

On the C_p -classes in a von Neumann algebra

東北大 理 武元英夫

§ 1. 序

Hilbert space H における completely continuous operators 全体からなる ideal $C(H)$ において, C_p -classes なるものが定義され, 議論がなされていることは Dunford-Schwartz [3] によって知られている。 $C(H)$ の元 a に対して a の絶対値 $|a| = (a^*a)^{1/2}$ の eigenvectors $\mu_1(a), \mu_2(a), \dots$ を 0 に収束する様に単調減少に並べ換之列とした時, C_p -classes は $C_p = \{a \in C(H); |a|_p = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a)^p \right]^{1/p} < \infty \}$ によって定められている。

ここでは, type I von Neumann algebra M において, 上の C_p -classes を拡張して行くことを目的とする。まず, H. Halpern [6] が type I von Neumann algebra のある maximal CCR-ideal を上の $C(H)$ に対応させることにより, 一種の spectral decomposition を行っている。(定理 1.) 私は, その H. Halpern の結果から, Dunford-Schwartz の著書にも書かれている characteristic numbers の議論を type I von Neumann

algebra において進めて行き、更に classes- C_p を定義する。
最後に、定義された C_p -classes ($p \geq 1$) に対して、 M の center Z を module とする Z -linear functional の意味で C_p -classes dual space がどうなるか調べて行く。

§ 2. Completely continuous elements の spectral decomposition と characteristic operators 。

M は type I von Neumann algebra とし、その center Z の spectrum を X とする。今、 M における all abelian projections によって generate される uniformly closed ideal を $C_\infty(M)$ とする。その時、 $C_\infty(M)$ が maximal CCR-ideal になることは今までに知られていゝ。 $X \ni \lambda$ に対して、ideal $[S]$ を Z における maximal ideal \mathcal{I} を含む M における最小の closed ideal とする。その時、Hilbert space $H(\mathcal{I})$ が存在して $M/[S]$ が $H(\mathcal{I})$ 上に既約に表現されることが Glimm [4] で分つていゝ。以上の事柄から H. Halpern [6] は次の事を示していゝ。

定理 1. $M, Z, C_\infty(M)$ を前に述べたものとする。その時、 $C_\infty(M)$ の任意の positive element a に対して、次の性質を満す Z の positive elements の列 $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ と abelian projections の列 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ が存在する。(1) $\{e_i\}$ は互いに直交し、 $e_i \geq e_{i+1} f_{\nu_i}$; (2) $a_i \geq a_{i+1} f_{\nu_i}$, $\lim a_i = \infty$ if $\{a_i\}$ が無限個; (3) $\text{supp}(a_i) = Z(e_i)$;

(4) $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ in uniform topology.

定理 1 において定まった $C_{\infty}(M)$ の positive element の表現を spectral decomposition と呼ぶ。

定義 1. $C_{\infty}(M)$ の任意の元 a に対して, $|a|$ のスペクトル分解 $|a| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ の時, a の n -th characteristic operator を $\mu_n(a)$ と表わし, それを λ_n とする。

上の定義から, Hilbert space 上の completely continuous operators に対する characteristic number の議論が拡張されることは, 次の補題 1 から分る。そこで, 補題 1 とそれによって分る二・三の性質を列記する。

補題 1. $C_{\infty}(M) \ni a, X \ni \xi$ に対して, $\mu_n(a(\xi))$ を $H(\xi)$ 上の $a(\xi)$ の n -th characteristic number とすると, $\mu_n(a)^{\wedge}(\xi) = \mu_n(a(\xi))$ が成立する。

補題 2. $C_{\infty}(M)$ の元 a, b に対して, 次が成立する。

$$\mu_{n+m+1}(a+b) \leq \mu_{n+1}(a) + \mu_{m+1}(b),$$

$$\mu_{n+m+1}(ab) \leq \mu_{n+1}(a) \mu_{m+1}(b) .$$

補題3。 $C_\infty(M)$ の元 a, b と M の元 t に対して次が成立つ。

- (1) $\|\mu_n(a) - \mu_n(b)\| \leq \|a - b\|$; (2) $\mu_n(at) \leq \mu_n(a)\|t\|$, $\mu_n(ta) \leq \|t\|\mu_n(a)$; (3) $\mu_n(au) = \mu_n(a)$ if $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$, $u \in M$ 。

§3。 Completely continuous elements の classes $C_p(M)$ 。

この § では, $C_\infty(M)$ において classes $C_p(M)$ を定義し, 更に classes $C_p(M)$ が Banach algebra になることを示す。

定義2。 $1 \leq p < \infty$ に対して, $C_p(M) = \{a \in C_\infty(M) ; \|a\|_p = \|\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a)^p\}^{1/p}\| < \infty\}$ 特には, $C_\infty(M)$ において uniform topology を与える。

すると, 次の事が分る。

補題4。

- (a) $C_p(M) \subset C_{p'}(M)$ if $p \leq p'$, $\|a\|_p \downarrow$ for $p \uparrow$;
 (b) $a, b \in C_p(M) \Rightarrow a+b \in C_p(M)$ and $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$;
 (c) $a \in C_p(M)$, $b \in C_q(M)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) $\Rightarrow ab \in C_1(M)$ and $\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$;
 (d) $a \in C_p(M)$, $t \in M \Rightarrow ta, at \in C_p(M)$ and $\|at\|_p \leq \|a\|_p \|t\|$, $\|ta\|_p \leq \|t\| \|a\|_p$ 。

