数理解析研究所講究録
102巻 1970年 1-8

三体問題の固有値

京工繊大 内山 淳

原子核が無限大の質量を持つときの三粒子系に対する Schrödinger 作用素は次のような形をしている。

$$H = -\Delta_1 - \Delta_2 - \frac{Z_1}{r_1} - \frac{Z_2}{r_2} + \frac{Z_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} 。$$

ここで Z_1, Z_2, Z_3 は正の定数である。いま $Z_1 \geq Z_2$ と仮定すると，この essential spectrum は $\sigma_e(H) = [\mu_1, \infty)$ となる。但し

$$\mu_i = \inf_{\lambda \in \sigma(H_i)} \lambda = -\frac{Z_i^2}{4} \qquad (i = 1, 2)$$

$$H_i = -\Delta_i - \frac{Z_i}{r_i}$$

である。(Žislin [2])。そこで $(-\infty, \mu_1)$ の固有値について調べることにしよう。Kato [1] は $Z_1 = Z_2 = 2Z_3$ のとき，H は無限個の固有値があることを示した(ヘリウム原子)。また $Z_1 > Z_3$, $Z_2 > Z_3$ のときに Kato [1] と同じ結果が成り立つことが Žislin [2] 及び筆者 [3] によって示されている。そこでここでは $Z_3 > Z_2$ の場合を考えよう。

2

定理

$Z_3 > Z_2$ ならば, H は $\left(-\infty, -\frac{Z_1^2}{4}\right)$ に高々有限個の固有値しか持たない。

以後この定理の証明を順次述べることにしよう。さて我々の仮定のもとでは,

$$\frac{Z_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} - \frac{Z_2}{r_2} \ge \frac{Z_3}{r_1+r_2} - \frac{Z_2}{r_2} \ge \frac{1}{r_2}\left(\frac{Z_3}{1+k^{-1}} - Z_2\right)$$

が $r_1 \le k^{-1} r_2$ をみたす r_1, r_2 に対して成り立つことに注目しよう。ここで $k > 0$ として,

$$\frac{Z_3}{1+k^{-1}} > Z_2$$

となるように, 十分大きくとってくる。さらに $g(t)$ を次の性質を持つ函数とする。

$$g(t) \in C^\infty(0,\infty), \quad g(t) \begin{cases} \equiv 1 & \text{for } t > k+1 \\ \equiv 0 & \text{for } 0 < t < k \end{cases}$$

且 $0 \le g(t) \le 1$ for $0 < t < +\infty$。

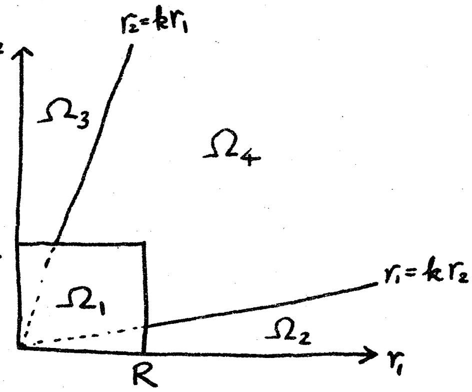
このとき, $R > 1$ を十分大きくとれば, 次の関係式をみたすようにすることができる。

i) $$-\frac{Z_i}{r_i} > \begin{cases} \frac{1}{3}(\mu_1-\mu_2) & (Z_1 > Z_2 \text{の場合}) \\ \frac{1}{2}\mu_1 & (Z_1 = Z_2 \;〃\;) \end{cases} \quad \text{for } r_i > \frac{R}{k+1} \quad (i=1,2),$$

ii) $t^4 g(t) g''(t) + \left(\frac{Z_3}{1+k^{-1}} - Z_2\right) R \geq 0$ for $k \leq t \leq t+1$

iii) $\frac{\mu_2-\mu_1}{3} - \frac{1}{R^2} \left| g(t) g''(t) t^4 \right| \geq 0$ （$Z_1 > Z_2$の場合） 〃 。

このようなRに対して，$\mathbb{R}^6$を次のような領域に分割しよう。



$\Omega_1 = \{ r_1 < R \text{ 且 } r_2 < R \}$, $\Omega_2 = \{ r_1 \geq R, r_2 \leq \frac{r_1}{k} R$

$\Omega_3 = \{ r_2 \geq R \text{ 且 } r_1 \leq \frac{r_2}{k} \}$, $\Omega_4 = R^6 - \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i$ 。

さらに，$\psi \in \mathfrak{D}(H) = \mathfrak{D}^2_{L^2}(R^6)$に対して

$$L[\psi] \equiv (H\psi, \psi)_{R^6} = \sum_{i=1}^{4} \Big\{ \|\nabla_1 \psi\|^2_{\Omega_i} + \|\nabla_2 \psi\|^2_{\Omega_i} - \left(\frac{Z_1}{r_1}\psi, \psi\right)_{\Omega_i} - \left(\frac{Z_2}{r_2}\psi, \psi\right)_{\Omega_i}$$

$$+ \left(\frac{Z_3}{|r_1 - r_2|}\psi, \psi\right)_{\Omega_i} \Big\} \equiv \sum_{i=1}^{4} L_i[\psi]$$

