数理解析研究所講究録
103巻 1970年 45-58

G-多様体の K_G^* 群の計算方法について

京大 理　松本堯生

§0. 序

コンパクト・リー群 G を1つ固定する。G-多様体とは C^∞-多様体であって，C^∞な G の作用を1つ固定したものをいう。ここでは G の閉部分群を全て H で表わすことにし，例えば点 x での固定群 $\{g \in G;\ gx = x\}$ を H_x と書くことにする。

以下 §1，§2 で G-多様体は'よい' G-CW複体構造をもつことを示し，そのフィルター付けから作られる Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列の E_2-項の計算の仕方を示す。§4 では §3 での G-ホモトピーの元を消す方法を用いてもう1つのスペクトル系列を作り，それが G-CW複体上では E_2-項以上は Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列と一致することを示す。§5 では以上の応用として G-多様体の軌跡空間の次元が4次元以下ならば，E_2-項＝

E_∞-項であり，従って K_G^* 群が群として拡大の仕方を除いて定まることを示す。 §6では Hirzebruch-Mayer の $O(n)$-多様体，Jänich の結び系 $O(n)$-多様体について計算例を示す。

§1. G-多様体の G-CW分割.

G-多様体の軌跡空間は C.T. Yang の定理により単体分割をもつ，しかもそれは軌跡空間を軌跡型によって分割しその各々を単体分割したものをつなぎ合わせて構成するのごとくに任意の単体の内部は同一の軌跡型に属しているとしてよい。この単体分割を単体毎に切片をとって G-多様体上に引き上げてやろうというのであるが，そのとき各単体の切片による像の内部（正確には単体の内部の切片による像）では軌跡型だけでなく固定群そのものが同一であるようにしたいのである。ところが実際に一度重心細分をとるとその各単体上には上の条件を満たす切片がとれることが次の Palais の補題を用いることにより証明される。証明は比較的長いので拙論文[5]にゆずる。

補題（Palais） 局所コンパクト，ハウスドルフ，第2可算な G-空間 X の軌跡空間が，ある G-空間の軌跡空間を Z とするとき Z × I に各点の軌跡型も込めて位相同型であるならば

実は
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "G\text{-homeo.}", "\cong"'] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y\times I \arrow[dl] \\
& Z\times I &
\end{tikzcd}
$$
なる G-空間 Y が存在する。

上で得た切片の像を胞体と思うことにより G-多様体は次の意味で G−CW複体となっている。

定義 X をハウスドルフ G−空間, K を(開)胞体の集まり $\{e_\lambda \subset X \,;\, \lambda \in \Lambda\}$ とする。(X, K) が次の条件 (a)−(f) と (G−C), (G−W) を満たすとき G−CW複体という。

(a) $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \qquad (e_\lambda \cap e_{\lambda'} = \phi \text{ for } \lambda \neq \lambda')$

(b) 各胞体は連続な特性写像 $\sigma_\lambda : \Delta_\lambda^n \longrightarrow \overline{e_\lambda} \subset X$ をもち,

　(b1) $\sigma_\lambda \mid (\Delta_\lambda - \partial\Delta_\lambda)$ は e_λ の上への位相同型

　(b2) $\sigma_\lambda(\partial\Delta_\lambda^n) \subset X^{n-1} = \bigcup_{\dim e_\lambda \leqq n-1} e_\lambda$

(c) X/G がハウスドルフ空間

(d) $e \in K \Rightarrow ge \in K$ for $\forall g \in G$

(e) e の各点の固定群は同一, それを H_e と記す,

(f) $g \notin H_e \Rightarrow ge \cap e = \phi$

(G−C) (a)−(f) から X/G にも胞複体の構造を与えるが, それが閉包有限

(G−W) X は閉被覆 $\{G\bar{e} = \overline{Ge} \,;\, e \in K\}$ に関して弱位相をもつ

§2. Atiyah-Hirzebruchのスペクトル系列

Xを G-CW複体とすると，そのフィルター付け

$$X = X^{\infty} \supset \cdots \supset X^{n} \supset X^{n-1} \supset \cdots \supset X^{1} \supset X^{0} \supset X^{-1} = \phi$$

