数理解析研究所講究録
101巻 1970年 66-72

気体の渦運動の安定性

原研　笹倉　浩

§1．序

気体の渦運動に、渦保存則がどのような役割を演ずるかを検べる目的で、エネルギー原理を用いて、一つの安定条件が導かれる。

先ず、気体が自己場によって一定の空間に閉じこめられるためには、気体の速度、圧力、渦度などの場がいかなる幾何学的性質をもたねばならぬか　を§２で論ずる。§３では、ラグランジの渦保存方程式の、空間について一般積分が求められる。

一般に、渦運動など流れを伴った運動の安定問題では、擾乱モードの固有値はcomplexであって、エネルギー原理の適用が困難であると云われている。Frieman & Rotenberg[1]及びRosenbluth & Simon[2]は外部電場による廻転プラズマでは不安定モードは振動しながら成長するために、安定である

ための必要充分条件が得られにくいと述べている。そして、この問題の本質は電磁場が存在しなくても、すなわち、気体の定常的な流れの場が存在することによって生じている。§4では、§3の一般積分を用いて、軸対称な流れ（簡単のため渦環を切って伸ばした極限）の場が軸対称の擾乱に対して安定であるための必要充分条件がエネルギー原理を使って導かれる。

§2. 閉じこめられた気体の場の性質

気体の運動方程式として次の式によって考察する。

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbb{V} = 0$$

(2) $$\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} - \mathbb{V}\times(\nabla\times\mathbb{V}) = -\nabla\left(P + \frac{v^2}{2}\right)$$

こゝで、$P=\int\frac{dp}{\rho}$ は単位質量当りのエンタルピーであり、密度 $\rho=\rho(p)$, p：圧力、従って流れは等エントロピー流とする。また、粘性が零の極限を考える。

今、気体が自己場によって空間の一定部分に閉じこめられた状態を考え、そのためには場がどう云う性質を持たねばならぬかを考察する。このような現象として、煙突やタバコの煙の環が挙げられる。

閉じこめられた気体は (1), (2) 式の時間微分を零とした式で記述される。その(2)式より $\mathbb{V}$ と $\nabla\times\mathbb{V}$ とは $\frac{v^2}{2}+P=const.$

の曲面上になければならぬ。気体を閉じこめるためには曲面上到る処で

(3) $\qquad |\mathbb{V}| \fallingdotseq 0, \infty \qquad |\nabla \times \mathbb{V}| \fallingdotseq 0, \infty \qquad \mathbb{V} \nparallel \nabla \times \mathbb{V}$

従って、$\frac{v^2}{2} + P = const.$ の曲面があるとすれば、その曲面は流線によって織りだされたベルヌーイ面でなければならぬ。この曲面上で流線に沿って、曲面要素の変位を考え、変位を次のように取る：

(4) $\qquad \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = dt$

(3)式より V_x, V_y, V_z が同時に零になることはないから、その変位には不動点がない。従って、$\frac{v^2}{2} + P = const.$ のベルヌーイ閉曲面には不動点がない。他方、不動点をもたない閉曲面は表裏のない場合 クラインのボツル、表裏のある時はトーラスしか存在しない。[3] 従って、気体を閉じこめることのできる閉曲面はトーラス状のベルヌーイ面だけである。

§3. ラグランジの渦保存方程式の一般積分

ラグランジの渦保存方程式は次のように書かれる。

(5) $\qquad \xi = \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0}\zeta_0\right)$

(6) $\qquad \eta = \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\xi_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0}\eta_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0}\zeta_0\right)$

(7) $\qquad \zeta = \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\xi_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0}\eta_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0}\zeta_0\right)$

こゝで $\xi = \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial z}$, $\eta = \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial x}$, $\zeta = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}$, そして ξ_0,

η_0, ζ_0 はその初期値である。

今、この方程式を空間変数について積分し、速度 $\dot{x}(\mathbf{x}_0,t)$, $\dot{y}(\mathbf{x}_0,t)$, $\dot{z}(\mathbf{x}_0,t)$ を初期値 $\mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}_0(\mathbf{x}_0)$ 及び $t=t$ における流体要素の位置 $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,t)$ で表わすことを考える。結果の一般積分は次のように表わされる。

(8)
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{i}\frac{A_{xi}}{J}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{0i}}+\dot{x}_{0i}-\frac{\partial\phi_0}{\partial x_{0i}}\right)+\mathbf{j}\frac{A_{yi}}{J}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{0i}}+\dot{x}_{0i}-\frac{\partial\phi_0}{\partial x_{0i}}\right)+\mathbf{k}\frac{A_{zi}}{J}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{0i}}+\dot{x}_{0i}-\frac{\partial\phi_0}{\partial x_{0i}}\right)$$

