数理解析研究所講究録
102巻 1970年 149-157

Lippmann-Schwinger 方程式

京大理　池部晃生

§1. 序

LS (= Lippmann-Schwinger) 方程式は，Schrödinger 作用素の色々な性質，特に散乱状態（連続固有値に属する状態）の固有函数を調べるのに重要であるが，その形は

$$(1.1)\qquad \varphi(x) = e^{i\xi x} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} V(y)\varphi(y)dy$$

である．ここでは3次元空間 R^3 の場合を扱うが，方法は高次元の場合にも適用できるであろう．(1.1) において ξx は普通のスカラー積，κ は $\mathrm{Im}\,\kappa \geq 0$，$\kappa \neq 0$ なる範囲を動く parameter で，積分領域は特に断らない限り R^3 全体であるとする．"potential" $V(x)$ は実数値函数で，遠方で減少するものを考える．

$V(x) = O(|x|^{-2-h})$ $(h>0)$ の場合については，すでに [1] で議論したが，そこでは (1.1) の解 ($\kappa = |\xi|$) を固有函数として展開定理を証明し，それによって散乱問題を論じた．しかし最

近になって Kato [2] は抽象的方法 [3] の上に立って，$V(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ の場合にも満足すべき散乱理論が展開できることを示した．我々はここで LS 方程式を解くという立場からもこの場合を扱える可能性があることを示したい

LS 方程式 (1.1) を扱う方法は，本質的には [1] におけるのと変りはない，即ちある Banach 空間を設定して作用素

$$(1.2)\qquad (T_\kappa f)(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} V(y) f(y)\, dy$$

がその上で定義された compact 作用素であることを示す．そうすれば Riesz-Schauder の理論が適用できて (1.1) の可解性は (1.1) に対応する homogeneous equation

$$(1.3)\qquad f(x) = T_\kappa f(x)$$

の性質に帰着される．ここでの目的はこの段階までであって (1.3) の解の性質を論ずることはしない．

前述の Banach 空間としては次のようなものをとる：$R_1 > 0$ とし，$\mathbb{R}^3$ で連続な函数 $u(x)$ で，特に $|x| \geq R_1$ では球面上での函数として C^1 であって

$$(1.4)\qquad \|u\|_B = \sup_{0\leq r<\infty} (1+r)|u(r\omega)| + \sup_{r\geq R_1} (1+r) \sup_{\omega\in\Omega} |\nabla_\Omega u(r\omega)|$$

が有限なるものの全体 B を考える．ここに Ω は 2 次元球面

S^2 であって ∇_Ω は Ω に沿った grad を示す．$(x=r\omega)$．空間 B は norm $\| \ \|_B$ で Banach space になる．

次に $V(x)$ に対する仮定を述べよう．$V(x)=V_1(x)+V_2(x)$ と分解できて $V_1\in L_2(R^3)$ かつ support compact とする．V_2 はその support が $|x|\geqq R_0$ $(R_0>0)$ に含まれる十分滑かな函数であって

$$(1.5) \qquad D V_2(x) = O(|x|^{-1-h}) \quad (h>0)$$

とする．ただし D は関係する微分作用素（0階も含めて）を表わすものとする（滑かさは C^2 位で十分であろう）．

なお前に挙げた定数 R_1 は十分大きくとって

$$(1.6) \qquad 0<R_0\leqq R_1$$

が満されているものとする。

§2. Lippmann-Schwinger 作用素 T_K

主要な結果は次の定理である．

<u>定理</u> 2.1. LS 作用素 T_K は B 上で定義された compact linear operator である．

この定理の証明の詳細に立入ることはやめにして，[1]で述べられた評価がうまく行かない主要な点だけを指摘して，それに対する処理の仕方の概要だけを述べる．その点とは

$$(2.1)\qquad g(x) = \int \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} V(y) f(y)\,dy$$

あるいは $\nabla_\Omega g(r\omega)$ が，r を十分大として，$O(|x|^{-1})$ になるかということである．κ が non real の場合 ($\mathrm{Im}\,\kappa > 0$) には $g(x)$ は指数函数的に減少するであろうから大して問題にならない．問題は κ が real ($\neq 0$) のときである．またこの場合でも $V_1(y)$ による部分は $O(|x|^{-1})$ になることが[1]と全く同様にしてわかるから，(2.1)における V は V_2 と思ってよい．そこで x 方向を基準軸とする極座標を導入し

$$(2.2)\qquad \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{i\kappa\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos\theta}}\right) \times \frac{1}{i\kappa|x||y|} \times \frac{1}{\sin\theta}$$

に注意して，先ず球面積分について部分積分を行なう．そうすれば，V，f に対する仮定と併せて積分が収束し $\|f\|_B$ で押えられることがわかるであろう．しかも $|x|^{-1}$ なる factor が現れているから $g(x) = O(|x|^{-1})$ が得られる．$g(x)$ に ∇_Ω を作用させても，その形は(2.1)より"悪く"はならない．従って同様に議論できる．

以上に指摘した以外のことは[1]とほゞ同様に論ずること

ができて定理は証明される.

さて T_κ の compact 性がわかれば, Riesz-Schauder 理論の処方に従って, 方程式

(2.3) $$f = g + T_\kappa f$$

が任意の $f \in B$ に対して一意的に解けるのは, 同次方程式

(2.4) $$f = T_\kappa f$$

が trivial solution $f=0$ のみを有する時かつその時に限るということが云えるわけである.