から，$H(p,q) = \sum_{n} K_G^{n}(X^{q-1}, X^{p-1})$ とおくことにより

$$E_{\infty}^{p,q} = G_p K_G^{p+q}(X) = K_{G,p}^{p+q}(X) / K_{G,p+1}^{p+q}(X)$$

$$K_{G,p}^{n}(X) = \mathrm{Ker}\,(K_G^{n}(X) \longrightarrow K_G^{n}(X^{p-1}))$$

なるスペクトル系列を得る。(cf. Cartan-Eilenberg [2] p.334)

その E_1-項は $E_1^{p,q} = K_G^{p+q}(X^p, X^{p-1})$ であるから G-CW複体の G-ホモトピー拡張性質から $E_1^{p,q} \cong \sum_{\substack{e \in K/G \\ \dim e = p}} K_G^{q}(G/H_e)$ となる。但しここで $e \in K/G$ とは胞体の G-軌跡の中から1つずつ代表元となるべき胞体をとることを示す。

さて1次微分 d_1 であるが，一般の G-CW複体では面倒なので以下 X を軌跡空間に単体分割を誘導するような G-CW複体とする。このとき軌跡空間の各胞体の特性写像は位相同型なので X の G-CW複体構造は軌跡空間の単体分割を§1のように像の内部では同一の固定群をもつような切片(これを'よい'切片と呼ぼう)によって持ち上げたものと考えられる。更にXが局所コンパクト・ハウスドルフ，才2可算であると仮定すると，単体上の'よい'切片としてその単体の内部の像で同一の固定群をもつばかりでなく境界上

の各単体の上に制限してもその単体の内部の像では固定群が同一であるようなものがとれる。このように G－CW複体構造をとり変えると幾何的境界作用素が d_1 と一致する。よって'よい'切片のとり方によって上の同型がどのように変るかを調べれば d_1 を幾何的に定めることができる。実際同一の単体上で2つの'よい'切片の像の内部が空でない交わりをもてば全く同じ同型を与えることが容易に証明されるので、$E_1^{p,q}$ の元を上の同型で p－胞体 e に $K_G^q(G/H_e)$ の元を対応させる G－同変な函数 φ （$K_G^q(g)\varphi(e)=\varphi(ge)$, $g: G/gHg^{-1} \ni aHg^{-1} \longmapsto aH \in G/H$）と同一視すると、（e の境界の G－CW複体構造を上のようにとり直したと考えて）

$$(d_1\varphi)(e) = \sum_{\substack{\sigma\in K/G \\ \dim\sigma = n-1 \\ \sigma < \partial e}} \sum_{g\in G/H_e} [e, g\sigma]\, K_G^q(\pi) K_G^q(g)\, \varphi(\sigma)$$

$\pi: G/H_e \longrightarrow G/H_{g\sigma}$, と書ける。この意味で E_2－項を各胞体毎に異なる係数群 $K_G^q(G/H_e)$ をもつ G－同変な鎖の d_1 によるコホモロジー群と考えることができる。これを $E_2^{p,q} = H_G^p(X, K_G^q)$ と書いて表わすことにする。　（注）上の $(d_1\varphi)(e)$ における和は有限和であることが証明でき意味をもつ。

§3. G-ホモトピーを消すこと

XをG-空間とする。HをGの部分群とするとき，Hで止まっている部分空間$X^H=\{x\in X;\ hx=x \text{ for } {}^\forall h\in H\}$の$n$次元ホモトピー群$\pi_n(X^H)$の元$a$が「原始的でない」とは$H$を真部分群として含む$G$の部分群$H'$と$\pi_n(X^{H'})$の元$a'$が存在して$i_*a'=a$となることであると定義する。ここで$i: X^{H'}\hookrightarrow X^H$である。又，このような元$a'$が存在しないとき$a$を原始的であると定義する。

