

## 界面波(とくに河床波)発生メカニズム

東京工業大学 日野 幹雄

宮永 洋一\*

1. はじめに
2. 液面上の流れ (a)層流  
(b)乱流
3. 界面波の発生条件
4. 参考文献

### 1. はじめに

流れの安定問題のうちで、相を異にする二流体間の界面に発生する波の問題の解析はまだ十分ではないと思われる。重力の影響下にある空気と水との間の界面波すなわち風波、や河床に流水の作用により生じる砂漣・砂堆(ripple & dune)、風による砂丘や砂紋がそれである。海浜の波による砂紋・砂漣のうち波長の比較的長いものは、風波や砂漣と同様のメカニズムにより発生するものと思われる。これら二相流体間の

\* 現在, (財) 電力中央研究所

流れの安定問題は、普通の密度の異なる二流体間(成層流 *stratified flow*) の安定問題とはかなり異った面を有している。

#### a) 風波:

風波の発生について、流体力学的な安定問題—固有値問題としてこれを明確に捉えたのは Miles (1957) である。彼の理論では空気の流れは半対数分布則に従う乱流流速分布をもつ主流の、界面の微小変動に対する摂動解として固有値・増幅率が求められている。この際水面の変動は波面  $\eta$  の方程式が用いられており、水面下の流れの場の変化は理論には考慮されていない。同じ年、Phillips (1957) は大気圧の攪乱に対する水面の共鳴増幅機構を提案している。この作用は時間とともに線型的に増加する。

その後、風波の発生についての安定理論は種々提案されているが、基本的には「風波は Phillips の共鳴作用が引金役をはたし、その後 Miles の流体力学的不安定機構により増幅する」と解されている。

これまでの風波の理論では主に水面上の風の流れに焦点がしぼられて来たが、最近では水の流れ—吹送流をも十分考慮すべきではないかとの試みも行われつつある。

#### b) 砂漣:

一方、河床での砂漣の発生を安定理論として明確に理論化

したのは Kennedy (1963) である。彼は微小な河床波上の流れをポテンシャル流として解き、流れと流砂量との間の関係式に位相差を持ち込んで砂漣の発生発達を説明した。この理論は林 (1970) によりさらに発展させられた。Engelund (1970) は流れをポテンシャル流としてではなくせん断流として解析しており、流れと流砂量との間の位相差を直接持ち込まずに砂漣の発生を説明した。

### c) Miles - Benjamin 機構 :

こうした界面波の発生に共通するメカニズムとして Benjamin (1959) はいち早く、「粘性の作用による界面波形と界面に働く摩擦力・圧力との位相差」に注目している。彼の理論では主流は粘性の影響を受ける *rotational flow* とし、微小な界面変形に対する擾動流れの場を求めている。彼の理論は波面に沿って座標軸を採る直交曲線座標系を用いて展開され難解であるが、曲面の影響の高次の項は求められていないので、数量的検討には十分でないと思われる。

本論文は界面波発生の本質である Miles - Benjamin 機構そのものを理論的に再検討し、直接実験と比較しようとするものである。

## 2. 任意波形上の流れ

簡単のために,  $180^\circ$ 位相のずれた任意波形の二次元管路内の流れを考える (図-1)。

### a) 層流解

実際の流れは乱流であるが, 乱流の場合の解を求めるためには "closure problem" に対し仮定・仮説を持ち込まざるを得ない。これによる曖昧さを避けるためにまず層流の場合の解を求める。我々は層流状態で界面波が発生すると主張するのではなく, 界面波発生に関して流体の粘性が, 圧力分布やせん断応力分布に与える効果の本質を探るにはむしろこの方が良いと考えられる。

流れの場は, 流関数  $\psi$  に関して

$$\left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi = \nu \nabla^4 \psi \quad (1)$$

と表わされ, 境界条件は

$$y=0 \quad : \quad \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=0 \quad (2)$$

$$y=\pm \eta \quad : \quad \psi=\pm \frac{Q}{2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

