数理解析研究所講究録
298巻 1977年 83-86

一様乱流における scaling law

東大 生産研　吉沢 徴

次元解析と二つの仮定：

i) 乱れのレイノルズ数が十分大きく、波数空間においてエネルギーを含む領域と散逸領域が分離している。

ii) その中間の（慣性）領域では、乱れの構造はエネルギー散逸率 ϵ によって決定される。

より、有名な Kolmogoroff の $-5/3$ 乗則が導かれる。一様乱流の統計理論においては、Kolmogoroff（K-）スペクトルを力学方程式といかに調和させるかが、一つの大きなテーマとなっている。しかし、このことは必ずしも K-スペクトルの重要性を示唆するものではなく、どちらかと言うとその法則のもつ"端正な横顔"によるものと思われる。

このテーマに対して、多くの理論が提出され、又現在されつつある。典型的なものとしては、Kraichnan の DIA, Edwardsの FP法がある。その他のものを含めてくわしい解説が Leslie, Monin and Yaglom の教科書に与えられている。[1] これらは mode－mode 結合理論と総称されるもので、大ざっぱに言えば乱流の非線型性を線型的な概念にくりこんで議論しようとするものである。その際、これらの理論に共通している困難は、乱流粘性を決める応答関数（の積分）が波数 0 の下限で発散することである。この原因に関してはいくつかの説があり、その一つとして K－スペクトルが Euler 座標と矛盾するような関係にあるのではないかという見解もある（この方向の議論に関しては文献 2）にゆずる）。

上の困難の最も直接的（又は皮相的）な原因は、乱流の非線型性のすべて（高波数成分から低波数成分迄）を粘性等の線型的な概念にくりこんだことにある。そこで、高波数成分のみをくりこんだらどうかという問題が次に考えられる。この点にくると、臨界現象における"くりこみ群の手法"との関連が見えてくる。本論文では、K－スペクトルを"scaling law"という見地から導くが、ここでは手続きのみに限り詳細は文献 3）にゆずる。

Navier－Stokes乱流を決定する特性関数 Ψ はいわゆる Hopf

方程式によって記述される。定常乱流に対して、それは[3]

$$L\Psi = \int_k\int_p\int_q M_k^{\alpha\beta\gamma}\delta(k-p-q)V_k^\alpha \partial_p^\beta \partial_q^\gamma \Psi, \qquad (1)$$

ここで

$$L = \int_k V_k^\alpha(\omega_k \partial_k^\alpha + D_k^{\alpha\beta} d_k V_{-k}^\beta),$$

$$\int_k = \int d^3k, \quad \partial_k^\alpha = \frac{\partial}{\partial V_k^\alpha d^3k}, \qquad (2)$$

（kは波数、αは成分を示す）。(1)式の特徴は、乱流の線型性を表わす粘性ω_kと拡散d_kおよび非線型性を表わすバーテックス$M_k^{\alpha\beta\gamma}$からできていることである。

今、我々は(1)式をもとにして、次の二つの手続きを行なう：

(A)波数領域$0<k<K$（Kは適当な波数）をとり、(2)式のω_k, d_kとしてK-スペクトルを与えるものをとる（具体的には、$\omega_k \propto k^{\frac{2}{3}}$, $d_k \propto k^{-3}$）。$M_k^{\alpha\beta\gamma}$が小さいとして、(1)式を摂動的に解き、得られたΨから高波数成分（$a^{-1}K<k<K$）を消去し、新しいΨを求め、更にこれを支配する新しいHopf方程式を見い出す。

(B)V_k^α, ∂_k^α, kのスケーリングを行ない、Hopf方程式が不変に保たれるようにスケール因子を決める。

この手続きを通して、我々は$M_k^{\alpha\beta\gamma}=0$がくりこみ群の不動点であることを見い出し、step (A)での$M_k^{\alpha\beta\gamma}$小の仮定が正当化される。その結果として、K-スペクトルが一様乱流におけ

る scaling law の一つとして与えられる。

文献

1) D.C. Leslie: Developments in the Theory of Turbulence (Clarendon Press, Oxford, 1973).
A.S. Monin and A.M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics (The MIT Press, Massachusetts, 1975).
2) A. Yoshizawa: submitted to J. Phys. Soc. Japan.
3) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Japan (to appear in 1977).