$a\in\pi_n(X^H)$が原始的であれば，$\overbrace{gag^{-1}}^{\text{それと共役な元}}\in\pi_n(X^{gHg^{-1}})$も原始的であるから次のような集合$\Lambda$を考えることができる。

$$\Lambda = \bigcup_H \left(\pi_n(X^H)\text{の原始的な元}\right)\Big/\sim$$

但し，$\pi_n(X^H)\ni a \sim gag^{-1}\in\pi_n(X^{gHg^{-1}})$

aを$\pi_n(X^H)$の原始的な元とする。その1つの代表元を$\sigma:\partial\Delta^{n+1}\longrightarrow X^H$とすれば，$G$-同変化して$G$-同変な特性写像$G\sigma: G/H\times\partial\Delta^{n+1}\longrightarrow X$を得る。これにより$H_\sigma=H$なるように$G$-胞体をくっつける。この操作により$a$と共役な元全てを同時に消したことになる。この操作をΛの全ての元に対して行い，できあがったG-空間を$\tilde{X}$とおく。aを消すことは同時にi_*aという形のG-ホモトピーの元全てを同時に消すことにも

なっているので、Λ の全ての元を消すことは G−ホモトピーの元全てを消すことになっている。つまり $X \hookrightarrow \hat{X}$ の誘導写像 $\pi_n(X^H) \longrightarrow \pi_n(\hat{X}^H)$ は任意の部分群 H に対し零化写像である。

一方 $(\hat{X}, X)$ が $(n+1)$ 次元の G−胞体ばかりからなる相対 G−CW 複体であることに注意すれば

$$\pi_k(\hat{X}^H, X^H) = 0 \quad \text{for } k \leq n, \ {}^\forall H < G$$

を得る。（これは初等的にも証明できるが、G−胞体近似定理 [6] を $G/H \times S^k \longrightarrow \hat{X}/X$ に適用すれば明らか）

従ってホモトピー群の完全系列から任意の部分群 H に対し

$$\pi_k(X^H) \longrightarrow \pi_k(\hat{X}^H) = \begin{cases} \text{iso.} & \text{for } k < n \\ \text{onto} & \text{for } k = n \end{cases}$$

上の結果と合わせると、

$$\pi_k(\hat{X}^H) \cong \begin{cases} \pi_k(X^H) & \text{for } k < n \\ 0 & \text{for } k = n \end{cases}$$

を得る。これにより $\hat{X}$ を X の n 次元 G−ホモトピー群を消して得た G−空間であるということができる。

X の $(p+1)$ 次元以上の G−ホモトピー群を次々と消した G−空間を $X(0, p)$ とかく。G−空間の圏でも写像トラックを作ることにより Hurwicz の fibering ができる。$X(0, q) \longrightarrow X(0, p-1)$ $(p \leq q)$ の写像トラックを

$X(p,q)$ とおくと，X が G－不変な基点をもつと仮定すれば 道の空間をとることにより G－空間の完全系列

$$\cdots \to \Omega X(r,t) \to \Omega X(r,s) \xrightarrow{\delta} X(s+1,t) \to X(r,t) \to X(r,s)$$

但し $r \leqq s < t$，を得る。とくにこれから

$$\pi_k(X(p,q)^H) \cong \begin{cases} \pi_k(X^H) & \text{for } p \leqq k \leqq q \\ 0 & \text{上以外} \end{cases}$$

は直ちに従う。

§ 4. もう1つのスペクトル系列

[5] により $K_G(X) = [X, \mathcal{F}]_G$（$[\cdot,\cdot]_G$ は G－写像の G－ホモトピー類のなす集合を表わす）と K_G 群を表現する G－空間 $\mathcal{F}$ が存在するから，Ω－スペクトラム $\mathbb{Y} = \{ Y_q, h_q : Y_q \xrightarrow{\simeq_G} \Omega Y_{q+1} \}$ を

$$Y_q = \begin{cases} (\mathcal{F}, 1) \\ \Omega(\mathcal{F}, 1) \end{cases} \quad h_q = \begin{cases} \mathcal{F} \xrightarrow{\simeq_G} \Omega^2 \mathcal{F} & \text{Bott 周期写像} \quad q \text{ 偶数} \\ \Omega\mathcal{F} \xrightarrow{=} \Omega\mathcal{F} & \text{恒等写像} \quad q \text{ 奇数} \end{cases}$$