また, 無次元波状は任意関数  $g$  により次のように与えられる。

$$\tilde{z} = z/h = \frac{1}{2} + \epsilon g \quad (4)$$

波状管路の平均幅を  $h$ , 波状境界の波長を  $l$ , 振幅を  $a$  と

するとき、次の2つのパラメータ $\delta$ ,  $\epsilon$ が定義される。

$$\delta = h/l, \quad \epsilon = a/h \quad (5)$$

流関数 $\psi$ を $\delta$ に関して、次のように摂動展開をする。

$$\psi = \psi_0 + \delta \psi_1 + \delta^2 \psi_2 + \delta^3 \psi_3 + \dots \quad (6)$$

摂動パラメータ $\delta$ の等べきの項を集めれば、 $\psi_0, \psi_1, \psi_2$ に関する常微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial y^4} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4} = \text{Re} \left( -\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial y^4} = & -2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + \text{Re} \left( -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial y^3} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

これらの方程式の解は順次次のように求められる。

$$\psi_0 = \frac{Y}{4} (Y^2 - 3) \quad (10)$$

$$\psi_1 = \frac{3}{1120} \operatorname{Re} \epsilon \frac{dg}{dx} Y (Y^6 - 7Y^4 + 11Y^2 - 15) \quad (11)$$

$$\psi_2 = \frac{3}{40} \left\{ \epsilon^2 \frac{d^2g}{dx^2} - 4 \epsilon^2 \frac{d^3g}{dx^3} \right\} Y (Y^4 - 2Y^2 + 1)$$

$$+ \frac{R_e^2}{3449600} \left\{ \epsilon^2 \left( \frac{dg}{dx} \right)^2 G(Y) - \epsilon^2 \frac{d^2g}{dx^2} H(Y) \right\} \quad (12)$$

$\psi_3$  および  $G \cdot H$  の関数形は文献 10) を参照のこと。

[せん断応力分布]

波形境界が任意の関数形

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{2} + \epsilon g(\tilde{x})$$

で与えられるとき、せん断応力分布  $\tilde{\tau}$  およびせん断応力と境界形状を  $g = e^{i2\pi\tilde{x}}$  としたときの位相差  $\phi$  は次のように求まる。

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_s &= \frac{\tau_s}{\rho U_m^2} = -Re^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=\eta} \\
&= \frac{3Re^{-1}}{2\tilde{\eta}^2} - \frac{3}{35\tilde{\eta}^2} \delta \epsilon \frac{dg}{dx} + \frac{3Re^{-1}}{2\tilde{\eta}^2} \delta^2 \left\{ \left( \frac{2}{5} + \frac{8}{8085} Re^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \epsilon \eta \frac{d^2 g}{dx^2} - \left( \frac{13}{5} + \frac{79}{40425} Re^2 \right) \epsilon^2 \left( \frac{dg}{dx} \right)^2 \right\} \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{\pi Re \delta}{35 \left\{ 1 + \frac{\pi^3}{5} \left( 1 + \left( \frac{Re}{20.1} \right)^2 \right) \delta^2 \right\}} \right\} \quad (14)$$

上式の関係は、粘性による phase shift 効果すなわち Miles - Benjamin 機構の解析表示である。

### b) 乱流解

曲面境界と乱れとの interaction は、風波の場合乱流モデル（例えば Bradshaw - Ferris - Atwell モデル）を用いた数値計算が行われるが、ここでは渦動粘性により解析的に解を求める。

Reynolds 方程式および Reynolds 応力についての Boussinesq の仮定を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial \rho \bar{v}'^2}{\partial x} - \frac{\partial \rho \bar{u}'v'}{\partial y} \\ \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \frac{\partial \rho \bar{u}'v'}{\partial x} - \frac{\partial \rho \bar{v}'^2}{\partial y} \end{aligned} \right\} (15)$$

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho K_{xy} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad \text{etc.} \quad (16)$$

$$K_{xy} = \lambda^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (17)$$

$$\lambda = \kappa(\eta - y) \quad (18)$$

流関数 $\psi$ を導入すれば、基礎方程式は

$$\left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi = \nabla^2 (K_{xy} \psi \nabla^2 \psi) \quad (19)$$