こゝで、$J=\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}\right)$, A_{ij} はその余因数。連続の式より

(9)
$$\rho J=\rho_0$$

の関係がある。$\phi=\phi(\mathbf{x}_0,t)$ は初期時刻に $\mathbf{x}_0$ にあって、$t=t$ 時刻に位置 $\mathbf{x}$ にある流体要素が持っている速度ポテンシャルであり、$\phi_0=\phi_0(\mathbf{x}_0)$ はその初期値である。他方、ベルヌーイの式は

(10)
$$\dot{\phi}-\frac{1}{2J^2}\left[\left\{A_{xi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{0i}}+\dot{x}_{0i}-\frac{\partial\phi_0}{\partial x_{0i}}\right)\right\}^2+\left\{A_{yi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{0i}}+\dot{x}_{0i}-\frac{\partial\phi_0}{\partial x_{0i}}\right)\right\}^2+\left\{A_{zi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{0i}}+\dot{x}_{0i}-\frac{\partial\phi_0}{\partial x_{0i}}\right)\right\}^2\right]+P=0$$

と表わすことができる。

ラグランジュ記述による運動方程式はよく知られているように

(11)
$$\ddot{x}_i+\frac{A_{ij}}{J}\frac{\partial P}{\partial x_{0j}}=0$$

であったから、時間について2階の運動方程式を1階の2つの方程式(8),(10)に帰着できたことになる。

§4. 軸対称流の安定条件

気体の流れが安定であるための必要充分条件をエネルギー保存則によって求める場合には、ラグランジ記述の方が直観的にわかり易い。ラグランジ密度を次のように取り、例えば(11)式をハミルトン形式に変換する。

(12) $$L=\frac{1}{2}\rho_0\dot{x}^2-\frac{p_0}{(\gamma-1)J^{\gamma-1}}$$

第1項は流体要素の運動エネルギ、第2項はポテンシャル・エネルギーに負符号を付けたものである。Lは変分原理

(13) $$\int_{t_0}^{t_1}dt\int_V dx_0\,\delta L=0$$

に従うとする。得られるラグランジ方程式は(11)式にほかならない。こゝで、理想気体の断熱則が成立するとした。

(14) $$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma})=0\quad:\quad pJ^{\gamma}=p_0$$

(15) 従って $$P=\frac{c\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=P_0J^{-\gamma+1},\quad P_0=\frac{c\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

一般化運動量並びにハミルトン密度はそれぞれ

(16) $$\pi_i(x_0,t)=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\rho_0\dot{x}_i$$

(17) $$H=\pi_i\dot{x}_i-L=\frac{\pi^2}{2\rho_0}+\frac{p_0}{(\gamma-1)J^{\gamma-1}}$$

ハミルトン運動方程式は

(18) $$\dot{x}=\frac{\delta\overline{H}}{\delta\pi}\qquad\dot{\pi}=-\frac{\delta\overline{H}}{\delta x}\qquad\overline{H}=\int dx_0 H$$

§2で述べたような閉じこめられた気体の渦環の安定条件を論ずることが目的であるが、こゝでは軸対称流と云う比較的簡単な場合を円柱座標により論ずることにする。気体の定

常運動は初期角速度 $\dot{\theta}_0=\dot{\theta}_0(r_0)$ 及び $r=r_0$, $\theta=\dot{\theta}_0 t+\theta_0$, $z=z_0$ の場合を考える。従って、

(19) $$\rho_0=\rho_0(r_0) \qquad \rho_0 r_0\dot{\theta}_0^2=\frac{dp_0}{dr_0} \qquad \frac{dp_0}{dz_0}=0$$

そして、一般の運動では(18)式によってこの定常運動からのズレが生じうる、すなわち、不安定が起りうる。φを定常運動からずれた流体要素の位置角度とすると

(20) $$\theta(r_0,\theta_0,z_0,t)=\varphi(r_0,\theta_0,z_0,t)+\dot{\theta}_0(r_0)t+\theta_0$$

従って、一般化運動量及びハミルトン密度はそれぞれ

(21) $$\pi_r=\rho_0\dot{r}, \qquad \pi_\varphi=\rho_0 r^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_0), \qquad \pi_z=\rho_0\dot{z}$$