で与えると，$\overline{H}(p,q) = \sum_n [X, Y_n(p+1, q-1)]_G$ とおくことにより，$\overline{E}_\infty^{p,q} = {}_pG\,K_G^{p+q}(X) = {}_pK_G^{p+q}(X) / {}_{p+1}K_G^{p+q}(X)$，${}_pK_G^n(X) = \mathrm{Ker}(K_G^n(X) \to [X, Y_n(0,p-1)]_G)$ なるスペクトル系列を得る。

Maunder [7] のように exact couple による構成に書き直し

てやると 同型 $\phi_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow \overline{E}_r^{p,q}$ $(r \geqq 2)$ の存在が証明される。 E_2-項の同型が直接次の可換図で証明されることに注意すれば他は [7] の方法と全く同様である。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& K_G^{p+q-1}(X^{p-1}) \arrow[dr, "\delta"] & & K_G^{p+q}(X^{p+1}) \arrow[dr, "\delta"] & \\
K_G^{p+q-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\partial"] & & K_G^{p+q}(X^{p}, X^{p-1}) \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, equal] & & K_G^{p+q+1}(X^{p+1}, X^{p}) \\
& & {[X^p/X^{p-1}, Y_{p+q}(p)]_G} \arrow[d, "j", "\text{onto}"'] \arrow[urr, "\text{exact}"] & & \\
{[X^{p-1}, Y_{p+q-1}(p-1)]_G} \arrow[urr, "\partial"] \arrow[rr, "\partial"] & & {[X^p, Y_{p+q}(p)]_G} & & \\
& & {[X^{p+1}, Y_{p+q}(p)]_G} \arrow[u, "\text{inj.}"'] \arrow[d, equal] & & \\
& & {[X, Y_{p+q}(p)]_G} & &
\end{tikzcd}
$$

(但し $Y_{p+q}(p) = Y_{p+q}(p,p)$)

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ker}\, \delta \circ h / \mathrm{Im}\, \delta \circ h \xrightarrow[\text{iso.}]{j} [X, Y_{p+q}(p)]_G = \overline{E}_2^{p,q}$$

又、スペクトル系列 $\overline{E}_r$ での微分 $\overline{d}_r : \overline{E}_r^{p,q} \to \overline{E}_r^{p+r, q-r+1}$ is $\delta = \delta \circ h_{p+q} : Y_{p+q}(p, p+r-2) \xrightarrow{h_{p+q}} \Omega Y_{p+q+1}(p+1, p+r-1) \xrightarrow{\delta} Y_{p+q+1}(p+r, p+r)$ の G-ホモトピー類 $[\delta] \in [Y_{p+q}(p, p+r-2), Y_{p+q+1}(p+r, p+r)]_G$ の与える'コホモロジー作用素'から誘導されることも分る。

§5. まとめ

§2 で G-多様体 X の §1 で与えた G-CW 複体構造に対し Atiyah-Hirzebruch のスペクトル系列の E_2-項が $E_2^{p,q} = H_G^p(X, K_G^q)$ と表わせることを示したが、$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, $K_G^q(G/H) = 0$ for q odd

に注意すると偶数次の微分は零化写像であることが分る。

とくに $\dim X/G \leq 2$ と仮定すると $H_G^p(X; K_G^q) = 0$ for $p \geq 3$ であるから $d_r = 0\ (r \geq 3)$，上と合わせると全ての微分が零化写像で $E_2 = E_\infty$。