とおこう。このとき我々は以下の *Lemmas* を得る。

Lemma 1

$\forall \psi \in \mathfrak{D}(H)$, $L_3[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|^2_{\Omega_3}$,

Lemma 2

$\forall \psi \in \mathfrak{D}(H)$, $L_4[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|^2_{\Omega_4}$,

Lemma 3

$\forall \psi \in \mathfrak{D}(H)$, $L_2[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|^2_{\Omega_2}$

Lemma 4

適当な有限次元部分空間$\mathfrak{M} \subset L^2(R^6)$が存在して，

$$\forall \psi \in \mathfrak{D}(H) \cap \mathfrak{M}^{\perp} \qquad L_1[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|^2_{\Omega_1}.$$

これらの *Lemmas* を用いれば，定理の証明を得る。すなわち．

<u>定理の証明</u>

$E(\lambda)$ を H に属する単位分解とする。いま $(-\infty, \mu_1)$ に無限個の固有値があるとすれば $E(\mu_1-0)\,L^2(R^6)$ は無限次元になるから．

$$\exists \psi \in E(\mu_1-0)\,L^2(R^6) \cap \mathfrak{M}^{\perp} \qquad \psi \neq 0$$

である。この ψ は，$\psi \in E(\mu_1-0)\,L^2(R^6)$ であることより

$$L[\psi] < \mu_1 \|\psi\|^2_{R^6}$$

であるが，一方 $\psi \in \mathfrak{M}^{\perp}$ であることより，*Lemmas* 1～4 を用いれば

$$L[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|^2_{R^6}$$

を得る，よって矛盾である。　　　　　　　　　　　　　(証明了)

そこで以下においては，*Lemmas* 1～4 を証明しよう。

<u>*Lemma* 1 の証明</u>

Green の公式を用いることにより

$$\int_{\Omega_3} \left|\nabla_1\left(g\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\psi(x)\right)\right|^2 dx = \int_{\Omega_3} g\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 |\nabla_1\psi|^2 dx - \int_{\Omega_3} g\left(\frac{r_2}{r_1}\right) g''\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{r_2^2}{r_1^4}|\psi|^2 dx$$

を得る。

他方，μ_1 の定義により

$$\int_{R^3}|\nabla_1(g\psi)|^2 d\mathbf{r}_1-\int_{R^3}\frac{Z_1}{r_1}|g\psi|^2 d\mathbf{r}_1 \geq \mu_1\int_{R^3}|g\psi|^2 d\mathbf{r}_1$$

を得る。これを $\{\mathbf{r}_2;\ r_2\geq R\}$ で積分すると

$$\int_{\Omega_3}|\nabla_1(g\psi)|^2 dx-\int_{\Omega_3}\frac{Z_1}{r_1}|g\psi|^2 dx \geq \mu_1\int_{\Omega_3}|g\psi|^2 dx$$

となる。最初の式とこの式より

$$\int_{\Omega_3}\left\{g^2|\nabla_1\psi|^2-\frac{Z_1}{r_1}g^2|\psi|^2\right\}dx \geq \int_{\Omega_3}\left\{\mu_1 g^2+gg''\frac{r_2^2}{r_1^4}\right\}|\psi|^2 dx$$

を得る。よって

$$L_3[\psi]=\int_{\Omega_3}\left\{|\nabla_2\psi|^2+(1-g^2)|\nabla_1\psi|^2\right\}dx+\int_{\Omega_3}\left\{g^2|\nabla_1\psi|^2-\frac{Z_1}{r_1}g^2|\psi|^2\right\}dx$$

$$+\int_{\Omega_3}\left\{-\frac{Z_1}{r_1}(1-g^2)+\frac{Z_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}-\frac{Z_2}{r_2}\right\}|\psi|^2 dx$$

$$\geq\int_{\Omega_3}\left\{\mu_1 g^2+gg''\frac{r_2^2}{r_1^4}-\frac{Z_1}{r_1}(1-g^2)+\frac{Z_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}-\frac{Z_2}{r_2}\right\}|\psi|^2 dx$$

を得る。いま $\frac{r_2}{r_1}=t$ とおくと，k，$g(t)$，R の選び方により

$$(1-g(t)^2)\left(-\mu_1-\frac{Z_1}{r_1}\right)+\frac{1}{r_2^2}\left\{g(t)g''(t)t^4+r_2^2\left(\frac{Z_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}-\frac{Z_2}{r_2}\right)\right\}\geq 0$$

が，$t\geq k$，$r_2\geq R$ に対して成立することがわかるから，

$$L_3[\psi]\geq\mu_1\|\psi\|^2_{\Omega_3}\qquad \text{for } \forall\,\psi\in\mathfrak{D}(H)$$

を得る。

（証明 3）

6

Lemma 2の証明

Rの条件 i) 及び $\frac{\mu_1-\mu_2}{3} > \frac{\mu_1}{2}$ より

$$L_4[\psi] \ge \int_{\Omega_4} \left\{ -\frac{Z_1}{r_1} - \frac{Z_2}{r_2} \right\} |\psi|^2 dx \ge \mu_1 \|\psi\|^2_{\Omega_4}$$

を得る。

Lemma 3の証明.

