

## Oriented bordism and involutions

阪大 理 小宮克弘

§ 0. まずはじめに

topological pair  $(X, A)$  とその involution  $\tau: (X, A) \rightarrow (X, A)$  を  $(X, A, \tau)$  で表す。Atiyah [1] の bordism の概念と, Conner and Floyd [4] の involution の cobordism の概念と結合することによつて, Stong [5] は  $(X, A, \tau)$  の equivariant bordism group  $\mathcal{N}_*(X, A, \tau)$  及び  $\hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau)$  を定義した。

本稿の目的は, これらの oriented analogue  $\mathcal{N}_*^{\pm}(X, A, \tau)$  及び  $\hat{\mathcal{N}}_*^{\pm}(X, A, \tau)$  を定義し, 二, 三の Stong の結果の analogue を求めることと, Stong の結果を利用して, 具体的な involution  $(X, \tau)$  に対して,  $\hat{\mathcal{N}}_*(X, \tau)$  を計算することである。

§ 1. 定義

involution  $(X, A, \tau)$  を一、固定しておく。

(1) unoriented case

triple  $(M, \mu, f)$  を考へる:  $\mu \in \mathbb{Z}$ ,  $M$  は compact differ-

differentiable manifold with boundary  $\bar{M}$ ,  $\mu: M \rightarrow M$  is differentiable involution,  $f: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$  is equivariant map (i.e.  $\tau f = f\mu$ ) である。  $\Rightarrow$  の triple  $(M, \mu, f)$ ,  $(M', \mu', f')$  が (equivariantly) bordant であるとは、次のとき云う:

$\exists$  4-tuple  $(W, V, \iota, g)$  such that

$W, V$  is compact differentiable manifold with boundary  $\bar{W}$

$\partial V = \partial M \cup \partial M'$  (disjoint union)

$\partial W = M \cup V \cup M'$  (boundary  $\bar{W}$  結合せよ)

$\iota: (W, V) \rightarrow (W, V)$  is differentiable involution  $\bar{W}$

$\iota|_M = \mu, \iota|_{M'} = \mu'$

$g: (W, V) \rightarrow (X, A)$  is equivariant map  $\bar{W}$

$g|_M = f, g|_{M'} = f'$

このとき,  $(M, \mu, f) \sim (M', \mu', f')$  と表す。これは同値関係である。従って,  $\pi_*(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f)\} / \sim$  が定義される。

これは triple の disjoint union に依り  $\mathbb{Z}$ -abelian 群になり,

さらに, 任意の  $[M, \mu, f] \in \pi_*(X, A, \tau)$  と, unoriented

cobordism ring  $\pi_*$  の任意の class  $[N]$  に対して,

$$[M, \mu, f] \cdot [N] = [M \times N, \mu \times 1, f \times \pi_1]$$

と定義することにより,  $\pi_*$ -module になる。

$\pi_*(X, A, \tau)$  の定義に対し, involution  $\mu, \mu', \iota$  を  $\mathbb{Z}$  fixed point free なものに陥るとき,  $\pi_*$ -module

$$\hat{\mathcal{H}}_*(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ is free}\} / \sim$$

が定義される。

## (2) oriented case

unoriented case の triple  $(M, \mu, f)$  及び 4-tuple  $(W, V, \mu, g)$  で特に,  $M, W, V$  は oriented,  $\mu, \mu$  は orientation preserving (以下, O-P と略す), 又は orientation reversing (O-R と略す) なものを考えるとき, 次の4つが定義される:

$$\Omega_*^+(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ is O-P}\} / \sim$$

$$\hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ is O-P and free}\} / \sim$$

$$\Omega_*^-(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ is O-R}\} / \sim$$

$$\hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ is O-R and free}\} / \sim$$

