数理解析研究所講究録
103巻 1970年 59-66

特殊G多様体上の不変ベクトル場

阪市大 理　松永弘道

§1、序

n次元のコンパクトリー群はn個のG不変なベクトル場をもつ。この事実から一般にG多様体上に不変なベクトル場であって特異点のないもののうち一次独立なものが何個存在するかという問題が生じてくる。筆者は現在迄にこの問題を解決するための一般的方法，特に位相幾何学的方法を得るに至っていないが，いくつかの例，特にBrieskorn-Hirzebruchの$O(n)$多様体についてこの問題を考えてみた。§2においては後で用いる4つの基本事項と簡単な例をとりあつかい，§3では$W^{2n-1}(d)$上には$O(n)$不変な1-ベクトル場しかなく，不変な2-ベクトル場は存在しないことを示す。

§2、基本性質と例

Gをコンパクトリー群，Mをコンパクトな G多様体とする

定義　M上のベクトル場XがG不変であるとはMのすべての点pとGのすべての元gに対して

$$(dg)_p X_p = X_{gp}$$

がなりたつことをいう。

基本性質1、G多様体Mが特異点のないG不変なベクトル場をもつための必要十分条件はM上にG不変なリーマン計量をえらんだとき，Mの接ベクトルバンドルが1次元不変積ベクトルバンドルを直和成分としてもつことである。

証明はG作用のない通常の場合と同様にできる．

基本性質2、Xをリーマン多様体M上の完備ベクトル場とする。このときXがキリングベクトル場であるための必要十分条件はすべての実数tに対して $Exp\, tX$ がMの等距離変換であることである。「多様体入門」(松島)

基本性質3．$\{\varphi_t ; t \in R\}$ をG多様体Mの1-パラメーター変換群とする。このとき $g \cdot \varphi_t = \varphi_t \cdot g$ がすべての $g \in G$, $t \in R$ に対してなりたつならば $\{\varphi_t , t \in R\}$ から得られるベクトル場はG不変である。(証明はほとんど自明)

基本性質4、1-パラメーター変換群 $\{\varphi_t ; t \in R\}$ に対して

適当な正数rがあってtの絶対値$|t|<r$のときφ_tが自由に作用するならば$\{\varphi_t ; t\in R\}$から得られるベクトル場Xは特異点をもたない。（証明はほとんど自明）

次にいくつかの簡単な例についてみる。

Gの次元をnとする。Mを可微分多様体とするとき，M上の可微分なG主バンドルの全空間Pはn個の一次独立な不変ベクトル場をもつことは見易い。

例1、$(n+2)$次元複素空間C^{n+2}の点$(z_1,\cdots,z_{n+2})$であって方程式$z_1^p+z_2^q+z_3^2+\cdots+z_{n+2}^2=0$；$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_{n+2}|^2=1$をみたす点の全体は$(2n+1)$次元可微分多様体をなす。これを$K_{p,q}^{2n+1}$で表わすことにする。

n次直交群$O(n)$は包含関係$O(n)\approx I_2\times O(n)\subset I_2\times U(n)\subset U(n+2)$を通じて$K_{p,q}^{2n+1}$に作用する。

$S^1\approx U(1)$の元λに対して

$$\lambda(z_1,\cdots,z_{n+2}) = (\lambda^{2q}z_1,\lambda^{2p}z_2,\lambda^{pq}z_3,\cdots,\lambda^{pq}z_{n+2})$$

と定めるとS^1は$K_{p,q}^{2n+1}$の1-パラメーター変換群となり性質3，4により特異点のない$O(n)$不変ベクトル場を定める。ρ_nを$O(n)$の恒等表現とすると$K_{p,q}^{2n+1}$の接ベクトルバンドルの固定点全体のなす多様体S^1上への制限は次の様になる。

$$T(K_{p,q}^{2n+1})\,|\,S^1 = \theta^1 \oplus 2(\rho_{n-1}),$$

こゝに θ^1 は S^1 上の積 G ベクトルバンドル，(ρ_n) は $S^1\times\rho_n$ である。従って $K_{p,q}^{2n+1}$ は $O(n)$ 不変な 2-ベクトル場をもたない。

例 2．$(n+1)$ 次元複素空間 C^{n+1} の点 $(z_0, z_1, \cdots, z_n)$ であって方程式 $z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$，$|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 2$ をみたす点の全体は $(2n-1)$ 次元可微分多様体をなす。これは Brieskorn - Hirzebruch によって研究された多様体であるが $O(n)$ は包含関係 $O(n) \approx I_1 \times O(n) \subset I_1 \times U(n) \subset U(n+1)$ によってこの多様体 $W^{2n-1}(d)$ に作用する。

S^1 の元 $\mathrm{Exp}\,2\pi i t$ に対して

$$(\mathrm{Exp}\,2\pi i t)(z_0, z_1, \cdots, z_n)$$
$$= ((\mathrm{Exp}\,2\pi i t)z_0, (\mathrm{Exp}\,d\pi i t)z_1, \cdots, (\mathrm{Exp}\,d\pi i t)z_n)$$

と定めると S^1 は $W^{2n-1}(d)$ の 1-パラメーター変換群となり例 1 と同様にして，$W^{2n-1}(d)$ 上に $O(n)\times S^1$ 不変なリーマン計量をえらぶとき特異点のない $O(n)$ 不変なキリングベクトル場が存在することが示される。