となる。境界条件は層流の場合と大体同じである。ただし、壁面上では

$$y = \pm y^*; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{U_*^2}{\nu} (\eta - y^*), \quad K_{xy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{U_*^2}{\nu} \quad (20)$$

層流の場合と同様に摂動法により次のように解が求められる。

$$\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{2}(Z-1) + \frac{\alpha_0}{2} Z \ln Z \quad (21)$$

$$\tilde{\psi}_1 = -\frac{\epsilon \frac{d\eta}{dx}}{8\kappa^2} F(Z) \quad (22)$$



$$\tilde{\psi}_2 = \epsilon^2 \left( \frac{d^2 g}{dx^2} \right)^2 G(Z) + \epsilon \left( \frac{d^2 g}{dx^2} \right) \tilde{\eta} H(Z) \quad (23)$$

こゝに,

$$Z = 1 - \tilde{y}/\tilde{\eta} \quad (24)$$

$$F(Z) = \alpha_0 Z^2 \ln^2 Z + (2 - 3\alpha_0) Z^2 \ln Z \\ + \alpha_1 Z \ln Z + \left( 3 - \frac{7}{2}\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} \right) Z(1-Z) \quad (25)$$

また,  $\tilde{\sim}$  は無次元化量を示す。係数  $\alpha_0, \alpha_1$  と関数  $G(Z), H(Z)$ : 省略 (文献 10) を参照)。

乱流の解法に, いわゆる摂動法が用いられ望ましい結果の得られている例は極めて少ない。もともと乱流は非線型性の強い流れであるのに対して, 摂動法という解法は線型解を基礎とした非線型問題の近似解法であって, 乱流のような流れには一般に用いられていない。にもかゝわらず, 後に述べるように本理論は流れの拡大・縮小による急速な流速分布形を表わし, 実験とも良い一致を示しているのは興味深い。

### c) 実験との比較

水で薄めたグリセリンを用いて行った流速分布実験結果の一例が図-4 である。流速の測定は水素気泡法によった。次に述べる波状水路内の乱流の場合とは異り, 層流の流速分布は水路の幅の拡大・縮小, 流れの減速・加速でもあまり大

きな変化はない。流速分布の理論と実験はほぼ一致している。

水素気泡法による流速分布から、壁面上のせん断応力分布を求めた(図-5)。

乱流の場合の実験は、高さ10 cmの水路で、水流により行った。流速分布の理論曲線と実験との比較は、図-6に示す通りである。流速分布の理論曲線は波形境界の谷と峯とでは著しく変化している。すなわち、谷部ではパラボリックであるが、水路幅の狭まりによる加速とともに中心部で一様化し境界近くではむしろ出っ張り部が生じる。しかし、水路幅の拡大とともにパラボラ形の流速分布が回復する。

先に指摘したように、摂動法は乱流の解法として一般的ではない方法にもかかわらず、流速分布の理論と実験は可成り良く一致している。

### 3. 界面波の発生

任意波形の曲面境界上の流れにおける境界の形状とせん断応力・圧力分布の位相差—Miles—Benjamin 機構—を、摂動法により、従来の理論より高い精度(≒3近似)で求めることができた。

Milesにつづく多くの論文では、この phase—shift 効果による界面波の発生は自明で trivial なものとして、この段

階で理論の展開または数値計算を打ち切っているが、こゝでは界面の不安定についてさらに述べよう。

まず、理論に曖昧さのない層流の場合について述べる。このことは、層流流れでの界面波の発生を必ずしも主張するものではなく、*phase-shift* 効果が界面不安定をもたらすという一般機構を示すためのものである。なお、Whiteの実験のように層流で砂漣が発生する例も報告されているし、普通の河川は開水路 (*open channel*) であるが、砂漣は管路 (*closed channel*) でも発生することは認められており、管路としての本論文の理論解を基礎にすることに問題はない。