(22) $$H=\frac{1}{2\rho_0}\left(\pi_r^2+\frac{1}{r^2}\pi_\varphi^2+\pi_z^2\right)-\pi_\varphi\dot{\theta}_0+\frac{p_0}{(\gamma-1)J^{\gamma-1}}$$

(23) $$=\frac{1}{2}\rho_0(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}\rho_0 r^2\dot{\theta}_0^2+\frac{p_0}{(\gamma-1)J^{\gamma-1}}$$

(24) $$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial r}{r_0\partial\theta_0} & \frac{\partial r}{\partial z_0} \\ r\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}+r\frac{\partial\dot{\theta}_0}{\partial r_0}t & \frac{r}{r_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_0}+1\right) & \frac{r\partial\varphi}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial r_0} & \frac{\partial z}{r_0\partial\theta_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}$$

(23)式では速度の一次の項が消えており、遠心ポテンシャルが付け加わっている。

更に、こゝではθ_0によらない軸対称の擾乱だけを考えて、変数を線型化する。

(25) $$r(r_0,z_0,t)=r_0+r_1(r_0,z_0,t), \quad \varphi(r_0,z_0,t)=\varphi_1(r_0,z_0,t)$$
$$z(r_0,z_0,t)=z_0+z_1(r_0,z_0,t)$$

また、(8)式を線型化すると、

(26) $$\dot{r}_1=-r_0^2\dot{\theta}_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_0}+\frac{\partial\phi_1}{\partial r_0}, \qquad r_0\dot{\varphi}_1=-2r_1\dot{\theta}_0, \qquad \dot{z}_1=-r_0^2\dot{\theta}_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_0}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z_0}$$

擾乱について1次のハミルトニヤンは定常運動の条件(19)式から零になる。擾乱について2次のハミルトニヤンは

(27) $$\overline{H}_2=\iiint r_0 dr_0 d\theta_0 dz_0\left[\frac{\rho_0}{2}(\dot{r}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{1}{r_0^3}\left(\frac{d}{dr_0}\frac{1}{2}\rho_0 r_0^4\dot{\theta}_0^2\right)r_1^2+2\left(\frac{d}{dr_0}\frac{p_0}{2}\right)r_1\left(\frac{r_1}{r_0}+\frac{\partial r_1}{\partial r_0}+\frac{\partial z_1}{\partial z_0}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{p_0}{2}\gamma\left(\frac{r_1}{r_0}+\frac{\partial r_1}{\partial r_0}+\frac{\partial z_1}{\partial z_0}\right)^2\right]+\int d\mathbf{S}\cdot\left[-\left(\nabla\cdot\left(\frac{p_0}{2}\mathbf{r}_1\right)\right)\mathbf{r}_1+\frac{p_0}{2}\left(\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_0}+z_1\frac{\partial}{\partial z_0}\right)\mathbf{r}_1\right)\right]$$

φ_1方向の運動エネルギーは擾乱によるポテンシャルとして計算されている。今、気体は無限に拡がって渦運動をしているとすると、表面積分からの寄与は零と見做しうる。r_1とz_1とは独立であったから、ポテンシャル・エネルギーの項はr_1と$\frac{r_1}{r_0}+\frac{\partial r_1}{\partial r_0}+\frac{\partial z_1}{\partial z_0}$との二次形式の積分になっており、これが正であるための必要充分条件は係数のマトリックスの*principal minor*が正である時に限る。

(28) $$|D|=\frac{1}{r_0^3}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{1}{2}\rho_0 r_0^4\dot{\theta}_0^2\right)\gamma\frac{p_0}{2}-\left(\frac{d}{dr_0}\frac{p_0}{2}\right)^2>0$$

従って、軸対称な気体の流れが軸対称な擾乱に対して安定であるための必要充分条件は次のようになる。

(29) $$\frac{d}{dr_0}\left(\rho_0 r_0^4\dot{\theta}_0^2\right)>\frac{\rho_0^2 r_0^5\dot{\theta}_0^4}{\gamma p_0}$$

非圧縮性流体では$\gamma\to\infty$であるから、上の条件(29)は*Rayleigh*の条件[4)]に移行する。

1) E. Frieman and M. Rotenberg, Rev. Mod. Phys. 32 (1960) 898.

2) M.N. Rosenbluth and A. Simon, Phys. Fluids 8 (1965) 1300.

3) P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie (1935) S. 532

4) C.C. Lin, The Theory of Hydrodynamic Stability (1955) p. 49～51