$\Omega_*$  を oriented cobordism ring とするとき, これらは  $\Omega_*$ -module である。

## §2. Stong の結果

まとめを語るために,  $\mathcal{H}_*(X, A, \tau)$  であって  $\mathcal{H}_*(X, A, \tau)$  又は  $\hat{\mathcal{H}}_*(X, A, \tau)$  を表す。involution  $(X, A, \tau)$  とその間の equivariant map の category とで表す。

### 命題1

$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{Z}_n\}$  は category  $\mathcal{C}$  上の equivariant generalized homology theory (Bredon [2]) である。

## 命題2

次の triangle は exact である:

$$\hat{\pi}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{k_*} \pi_*(X, A, \tau)$$

$$\uparrow S$$

$$\downarrow F$$

$$\bigoplus_{k=0}^* \pi_k(F_\tau \times BO(*-k), (A \cap F_\tau) \times BO(*-k))$$

ここに,  $F_\tau$  は  $\tau$  の fixed point set である。

## 命題3

次の triangle も exact である:

$$\hat{\pi}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{\Delta} \hat{\pi}_*(X, A, \tau)$$

$$\uparrow \beta$$

$$\downarrow \alpha$$

$$\pi_*(X, A)$$

$\Delta$  は Smith homomorphism と呼ばれる。

詳しくは, Stong [5] Proposition 1, Proposition 2, Proposition 5 を見ればよい。

## § 3. Oriented analogue

前節に挙げた Stong の結果の oriented analogue を考えよう。  
尚, 命題 1', 2', 3' も証明は割愛させて頂いた。

その 1.  $\Omega_*^\pm(X, A, \tau)$ ,  $\hat{\Omega}_*^\pm(X, A, \tau)$  もまともな話をするた

めに,  $\mathcal{H}_n(X, A, \tau)$  で表す。任意の equivariant map

$f: (X, A, \tau) \rightarrow (Y, B, \sigma)$  に対し,

$\mathcal{H}_n(f): \mathcal{H}_n(X, A, \tau) \rightarrow \mathcal{H}_n(Y, B, \sigma)$  を

$$\mathcal{H}_n(f)([M, \mu, g]) = [M, \mu, fg]$$

で定義する。また  $\partial_n: \mathcal{H}_n(X, A, \tau) \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}(A, \tau)$  を

$$\partial_n([M, \mu, g]) = [\partial M, \mu|_{\partial M}, g|_{\partial M}]$$

で定義する。これらは  $\mathcal{R}_n$ -homomorphism である。

命題 1'

$\{\mathcal{H}_n, \partial_n\}$  は category  $\mathcal{C}$  上の equivariant generalized homology theory である。

その 2. Topological pair  $(X, A)$  を固定しておく。

Triple  $(B \rightarrow M, \sigma, f)$  を考える: ここに,  $B \rightarrow M$  は compact differentiable manifold  $M$  上の vector bundle,  $\tau_M$  は  $M$  の tangent bundle とするとき,  $\sigma$  は  $B \oplus \tau_M$  の orientation,  $f: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$  は map である。

$\Rightarrow$  の triple を等しい:  $(B_1 \rightarrow M_1, \sigma_1, f_1) = (B_2 \rightarrow M_2, \sigma_2, f_2)$

とは, 次のとき云々:

$$\begin{array}{ccc} \exists \text{ bundle isomorphism } B_1 & \xrightarrow{\cong} & B_2 & \text{ such that} \\ & & \downarrow & \\ & & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

1)  $\varphi$  は diffeomorphism

2)  $\varphi \otimes d\varphi : \mathfrak{h}_1 \otimes \mathcal{L}_{M_1} \rightarrow \mathfrak{h}_2 \otimes \mathcal{L}_{M_2}$  は  $\sigma$ - $\rho$

3)  $f_1 = f_2 \varphi$

任意の triple  $(\mathfrak{h} \rightarrow M, \sigma, f)$  に対し

$$-(\mathfrak{h} \rightarrow M, \sigma, f) = (\mathfrak{h} \rightarrow M, -\sigma, f)$$