補題4によつて classes $C_p(M)$ は normed algebra である。更に次の事から, $C_p(M)$ が Banach algebra となる。

定理 2. $C_p(M)$ における列 $\{a_n\}$ が $\|a_n - a_m\|_p \rightarrow 0$ as $n, m \rightarrow \infty$ を満たす時, $C_p(M)$ の元 a が存在して, $\|a_n - a\|_p \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ が成立する。

Hilbert space における finite rank の operator に代って $F = \{a \in C_\infty(M) : |a| = \sum_{i=1}^N a_i e_i, N < \infty\}$ によって F を定義する。その時, 次の様に F が ideal となる。更に, classes $C_p(M)$ において dense であることが分る。

補題 5. $F \ni a, M \ni b \Rightarrow ab, ba \in F$ が成立する。

補題 6. $C_\infty(M) \ni a$ に対して, F において次の性質を満たす列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ が存在する。

$$(1) \|b_n - a\| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

$$(2) \|b_n - a\|_p \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ if } a \in C_p(M);$$

$$(3) \|b_n\|_p \rightarrow \|a\|_p \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ if } a \in C_p(M).$$

§ 4. type I von Neumann algebra M における classes $C_p(M)$ の duality。

$C_1(M)$ の positive element a の spectral decomposition $a = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$ に対して, $\text{Tr}(a) = \sum_{i=1}^\infty a_i$ とおく。その時, $X \ni \xi$ に対して,

$\text{Tr}(a)^{\wedge}(\zeta) = \text{Tr}(a(\zeta))$ が成立する。そこで、 $\text{Tr}(a(\zeta))$ は $B(H(\zeta))$ の trace を表わす。今、 $C_1(M) \ni a$ に対して、 $a = a_1 - a_2 + i(a_3 - a_4)$ ($a_i \geq 0$) と表わした時、 $\text{Tr}(a) = \text{Tr}(a_1) - \text{Tr}(a_2) + i(\text{Tr}(a_3) - \text{Tr}(a_4))$ によって、 Tr を定義した時、 Tr は次の性質をもつ。(1) $a, b \in C_1(M)$, $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Tr}(ca + db) = c\text{Tr}(a) + d\text{Tr}(b)$; (2) $a \in C_1(M)$, $u \in M$ $\Rightarrow \text{Tr}(u^* a u) = \text{Tr}(a)$; (3) $a \in C_1(M) \Rightarrow \varphi(b) = \text{Tr}(ba)$ for $b \in M$ は M 上の continuous \mathbb{Z} -linear functional である。

そこで $C_p(M)$ の duality を考えるにあたり、 $C_p(M)$ 上の continuous functional として、 $\|\cdot\|_p$ -continuous \mathbb{Z} -linear functional を表わす。その意味で $C_p(M)^* = C_q(M)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) が成立する。最初に次の事を示す。

定理3. $1 < p < \infty$, $a \in C_p(M)$ に対して、次が成立する。

$$\|a\|_p = \sup_{b \in F} \frac{\|\text{Tr}(ab)\|}{\|b\|_q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

H. Halpern は $C_1(M)^* = M$, $C_\infty(M)^* = C_1(M)$ であることを示している。しかし、彼の議論は Kaplansky の結果、即ち $C_2(M)$ が Modular Hilbert space であることを使っている。しかし、 $p \neq 1, \infty$ に対しては、定理3が必ず必要になって来る。最後に、定理3を用いることにより、 $1 < p < \infty$ に対して $C_p(M)^* = C_q(M)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) であることを示す。

定理4。 $a_0 \in C_g(M)$ に対し $\varphi(a) = \text{Tr}(aa_0)$ for $a \in C_p(M)$
 $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ によつて定義され $C_p(M)$ 上の \mathbb{Z} -linear functional
 φ は continuous となる。更に、 $C_p(M)$ 上の任意の continuous
 \mathbb{Z} -linear functional φ に対し $\varphi \in C_g(M) \ni a_\varphi (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ が
一意に定まると、 $\varphi(a) = \text{Tr}(aa_\varphi)$ for $\forall a \in C_p(M)$ and $\|\varphi\| = \|a_\varphi\|_q$
が成立する。

References

- [1] J. Dixmier; Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien,
Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [2] J. Dixmier; Les C*-algebres et leus representation, Gauthier-
Villars, Paris, 1964.
- [3] N. Dunford and J.T. Schwartz; Linear operators II.
- [4] J. Glimm; A Stone-Weierstrass theorem for C*-algebras, Ann.
of Math., 72(1960), 216-244.
- [5] J. Glimm; Type I C*-algebras, Ann. of Math., 73(1961), 572-612.
- [6] H. Halpern; A spectral decomposition for self-adjoint element
in the maximal GCR-ideal of a von Neumann algebra with
applications to non-commutative integration theory,
Trans. Amer. Math. Soc., 133(1968), 281-306.
- [7] S. Sakai; The theory of W*-algebras, Lecture Note, 1962.