#### a) 応答の遅速性の概念

河床の砂漣にせよ風波にせよ、界面波の特徴は、界面の形状変化に対して界面より上の流体の流れは速い応答性を示すのに対して、境界面以下の流れまたは媒質は比較的緩い応答を示すという点である。従って、上の流れは準定常とし下の流れないしは河床は非定常として取扱うことができる。ただし、最近には両層を同じに非定常として取扱う理論 (*Bordner, Nayfeh & Sarie*) や主張 (*Engelund*) も三みられる。

#### b) 河床波の発生発達

さて、本論文では河床波の発生発達を論じる。床質の輸送量は一般にせん断応力のベキ乗に比例し

$$g \propto \tilde{\zeta}_s^n \quad (26)$$

と表わされる。このとき、床質の変動は連続式として

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{t}} - c \frac{\partial \tilde{\zeta}_s^n}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (27)$$

( $c, n > 0$ ) となる。また、河床形を  $g = e^{2\pi i \tilde{x}}$  とし、 $\tilde{\zeta}_s^n$  は  $\epsilon$  の2次以上の項を無視して次のように書かれる。

$$\tilde{\zeta}_s^n = \tilde{\zeta}_0^n \{ 1 - n \epsilon A e^{i(2\pi \tilde{x} + \phi)} \} \quad (28)$$

こゝに、 $\tilde{\zeta}_0$  は境界が平坦な場合のせん断応力である。

式(26)(27)から河床波高  $\epsilon$  は

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 \exp(-i 2\pi n c \tilde{\zeta}_0^n A e^{i\phi} \tilde{t}) \\ &= \epsilon_0 \exp[2\pi c n \tilde{\zeta}_0^n A (\sin\phi - i \cos\phi) \tilde{t}] \end{aligned}$$

となる。 $c, n, \tilde{\zeta}_0, A$  はいずれも正の定数であるから、結局位相差  $\phi$  により擾動の増幅・減衰が決る。図-2によれば、2次までの解(—)では  $\exp$  のアーギュメントの実部は正ですべての波は増幅する。また、ある  $\phi$  で実部は最大となり、これに対応する河床波が選択増幅され卓越することを示している。ただし、3次の解まで求められている層流の場合についてみると3次の解(-----)まで考えるときはじめて大きな Reynolds 数 ( $R=100$ ) に対して実部 ( $\sin\phi$ ) が負の領

域が表われ河床波の減衰域も証明しうる。

### 結 論

- (1) 任意形状の波状境界をもつ管路の層流流速分布を摂動法により3次の解まで求めた。
- (2) 同様の方法により、乱流の場合の解が求められた。摂動法は非線型性の強い乱流の解法には一般に適していないと考えられるが、この場合には流れの拡大・縮小に伴う急激な流速分布形を良く表わしており、実験とも一致する。
- (3) 流れが層流にせよ乱流にせよ、粘性効果により界面形状とせん断応力分布には位相差が発生する。これを Miles-Benjamin 機構と名付ける。
- (4) この phase-shift 効果により、界面波は不安定増幅される。

### 参 考 文 献

- 1) Kennedy, J.F. ( 1963 ) : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, J.Fluid Mech., vol. 16, 521-544.
- 2) Hayashi, T. ( 1970 ) : Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, vol. 92, no. HY2, 357-366.
- 3) Engelund, F. ( 1970 ) : Instability of erodible beds, J.Fluid Mech., vol. 42, 225-244.
- 4) Miles, J.W. ( 1957 ) : On the generation of surface waves by shear flows, J.Fluid Mech., vol. 3, 185-204.
- 5) Benjamin, T.B. ( 1959 ) : Shearing flow over a wavy boundary, J.Fluid Mech., vol. 16, 161-205.