$\mu_1 = \mu_2$ $(Z_1 = Z_2)$ のときには，Lemma 1と同様に示すことができるから，$\mu_1 < \mu_2$ (すなわち $Z_1 > Z_2$)と仮定する。μ_2の定義を用いることにより，Lemma 1の計算と同様にして，次の不等式を得ることができる。

$$L_2[\psi] \ge \int_{\Omega_2} \left\{ \mu_2\, g\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + g\left(\frac{r_1}{r_2}\right) g''\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \frac{r_1^2}{r_2^4} - \frac{Z_2}{r_2}\left(1 - g\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{Z_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Z_1}{r_1} \right\} |\psi|^2 dx.$$

ここで $\frac{r_1}{r_2} = t$ とおくと，Rの選び方から

$$(1 - g(t)^2)\left(-\mu_2 - \frac{Z_2}{r_2}\right) + (\mu_2 - \mu_1) + \frac{1}{r_1^2} g(t) g''(t) t^4 - \frac{Z_1}{r_1} + \frac{Z_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \ge 0$$

が $t \ge k$ 及び $r_1 \ge R$ で成り立つことがわかるから，

$$L_2[\psi] \ge \mu_1 \|\psi\|^2_{\Omega_2} \qquad \forall \psi \in \mathfrak{D}(H)$$

を得る。　　　　(証明　了)

<u>Lemma 4の証明</u>

簡単な計算により, $\exists K>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists C(\varepsilon)>0$

$$\left|\int_{\Omega_i}\frac{Z_i}{r_i}|\psi|^2dx\right|\leq K\left(\varepsilon\|\nabla\psi\|^2_{\Omega_1}+C(\varepsilon)\|\psi\|^2_{\Omega_1}\right)\quad(\psi\in\mathfrak{D}(H),\ i=1,2)$$

を示すことができる。よってこれより.

$$L_1[\psi]\geq(1-2K\varepsilon)\|\nabla\psi\|^2_{\Omega_1}-2KC(\varepsilon)\|\psi\|^2_{\Omega_1}\quad(\psi\in\mathfrak{D}(H))$$

を得る。いま $1>2K\varepsilon$ となるように $\varepsilon>0$ をとる。ところで $A=-\Delta$, $\mathfrak{D}(A)=\left\{f\in\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega_1),\ \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1}=0\right\}$ を考えると, $(2KC(\varepsilon)+\mu_1)(1-2K\varepsilon)^{-1}$ 以下のAの固有値は有限個である。その固有函数を $\{\varphi_n\}_{n=1,\cdots,p}\subset\mathfrak{D}(A)$ とし, $\tilde{\varphi}_n(x)=\varphi(x)$ $(x\in\Omega_1)$ $\tilde{\varphi}_n(x)=0$ $(x\notin\Omega_1)$ で張られる $L^2(R^6)$ の subspace を $\mathfrak{M}$ とすると, Aの固有値問題は, $\|\nabla\psi\|^2_{\Omega_1}$ の $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega_1)$ における変分法によって解ける (Courant-Hilbert) ことにより,

$$L_1[\psi]\geq\mu_1\|\psi\|^2_{\Omega_1}\qquad\forall\psi\in\mathfrak{D}(H)\cap\mathfrak{M}^\perp$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明 了)

$Z_1=Z_2=Z_3$ の場合には, $(-\infty,-\frac{Z_1^2}{4})$ における固有値の個数は有限であるかどうかは, わかっていないが, 少くとも1個は存在することはわかる。また $0<Z_2\leq Z_1\ll Z_3$ とすれば H は1個も固有値を, $(-\infty,-\frac{Z_3^2}{4})$ には持たないことがわかる。

References

[1]. Kato, T., On the existence of solutions of the helium wave equation, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 212-218.

[2] Žislin, G. M., A study of the spectrum of the Schrödinger operator for a system of several particles, Trudy Moskov. Math. Obšč. 9 (1960) 82-102 (Russian)

[3] Uchiyama J. On the discrete eigenvalues of the many particle system, Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A 2 (1966) 117-132.

[4] ———. Finiteness of the Number of Discrete Eigenvalues of the Schrödinger Operator for a Three Particle System, Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A. 5 (1969) 51-63

[5] ———. 同 II. to appear in Publ. RIMS.