更に§4を応用すると次の定理が導かれる。

定理 $\dim X/G \leq 4$ ならば $d_r = 0\ (r \geq 2)$

実際 d_3 だけを調べればよいのであるが，§4の結果と Y_q が奇数次又は偶数次にのみ G-ホモトピー群をもつことから

$$d_3 = \bar{d}_3 = [\delta] \in [Y_{p+q}(p,p+1), Y_{p+q+1}(p+3)]_G$$

q は偶数としてよいから $Y_{p+q}(p,p+1) = Y_{p+q}(p)$ であり，

$$H_G^p(X; K_G^q) = [X, Y_{p+q}(p)]_G = [X, Y_{p+q}(p,p+1)]_G$$

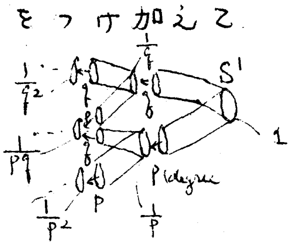
の元を $[f]$，$f: X \to Y_{p+q}(p,p+1)$，とすれば

$$d_3[f] = [\delta\circ f] \in H_G^{p+3}(X; K_G^{q-2}) = [X, Y_{p+q+1}(p+3)]_G$$

である。$\varphi = \delta\circ f$ とおき，$\varphi_*^H: \pi_n(X^H) \to \pi_n(Y_{p+q+1}(p+3)^H)$ を考える。$Y_{p+q+1}(p+3)^H = Y^H_{p+q+1}(p+3)$ と Y^H が $K(\cdot)\otimes K_G(G/H)$ の表現スペクトラムであることに注意すると，$\varphi^H = \delta^H\circ f^H$ は $f^H: X^H \to Y_{p+q}(p,p+1)^H = Y^H_{p+q}(p,p+1)$ に $K(\cdot)\otimes K_G(G/H)$ の Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の d_3 をほどこしたものである。ここでは $d_3 = Sq^3 \otimes id_{K_G(G/H)}$ であることから，$p = 0, 1, 2$ のとき $\varphi^H \simeq 0$ 従って $\varphi_*^H = 0$ を得る。これが全ての閉部分群 H と全ての n に対して成り立ち，X が

G−CW複体であることにより $\varphi \underset{G}{\simeq} 0$ 従って $[\varphi]=0 \in H_G^{p+3}(X, K_G^{q-2})$ for $p=0,1,2$ を得る。つまり d_3 は H_G^0, H_G^1, H_G^2 上 零化写像; 従って定理の条件の下には $d_3=0$。 q.e.d.

(注.) M_Q を S^1 を 1 と見て $\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \cdots, \frac{1}{pq} \cdots$ をつけ加えてつくった $\pi_1(M_Q) \cong Q$ なる空間とする。

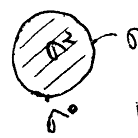


すると $K_G^*(X)\otimes Q = [X, Y^* \wedge M_Q]$ となり上と同様の議論から Y の G−同変な意味での tor−不変量は全て零である。従って $Y \to Y\wedge M_Q$ は G−同変な Chern 指標 $K_G(X) \xrightarrow{ch_G} H_G^*(X; K_G^*\otimes Q)$ を定める。

§6. 計算例

(1) Hirzebruch−Mayer の $O(n)$−多様体 $W^{2n-1}(d)$ [3] あに具体的に G−CW分割を与えて計算する方法を示したから、ここでは軌跡空間の単体分割を用いて容易に計算する方法を示そう。$W^{2n-1}(d)$ の軌跡空間は2次元円板 D^2 であるが $SO(n)$ による軌跡空間は境界をはり合した球面 S^2 になっている。このようなとき境界作用素では変なことが起らないので軌跡空間とその軌跡型のみから $K_G^*(W^{2n-1}(d))$ が