しかしここで元々の LS 方程式に立ち戻って見ると, in-homogeneous term $e^{i\xi x}$ は, 明かに, B に属していない. 従って (1.1) のままでは, 上の結果をすぐに適用することはできない. その取扱いについて次節で述べる.

§3. 非斉次項の処理.

簡単のため (1.1) の非斉次項 $e^{i\xi x}$ を $p_0(x,\xi)$ と書くことにしよう. これに "formal" に T_κ を作用させて

(3.1) $$p_k(x,\kappa,\xi)=(T_\kappa{}^k\varphi_0)(x,\xi)$$

としよう．若しも $p_k(\cdot,\kappa,\xi)\in B$ であれば

(3.2) $$u=p_k(\cdot,\kappa,\xi)+T_\kappa u$$

という方程式は

(3.3) $$v=T_\kappa v\implies v=0$$

なる条件の下に一意的にとけて，(1.1) の解 φ は

(3.4) $$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{k-1}p_j(x,\kappa,\xi)+u(x)$$

の形に求まることになる．このとき，勿論，各 $p_j(x,\kappa,\xi)$ は（たとえBには属さないとしても）明確に意味づけされた函数でなければならない．

先ず $p_1(x,\kappa,\xi)$ を見よう．

(3.5) $$p_1(x,\kappa,\xi)=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}V(y)e^{i\xi y}dy.$$

これは絶対可積分ではない．そこで積分は

(3.6) $$\int=\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leq R}$$

の意味に解する．即ち improper integral であるが，ここでも

問題となるのは前§と同様，V_2 からの寄与である．V は V_2 のことと思うことにする．$p_1(x,\kappa,\xi)$ を単に $p_1(x)$ と書くことにして

$$(3.7)\qquad p_1(x) = -\frac{e^{i\xi x}}{4\pi}\int \frac{e^{i\kappa|y-x|}}{|y-x|} V(y)\, e^{i\xi(y-x)} dy = -\frac{e^{i\xi x}}{4\pi}\int \frac{e^{i\kappa|z|}}{|z|} V(x+z)\, e^{i\xi z} dz$$

と変形しておいて，最初に球面積分を実行することにしよう．結果は

$$(3.8)\qquad \int_\Omega V(x+z)\, e^{i\xi z} d\omega_z = \int_\Omega V(x+\rho\omega)\, e^{i|\xi|\rho\omega_\xi\cdot\omega} d\omega$$
$$= \frac{2\pi i}{|\xi|\rho} e^{-i|\xi|\rho} V(x-\rho\omega_\xi) - \frac{2\pi i}{|\xi|\rho} e^{i|\xi|\rho} V(x+\rho\omega_\xi)$$
$$- \frac{i}{|\xi|\rho}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{i|\xi|\rho\cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} V(x+\rho\omega)\, d\theta .$$

ただし ω_ξ は ξ 向きの単位 vector ($\in\Omega$) である．この計算のもっと精密なやり方は例えば [4] の appendix にある．更に ρ に関する積分を実行すれば

$$(3.9)\qquad p_1(x) = e^{i\xi x}\, O(|x|^{-h})$$

が得られる．ここで $e^{i\xi x}$ なる factor があることは重要である．これがあるために $p_2(x)$ を計算する際に上と同様な方法が可能になる．従って h を適当にとれば

$$(3.10) \qquad p_\ell(x, \kappa, \xi) = O(|x|^{-1})$$

となり，$\nabla_\Omega p_\ell$ の評価も同時に行なうことによって $p_\ell \in B$ が得られることになる．ここで $O(|x|^{-1})$ 以上に速く減少することは一般に期待できない（V が compact support の場合においてさえ）．更に色々細かい計算をすることによって次の結果が得られる．

<u>定理</u> 3.1．D_κ を $\mathrm{Im}\,\kappa \geq 0$，$\kappa \neq 0$ を満す κ の領域に含まれる compact domain，D_ξ を $R^3-\{0\}$ の compact domain とする．このとき $p_\ell(\cdot, \kappa, \xi)$ は適当な整数 ℓ に対して，$\kappa \in D_\kappa$，$\xi \in D_\xi$ に関して，B の元として，一様連続である．

以上で Riesz-Schauder 理論を応用して LS 方程式を解く準備ができたわけである．これ以上進むためには条件 (3.3) に対する解析が必要となる．結果としては，κ が real non-zero の場合には (3.3) が満たされることが期待される．これは Schrödinger 作用素の正固有値の非存在の問題と係って来るのであるが，ここではすべて割愛する．

References

[1] Ikebe, T. : Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960), pp. 1–34.

[2] Kato, T. : Some results on potential scattering. Proceedings Int. Conf. Functional Anal. Related Topics, Tokyo, 1969, pp. 206–215

[3] Kato, T. and S. T. Kuroda : Theory of simple scattering and eigenfunction expansions. Functional Analysis and Related Fields (F. E. Browder ed.), Springer (to appear)

[4] Matsumura, M. : Comportement des solutions de quelques problèmes mixte pour certains systèmes hyperboliques à coefficients constants. Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A 4 (1968), pp. 309–359.