- 6) Davis, R.E. ( 1972 ) : On prediction of the turbulent flow over a wavy boundary, J.Fluid Mech., vol. 52, 287-306.
- 7) Gent, P.R. & Taylor, P.A. ( 1976 ) : A numerical model of the air flow above water waves, J.Fluid Mech., vol. 77, 105-128.
- 8) Chow, J.C.F. and Soda, K. ( 1972 ) : Laminar flow in tubes with constriction, Phy.of Fluids, vol. 15, 1700-1706.
- 9) 富永 政英 ( 1976 ) : 海洋波動—基礎理論と観測成果—,  
共立出版, P. 273-310
- 日野 幹雄・宮永 洋一 ( 1977 ) : 河床波上の流れの解析,  
10) 土木学会論文報告集 ( 投稿中 )

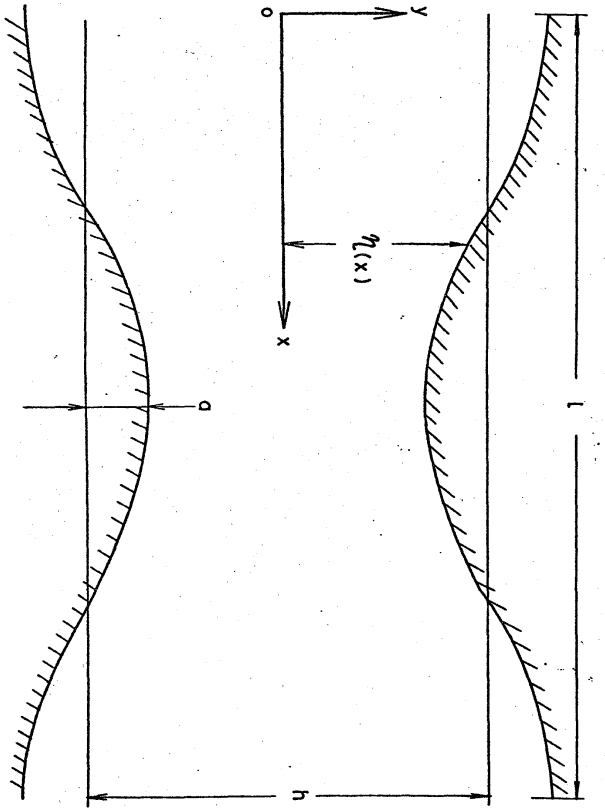
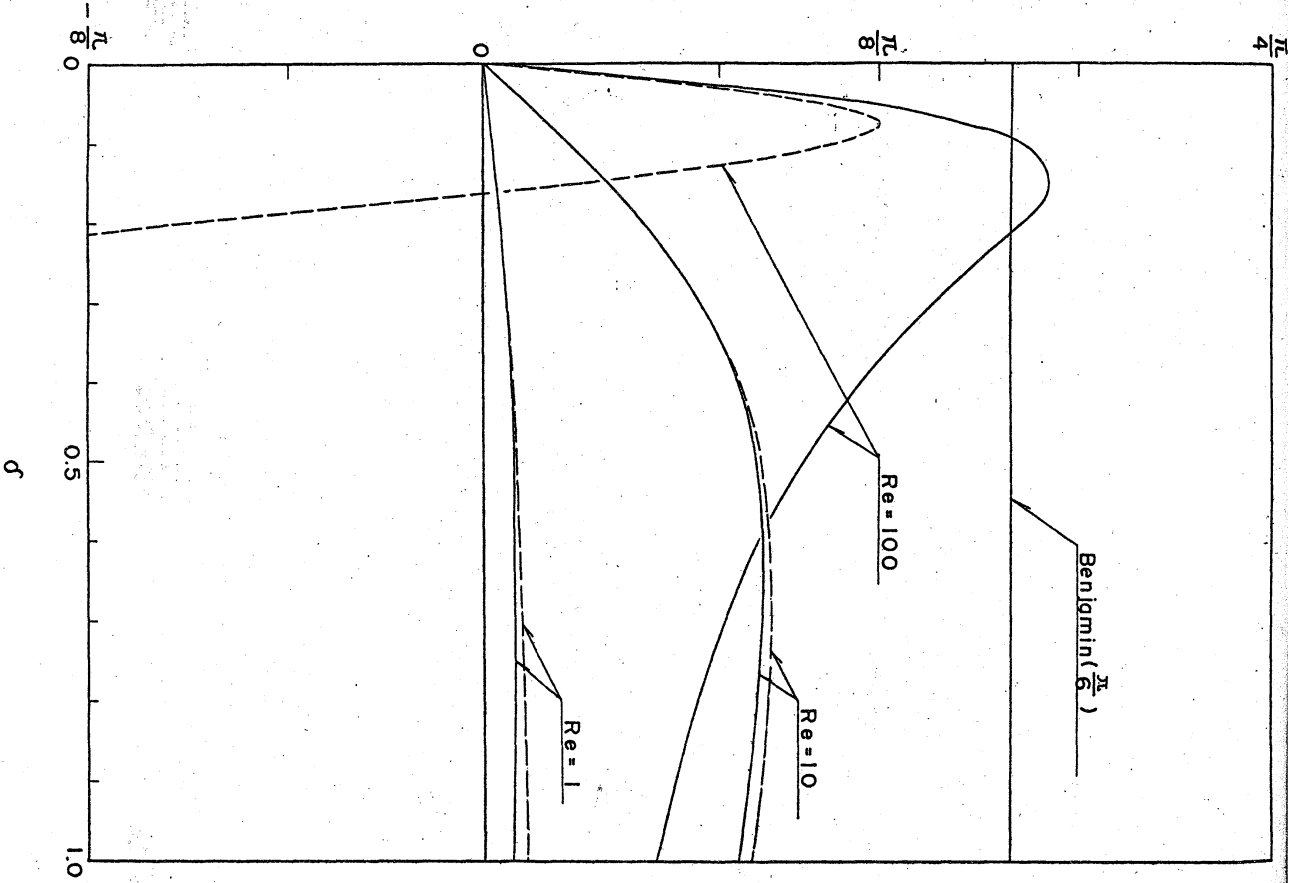