と定義する。  $\partial M \subset M$  の normal bundle  $\mathcal{L}$  とするとき,

$$(\mathfrak{h}|\partial M) \otimes \mathcal{L}_{\partial M} \otimes \mathcal{L} = (\mathfrak{h} \otimes \mathcal{L}_M)|\partial M \text{ は oriented である。 } \mathcal{L} \text{ に}$$

外向きの unit normal vector  $\nu$  をとり、  $\nu$  の orientation を与えるとき,

これは compatible な  $(\mathfrak{h}|\partial M) \otimes \mathcal{L}_{\partial M}$  の orientation  $\partial\theta$

を表し,

$$\partial(\mathfrak{h} \rightarrow M, \sigma, f) = (\mathfrak{h}|\partial M \rightarrow \partial M, \partial\theta, f|_{\partial M})$$

と定める。

$\Rightarrow$  の triple の bordant:  $(\mathfrak{h}_1 \rightarrow M_1, \sigma_1, f_1) \sim (\mathfrak{h}_2 \rightarrow M_2, \sigma_2, f_2)$

であるとは、次のときを言う:

$\exists$  4-tuple  $(\mathfrak{h} \rightarrow W, \nu, \sigma, f)$  such that

$$\partial W = \partial M_1 \cup \partial M_2 \quad (\text{disjoint union})$$

$$\partial W = M_1 \cup \nu \cup M_2 \quad (\text{boundary } \nu \text{ を結合する})$$

$$f: (W, \nu) \rightarrow (X, A)$$

$$\partial(\mathfrak{h} \rightarrow W, \sigma, f)|_{M_1} = (\mathfrak{h}_1 \rightarrow M_1, \sigma_1, f_1)$$

$$\partial(\mathfrak{h} \rightarrow W, \sigma, f)|_{M_2} = -(\mathfrak{h}_2 \rightarrow M_2, \sigma_2, f_2)$$

$\sim$  は同値関係である。従って,

$$A(k, n : (X, A)) = \{ (B^k \rightarrow M^n, \alpha, f) \} / \sim$$

が定義される。これは triple の disjoint union に依って  $\mathbb{Z}$ -  
 ベル群になる。さらに、次の定義を行う:

$$\mathcal{O}_m^+(X, A) = \bigoplus_{2k+n=m} A(2k, n : (X, A))$$

$$\mathcal{O}_*^+(X, A) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{O}_m^+(X, A)$$

$$\mathcal{O}_m^-(X, A) = \bigoplus_{2k+1+n=m} A(2k+1, n : (X, A))$$

$$\mathcal{O}_*^-(X, A) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{O}_m^-(X, A)$$

$\mathcal{O}_*^\pm(X, A)$  はごく自然な方法に依って  $\mathcal{O}_*^\pm$ -module になる。この  $\mathcal{O}_*^\pm(X, A)$  の定義は, Conner [3] chapter II の  $\mathcal{O}$  よりヒントを得る。  $\mathcal{O}_*^+(pt) = \mathcal{O}$  である。

### 命題 2'

次の triangle は exact である:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{O}}_*^\pm(X, A, \mathcal{L}) & \xrightarrow{k_*} & \mathcal{O}_*^\pm(X, A, \mathcal{L}) \\ \uparrow S & & \downarrow F \\ & & \mathcal{O}_*^\pm(F_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}} \cap A) \end{array}$$

$\mathcal{O}_*^\pm$ -homomorphism  $k_*$ ,  $F$ ,  $S$  は次のように定義する。まず,  $k_*$  は forgetful homomorphism である。

oriented triple  $(M, \mu, f)$  に対し,  $F_\mu^m$  を  $\mu$  の fixed point set  $F_\mu$  の  $m$  次元の component とし,  $F_\mu^m \subset M$  の normal bundle