§ 3．$W^{2n-1}(d)$ 上に不変 2-ベクトル場が存在しないこと

くわしくは論文に出る予定であるので概要をのべることにする。

Mを特殊G多様体[1],[2]であって次の条件をみたすものとする。

(条件) Mは(H)を主軌道型，(K)を特異軌道型とする２つの軌道型$((H),(K))$をもち，H,Kの正規化群が次の様に分解される：$N(H)=\Gamma(H)\times H$, $N(K)=\Gamma(K)\times K$, $\Gamma(K)\subset\Gamma(H)$。

Mからその軌道空間への標準写像を$\pi: M\longrightarrow\pi(M)$で表わす。このとき次の２つのファイバーバンドルが得られる。

(1) $\mathcal{F}_{(H)}: G/H \longrightarrow M_{(H)} \longrightarrow \pi(M_{(H)})$,

(2) $\mathcal{F}_{(K)}: G/K \longrightarrow M_{(K)} \longrightarrow \pi(M_{(K)})$,

ここに $M_{(K)}=\{x\in M;\ G_x$ が Kと共役$\}$，$M_{(H)}$も同様なものである。

Mの接ベクトルバンドルをそれぞれ$M_{(H)}$, $M_{(K)}$に制限するとその構造は見易くなることに注意する。

うめこみ $M_{(K)}\subset M$ による$M_{(K)}$の同変管状近傍をNとする。

$M-\mathrm{Int}\,N=M_1$, $\pi(M_1)=M_1'$, $\pi(M_{(K)})=M_{(K)}'$とおき$\mathrm{Vect}_K(M_{(K)}')$を$M_{(K)}'$上の$K$-ベクトルバンドルからなる族，$\mathrm{Vect}_H(M_1')$も同様のものとする。このとき次の様なオブジェクトを考える。

$$\mathcal{D}=\{(F',E')\in \mathrm{Vect}_K(M_{(K)}')\times\mathrm{Vect}_H(M_1');$$
$$\alpha_H: p'^*\gamma^*F'\longrightarrow\partial E_1'\ \},$$

こゝに γ^* は包含 $H\subset K$ から得られるベクトルバンドルの準同型すなわち制限準同型である。$p' : \pi(\partial N) \xrightarrow{\approx} \pi(M(K))$ は射影 $p : \partial N \to M(K)$ から得られるもので微分同相である。このとき D の2つの元 (F', E_1', α_H) と $(\bar{F}', \bar{E}_1', \bar{\alpha}_H)$ とが同値であることを次の様な可換図式が存在することであると定める。

$$\begin{array}{ccccccc}
F' & \longrightarrow & p'^*\gamma^* F' & \longrightarrow & \partial E_1' & \subset & E_1' \\
\downarrow \rho_K & & \downarrow \rho_{H,K} & & \downarrow \partial\varphi_H & & \downarrow \varphi_H \\
\bar{F}' & \longrightarrow & p'^*\gamma^* \bar{F}' & \longrightarrow & \partial \bar{E}_1' & \subset & \bar{E}_1'
\end{array}$$

こゝに ρ_K は K ベクトルバンドルの同型写像，$\rho_{H,K}$ はその H ベクトルバンドルとみる制限，φ_H は H ベクトルバンドルの同型である。$\mathrm{Vect}_G(M)$ を M 上の G ベクトルバンドルの同値類のなす半群とすると次の半群としての同型が得られる。

定理 [2]　$\mathrm{Vect}_G(M) \overset{\pi_*}{\underset{\approx}{\longrightarrow}} D/(\sim)$

D の各元をデータと呼ぶことにすると，M 上の接ベクトルバンドルのデータは

$$\{T(\pi(M(K)))\oplus(l_K)\oplus\pi_*\nu,\ T(\pi(M(H),1))\oplus(l_H);\alpha_H\}$$

の形になる。こゝに (l_K) は K の等方性表現による $\pi(M(K))$ 上の積バンドルで，(l_H) も同様，ν はうめこみ $M(K)\subset M$

の法ベクトルバンドルである。

Mが$W^{2n-1}(d)$の場合はこのデータは次の様になる。

$\{\theta^1 \oplus 2(\rho_{n-1}),\ 3\theta^1 \oplus 2(\rho_{n-2});\ \alpha_{O(n-2)}\}$。

従ってMの接ベクトルバンドルは$O(n)$不変なリーマン計量に関して積バンドル$M(k)' \times R^1$の2倍を直和成分としてもち得ない。この様にして次の定理が得られる。

定理[2]　$O(n)$多様体$W^{2n-1}(d)$上には$O(n)$-不変な1-ベクトル場が存在するが，2-ベクトル場は存在しない。

引用文献

[1] Hirzebruch - Mayer : O(n) - Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten, 57, Springer Verlag 1968.

[2] H. Matsunaga : KG - groups and invariant vector fields on special G-manifolds, to appear

追記

上の定理[2]において$n \geqq 3$とする。$n = d = 2$の場合には阪大の内田氏が反例を示して下さった。$n = 2$の場合は$O(0)$

は意味がなく，本文中の証明は適用できない。