Fig. 1: 境界の形状.

Fig. 2: 層流の場合の位相差中  
と  $Re, \delta$  の関係. →



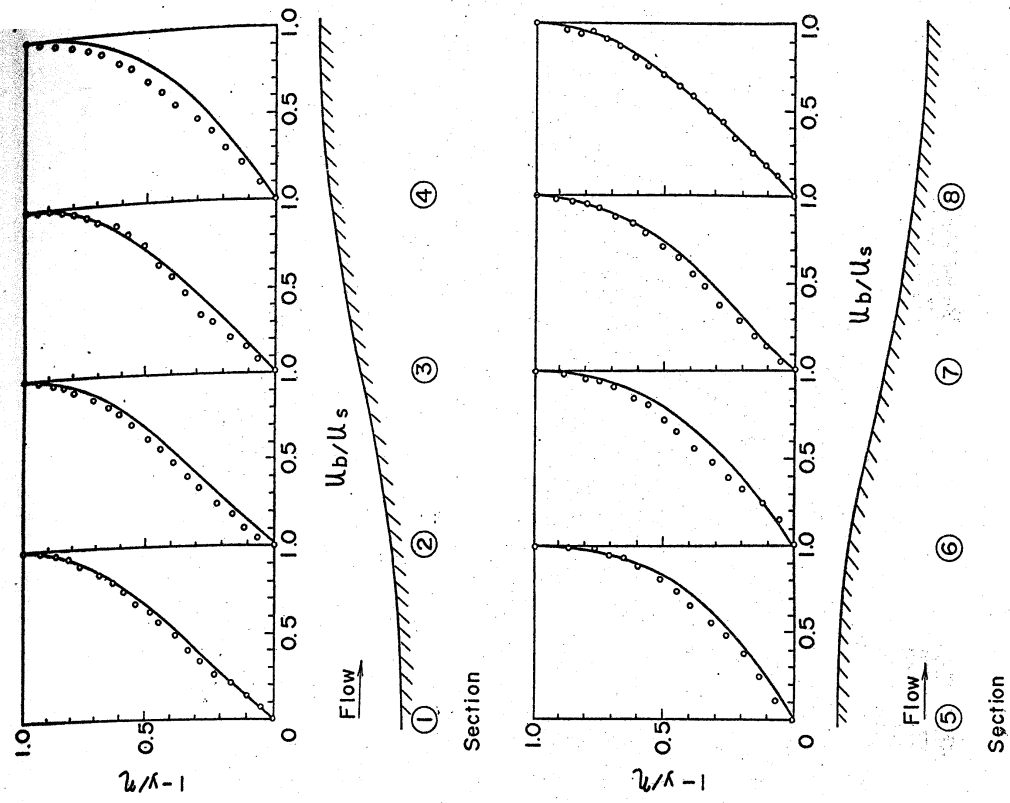


Fig. 4: 流速分布の理論値と実験値(白丸)の比較, 層流.

