbulence (Clarendon Press, Oxford, 1972).

[2] P. C. Martin, E. D. Siggia and H. A. Rose: Phys. Rev. A8 (1973)423.

[3] R. H. Kraichnan: Phys. of Fluids 7(1964)1723.

[4] S. A. Orszag: J. Fluid Mech. 41(1970)363.

[5] T. Nakano: Ann. of Phys. 73(1972)326.

[6] H. W. Wyld, Jr.: Ann. of Phys. 14(1961)143.

[7] A. V. Shut'ko: Soviet Physics-Doklady 9(1965)857.

[8] 金田行雄；数理解析研究所講究録 275(1976)57.

[9] A. N. Kolmogorov: C. R. Acad. Sci. URSS. 30(1941)301.

[10] J. R. Herring and R. H. Kraichnan: Statistical Models and Turbulence, ed. by M. Rosenblatt and C. Van Atta (Springer Verlag, Berlin, 1972)148.