を  $\mathcal{L}_m$  とする。  $\mathcal{L}_m \oplus \tau_{F_\mu^m} = \tau_M|_{F_\mu^m}$  の orientation  $\sigma_m \in M$  の orientation より induce されるものとする。このとき,

$$F([M^n, \mu, f]) = \bigoplus_{m=0}^n [\mathcal{L}_m \rightarrow F_\mu^m, \sigma_m, f|_{F_\mu^m}]$$

と定める。尚このとき,  $\mu$  が  $O-P$  かつ  $m$  が奇数ならば  $F_\mu^m = \emptyset$ , 又,  $\mu$  が  $O-Y$  かつ  $m$  が偶数ならば  $F_\mu^m = \emptyset$  であることに注意しよう。

triple  $(\mathcal{B} \rightarrow M, \sigma, f)$  に対し, ちに随分した sphere bundle を  $S(\mathcal{B})$  で表す。  $S(\mathcal{B})$  には  $\mathcal{B} \oplus \tau_M$  の orientation  $\sigma$  より orientation を与えることができる。  $S(\mathcal{B})$  の各 vector に  $-1$  をかけることに依りて得られる involution を  $a: S(\mathcal{B}) \rightarrow S(\mathcal{B})$  で表す。

$$f \circ \pi: S(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{f} F_\mu \subset X$$

とするとき,  $S([ \mathcal{B} \rightarrow M, \sigma, f ] ) = [ S(\mathcal{B}), a, f \circ \pi ]$  と定める。  $S$  は degree  $-1$  の homomorphism である。

その3. Smith homomorphism  $\Delta: \hat{\pi}_n(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\pi}_{n-1}(X, A, \tau)$  の oriented analogue は次のように定義される。  $(S^k, a)$  を  $k$  次元球面の antipodal involution とする。  $(M^n, \mu, f)$  を任意の oriented triple とするとき,  $k > n$  なる  $k$  に対し, equivariant map  $\lambda: (M^n, \mu) \rightarrow (S^k, a)$  を  $S^{k-1}$  の上で transverse regular なものがある。このとき  $N = \lambda^{-1}(S^{k-1})$  とし,  $N \subset M$  の normal bundle を  $\mathcal{L}$  とするとき,  $\tau_N \oplus \mathcal{L} = \tau_M|_N$  は oriented であり,  $\mathcal{L}$  にともな,  $S^{k-1} \subset S^k$  の oriented trivial

normal bundle より orientation が induce される。これらと compatible な orientation に依り、 $N$  に orientation を与える。このとき、 $N$  の involution  $\mu|_N$  は  $\mu$  が  $0-p$  ならば  $0-r$ 、逆に  $0-r$  ならば  $0-p$  である。従って、 $(M, \mu, f)$  の class に  $(N, \mu|_N, f|_N)$  の class を対応させることに依り、 $\alpha$ 、oriented Smith homomorphism  $\Delta: \hat{\Omega}_n^\pm(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\Omega}_{n-1}^\mp(X, A, \tau)$  が定義される。

命題 3'

次の Triangle は exact である:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Omega}_*^\pm(X, A, \tau) & \xrightarrow{\Delta} & \hat{\Omega}_*^\mp(X, A, \tau) \\ \beta \swarrow & & \searrow \alpha \\ \Omega_*(X, A) & & \end{array}$$

$\alpha$  と  $\beta$  は次のように定義される:

$$\alpha([M, \mu, f]) = [M, f]$$

$$\beta([M, f]) = [M \pm M, c, f + \tau f]$$

ここに、 $c$  は component を  $\lambda$  替える involution である。

§4.  $\hat{\gamma}_*(S^n, a_p)$  と  $\hat{\gamma}_*(FP(n), a_p)$

$S^n$  と  $n$  次元球面とし、任意の  $p \geq 0$  に対し  $S^n$  の involution

$a_p$  を次のように定める:

$$a_p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n+1}) & p=0 \\ (-x_1, \dots, -x_p, x_{p+1}, \dots, x_{n+1}) & 0 < p < n+1 \\ (-x_1, \dots, -x_{n+1}) & n+1 \leq p \end{cases}$$