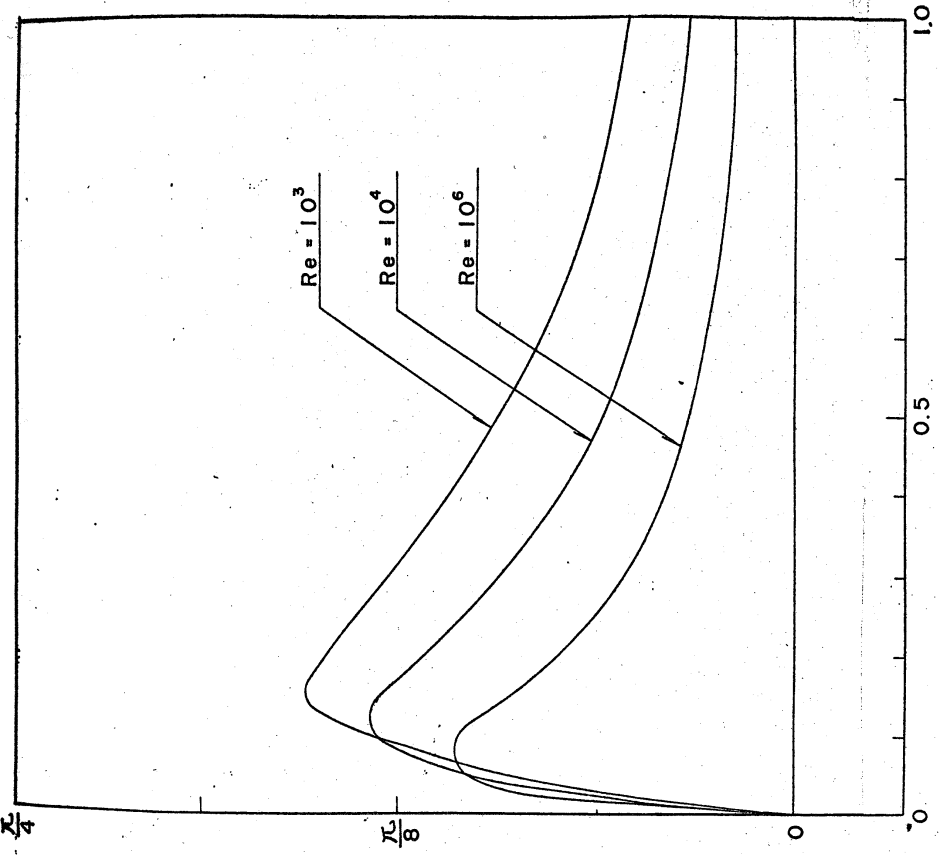


Fig. 3: 乱流の場合の中と  $Re, \delta$  の関係.