計算できる。しかも細かく単体分割したとしてもコホモロジーの計算が楽なようにまとめ直すと



$H_\sigma = O(n-2)$

$H_{\sigma^0} = H_{\sigma^1} = O(n-1)$

としてよい。

従って

$$\begin{array}{lll} C^0_G = R(O(n-1)) & & H^0_G \cong R(O(n-1)) \\ \quad\quad \downarrow 0 & & \\ C^1_G = R(O(n-1)) & & H^1_G \cong \mathrm{Ker}(R(O(n-1)) \to R(O(n-2))) \\ \quad\quad \downarrow & & \\ C^2_G = R(O(n-2)) & & H^2_G \cong \mathrm{Coker}(R(O(n-1)) \to R(O(n-2))) = 0 \end{array}$$

($R(O(n-1)) \longrightarrow R(O(n-2))$ が onto であることは $R(SO(k))$ の積構造と $O(k)$ の既約表現がよく分っている事から $R(O(k))$ の構造を明らさまに書き上げるとすぐでる。方法は違うが角氏の講演を参照されたい)

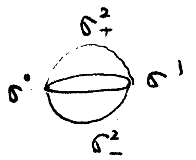
よって $K^0_{O(n)}(W^{2n-1}(d)) \cong R(O(n-1))$,

$K^1_{O(n)}(W^{2n-1}(d)) \cong \mathrm{Ker}(R(O(n-1)) \to R(O(n-2)))$

但し $R(G)$ は G の複素表現のつくる Grothendieck 群を示す。

(2) Jänich の結び系 $O(n)$-多様体 [4]

$S^1 \subset S^3$ の結び系と $D^4 \supset S^3 = \partial D^4 \supset S^1$ の差の各々が $O(n-3)$, $(O(n-2))$, $(O(n-1))$ の軌跡型をもつような軌跡空間をもつ $O(n)$-多様体が 1:1 に対応する。この $O(n)$-多様体の $K_{O(n)}$ 群は結び系 S^1 を部分複体とするような S^3 の CW分割をとれば上と同様にして計算できる。自明な結び系の場合は次のようになる。



S^2の中をσ^3_+，外をσ^3_-としてS^3のCW分割をとる。
これにσ^4を加えて，D^4の求めるCW分割を得る。

$H\sigma^0 = H\sigma^1 = O(n-1)$, $H\sigma^2_+ = H\sigma^2_- = H\sigma^3_+ = H\sigma^3_- = O(n-2)$, $H\sigma^4 = O(n-3)$

$$
\begin{aligned}
C^0_G &= R(O(n-1)) & H^0_G &\cong R(O(n-1)) \\
C^1_G &= R(O(n-1)) & H^1_G &\cong \mathrm{Ker}(R(O(n-1)) \to R(O(n-2))) \\
C^2_G &= R(O(n-2)) \oplus R(O(n-2)) & H^2_G &= 0 \\
C^3_G &= R(O(n-2)) \oplus R(O(n-2)) & H^3_G &\cong \mathrm{Ker}(R(O(n-2)) \to R(O(n-3))) \\
C^4_G &= R(O(n-3)) & H^4_G &= 0
\end{aligned}
$$

従って　$K^0_{O(n)} \cong R(O(n-1))$,

$$0 \to \mathrm{Ker}(R(O(n-2) \to R(O(n-3)) \to K^1_{O(n)} \to \mathrm{Ker}(R(O(n-1)) \to R(O(n-2))) \to 0$$

References

[1] M. Atiyah and F. Hirzebruch : Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Sympos. Pure Math., 3(1961), 7-38.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg : Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] F. Hirzebruch and K. Mayer : O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten, Lecture Notes in Math., No.57, Springer, 1968.

[4] K. Jänich : Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand als Orbiträume differenzierbarer G-Mannigfaltigkeiten ohne Rand, Topology 5(1966), 301-320.

[5] T. Matumoto : Equivariant K-theory and Fredholm operators, (to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo)

[6] T. Matumoto : On G-CW complexes and a theorem of J. H. C. Whitehead, (ibid.)

[7] C. Maunder : The spectral sequence of an extraordinary cohomology theory, Proc. Camb. Phil. Soc., 59(1963), 567-574.