$a_0 = 1$ ,  $n+1 \leq p$  のとき  $a_p = a$  である。

$F =$  実数体  $R$ , 複素数体  $C$ , 又は四元数体  $Q$  とし,  $FP(n)$  を  $F$  上の  $n$  次元射影空間とする。任意の  $p > 0$  に対して,  $FP(n)$  の involution  $a_p$  を次のように定める:

$$a_p([u_1, \dots, u_{n+1}]) = \begin{cases} [-u_1, \dots, -u_p, u_{p+1}, \dots, u_{n+1}] & 0 < p < n+1 \\ [-u_1, \dots, -u_{n+1}] & n+1 \leq p \end{cases}$$

$n+1 \leq p$  のとき,  $a_p = 1$  である。

$\pi_1: S^n \times S^k \rightarrow S^n$  を第一因子への projection,  $n: S^k \rightarrow S^n$  を  $n(S^k) = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$  なる constant map,  $k \leq n$  のとき  $i: S^k \rightarrow S^n$  を後の座標を 0 として入れる inclusion map とする。  $[S^n \times S^k, a_p \times a, \pi_1]$ ,  $[S^k, a, i]$  はそれぞれ  $\hat{\gamma}_*(S^n, a_p)$ ,  $\hat{\gamma}_*(S^k, a)$  の class を表し,  $p \leq n$  のとき,  $[S^k, a, n]$  は  $\hat{\gamma}_*(S^n, a_p)$  の class を表す。射影空間に対しても projection  $\pi_1$  と inclusion map  $i$  を同様に定義するとき,  $[FP(r) \times S^k, a_p \times a, i\pi_1]$  ( $0 \leq r \leq n$ ) は  $\hat{\gamma}_*(FP(n), a_p)$  の class を表す。

## 定理 1

- 1)  $\hat{\pi}_*(S^0, 1)$  は  $\{[S^0 \times S^k, 1 \times a, \pi_1] \mid k \geq 0\}$  を basis とする free  $\pi_*$ -module である。
- 2)  $0 < n, 0 \leq p \leq n$  のとき,  $\hat{\pi}_*(S^n, a_p)$  は  $\{[S^n \times S^k, a_p \times a, \pi_1], [S^k, a, n] \mid k \geq 0\}$  を basis とする free  $\pi_*$ -module である。
- 3)  $\hat{\pi}_*(S^n, a)$  は  $\{[S^k, a, i] \mid 0 \leq k \leq n\}$  を basis とする free  $\pi_*$ -module である。

## 定理 2

任意の  $n, p$  に対し,  $\hat{\pi}_*(FP(n), a_p)$  は  $\{[FP(r) \times S^r, a_p \times a, i\pi_1] \mid 0 \leq r \leq n, 0 \leq r\}$  を basis とする free  $\pi_*$ -module である。

これらの結果より, 命題 3 の exact triangle は次のように split することになる:

## 系

次の 3 つの split short exact sequence を得る:

$$0 \rightarrow \pi_m(S^n) \xrightarrow{\beta} \hat{\pi}_m(S^n, a_p) \xrightarrow{\Delta} \hat{\pi}_{m-1}(S^n, a_p) \rightarrow 0 \quad (0 \leq p \leq n)$$

$$0 \rightarrow \pi_m(S^n) \xrightarrow{\beta} \hat{\pi}_m(S^n, a) \xrightarrow{\Delta} \hat{\pi}_{m-1}(S^n, a) \rightarrow 0 \quad (0 < n, m < n)$$

$$0 \rightarrow \pi_m(FP(n)) \xrightarrow{\beta} \hat{\pi}_m(FP(n), a_p) \xrightarrow{\Delta} \hat{\pi}_{m-1}(FP(n), a_p) \rightarrow 0$$

定理1, 2の証明は, いづれも命題3の exact triangle を使  
 っ, 各 equivariant bordism group の次元に因する帰納法に  
 依り得られる。以下に, 定理2の証明のあらましを述べる。