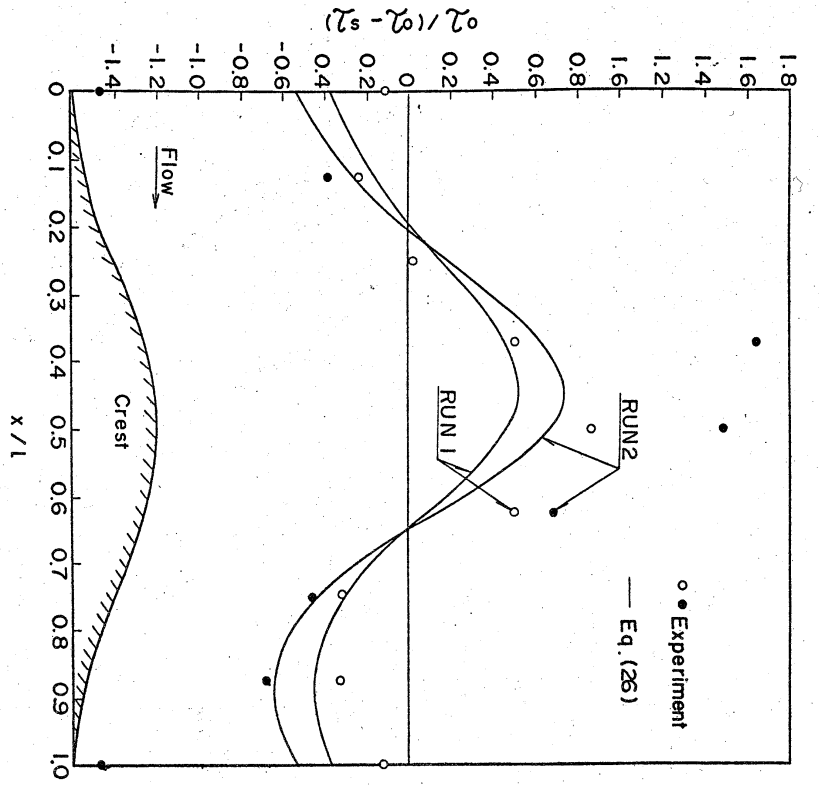


Fig. 5: 境界面に働くせん断力の分布, 層流.

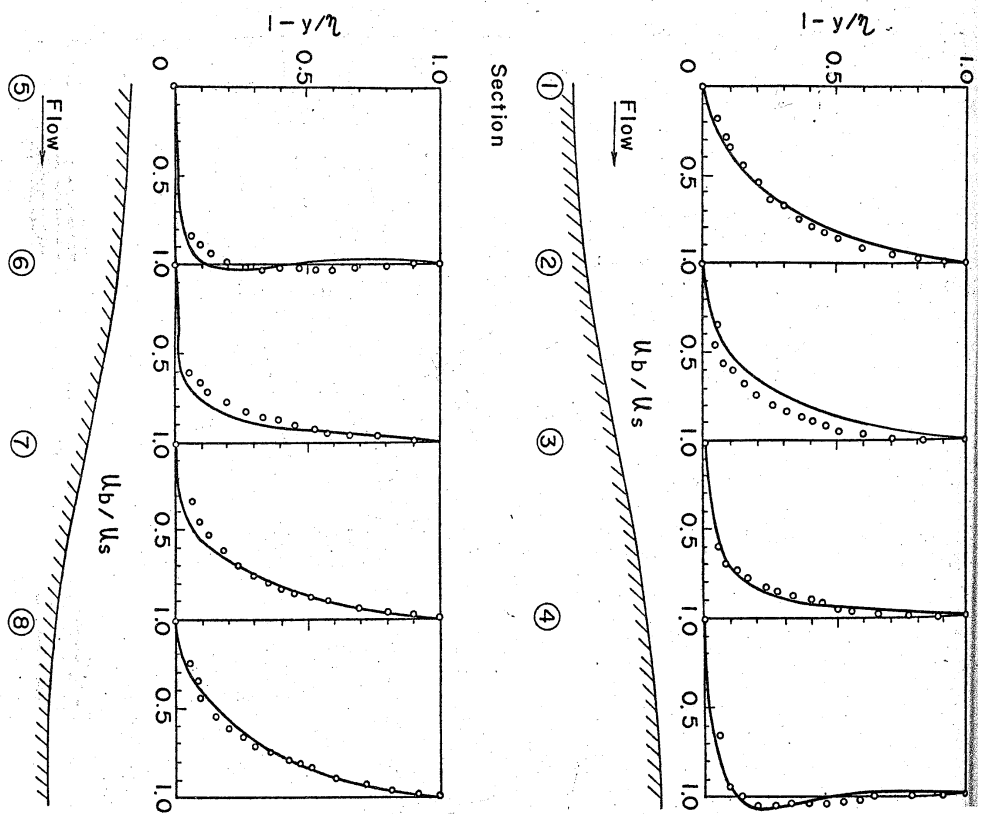


Fig. 6: 流速分布の理論値と実験値の比較, 乱流.