[定理2の略証]  $F=R, C$  は  $Q$  に従って,  $f=1, 2$  又は4  
 とする。  $\hat{\mathcal{U}}_{fr+\pi}(FP(n), a_p)$  の class  $[FP(r) \times S^t, a_p \times a, i\pi_1]$  を  
 $\Delta_{f,n,p}(r, \pi)$  で表し, 次の命題を  $D(m)$  と名付ける:

$$D(m) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \hat{\mathcal{U}}_m(FP(n), a_p) = \bigoplus \{ \Delta_{f,n,p}(r, \pi) \mathcal{U}_k \mid 0 \leq r \leq n, 0 \leq \pi \\ fr + \pi + k = m \} \\ 2) \mathcal{U}_{m-fr-\pi} の 0 \neq \text{任意の class } \chi \text{ に対して,} \\ \Delta_{f,n,p}(r, \pi) \cdot \chi \neq 0 \text{ in } \hat{\mathcal{U}}_m(FP(n), a_p) \end{array} \right.$$

定理2を証明するためには, 任意の  $m \geq 0$  に対して  $D(m)$  が  
 正しいことを示せば十分である。

CW-pair  $(X, A)$  に対して, よく知られた結果:

$$\mathcal{U}_*(X, A) \cong H_*(X, A; \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{U}_*$$

(例えば, Conner and Floyd [4] 定理17.1)

を使っ, 次の補題を得る:

$$\text{補題1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_*(FP(n)) \text{ は } \{ [FP(r), i] \mid 0 \leq r \leq n \} \text{ を basis とする free} \\ \mathcal{U}_* \text{-module である。} \end{array} \right.$$

又, 各 homomorphism の定義より, 容易に次の補題を得る:

補題 2

$$1) \Delta(\Delta_{f.n.p}(r, \pi)) = \Delta_{f.n.p}(r, \pi-1)$$

$$2) \alpha(\Delta_{f.n.p}(r, \pi)) = 0$$

$$3) \beta([FP(r), i]) = \Delta_{f.n.p}(r, 0)$$

命題 3 より, 再び次の exact sequence を得る:

$$0 \leftarrow \hat{\gamma}_0(FP(n), a_p) \xleftarrow{\beta} \gamma_0(FP(n)) \xleftarrow{\alpha} \hat{\gamma}_0(FP(n), a_p)$$

これより  $D(0)$  が計算される。次に,  $D(m-1)$  まで計算されたとするとき, 次の exact sequence が得られる:

$$0 \leftarrow \bigoplus_{r+\pi+k=m-1} \Delta_{f.n.p}(r, \pi) \gamma_k \xleftarrow{\Delta} \hat{\gamma}_m(FP(n), a_p) \xleftarrow{\beta} \gamma_m(FP(n), a_p) \xleftarrow{\alpha} \hat{\gamma}_m(FP(n), a_p)$$

これを用いて  $D(m)$  が計算される。

q. e. d.

尚, 定理 1 の 3) に關しては,  $a$  が fixed point free であることに依り, はるかに簡単な別証がある。則ち,

$$\hat{\gamma}_*(S^n, a) \simeq \gamma_*(RP(n)) \simeq H_*(RP(n); \mathbb{Z}_2) \otimes \gamma_*$$

より, 一発で得られる。

### 参 考 文 献

- [1] M. F. Atiyah: Bordism and cobordism, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961) 200-208

- [2] G. E. Bredon: *Equivariant cohomology theories*,  
Lecture notes in Math. 34 (1967) Springer-Verlag
- [3] P. E. Conner: *Lectures on the action of finite group*,  
Lecture notes in Math. 73 (1968) Springer-Verlag.
- [4] P. E. Conner and E. E. Floyd: *Differentiable periodic maps*,  
(1964) Springer-Verlag.
- [5] R. E. Stong: *Bordism and involutions*, *Ann. Math.* 90  
(1969) 47 - 74.