

On the  $C_p$ -classes in a von Neumann algebra

東北大 理 武元英夫

§ 1. 序

Hilbert space  $H$  における completely continuous operators 全体からなる ideal  $C(H)$  において,  $C_p$ -classes なるものが定義され, 議論がなされていることは Dunford-Schwartz [3] によって知られている。  $C(H)$  の元  $a$  に対して  $a$  の絶対値  $|a| = (a^*a)^{1/2}$  の eigenvectors  $\mu_1(a), \mu_2(a), \dots$  を 0 に収束する様に単調減少に並べ換之列とした時,  $C_p$ -classes は  $C_p = \{a \in C(H); |a|_p = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a)^p \right]^{1/p} < \infty \}$  によって定められている。

ここでは, type I von Neumann algebra  $M$  において, 上の  $C_p$ -classes を拡張して行くことを目的とする。まず, H. Halpern [6] が type I von Neumann algebra のある maximal CCR-ideal を上の  $C(H)$  に対応させることにより, 一種の spectral decomposition を行っている。(定理 1.) 私は, その H. Halpern の結果から, Dunford-Schwartz の著書にも書かれている characteristic numbers の議論を type I von Neumann

algebra において進めて行き、更に classes- $C_p$  を定義する。  
最後に、定義された  $C_p$ -classes ( $p \geq 1$ ) に対して、 $M$  の center  $Z$  を module とする  $Z$ -linear functional の意味で  $C_p$ -classes dual space がどうなるか調べて行く。

§ 2. Completely continuous elements の spectral decomposition と characteristic operators 。

$M$  は type I von Neumann algebra とし、その center  $Z$  の spectrum を  $X$  とする。今、 $M$  における all abelian projections によって generate される uniformly closed ideal を  $C_0(M)$  とする。その時、 $C_0(M)$  が maximal CCR-ideal になることは今までに知られていゝ。  $X \ni \lambda$  に対して、ideal  $[S]$  を  $Z$  における maximal ideal  $\lambda$  を含む  $M$  における最小の closed ideal とする。その時、Hilbert space  $H(S)$  が存在して  $M/[S]$  が  $H(S)$  上に既約に表現されることが Glimm [4] で分つていゝ。以上の事柄から H. Halpern [6] は次の事を示していゝ。

定理 1.  $M, Z, C_0(M)$  を前に述べたものとする。その時、 $C_0(M)$  の任意の positive element  $a$  に対して、次の性質を満す  $Z$  の positive elements の列  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  と abelian projections の列  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  が存在する。(1)  $\{e_i\}$  は互いに直交し、 $e_i \geq e_{i+1} f_{\nu_i}$ ; (2)  $a_i \geq a_{i+1} f_{\nu_i}$ ,  $\lim a_i = \infty$  if  $\{a_i\}$  が無限個; (3)  $\text{supp}(a_i) = Z(e_i)$ ;

(4)  $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$  in uniform topology.

定理 1 において定まった  $C_0(M)$  の positive element の表現を spectral decomposition と呼ぶ。

定義 1.  $C_0(M)$  の任意の元  $a$  に対して,  $|a|$  のスペクトル分解  $|a| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$  の時,  $a$  の  $n$ -th characteristic operator を  $\mu_n(a)$  と表わし, それを  $\lambda_n$  とする。

上の定義から, Hilbert space 上の completely continuous operators に対する characteristic number の議論が拡張されることは, 次の補題 1 から分る。そこで, 補題 1 とそれによって分る二・三の性質を列記する。

補題 1.  $C_0(M) \ni a, X \ni \xi$  に対して,  $\mu_n(a(\xi))$  を  $H(\xi)$  上の  $a(\xi)$  の  $n$ -th characteristic number とすると,  $\mu_n(a)^\wedge(\xi) = \mu_n(a(\xi))$  が成立する。

補題 2.  $C_0(M)$  の元  $a, b$  に対して, 次が成立する。

$$\mu_{n+m+1}(a+b) \leq \mu_{n+1}(a) + \mu_{m+1}(b),$$

$$\mu_{n+m+1}(ab) \leq \mu_{n+1}(a) \mu_{m+1}(b) .$$

補題3。  $C_\infty(M)$  の元  $a, b$  と  $M$  の元  $t$  に対して次が成立つ。

- (1)  $\|\mu_n(a) - \mu_n(b)\| \leq \|a - b\|$ ; (2)  $\mu_n(at) \leq \mu_n(a)\|t\|$ ,  $\mu_n(ta) \leq \|t\|\mu_n(a)$ ; (3)  $\mu_n(au) = \mu_n(a)$  if  $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$ ,  $u \in M$ 。

§3。 Completely continuous elements の classes  $C_p(M)$ 。

この § では,  $C_\infty(M)$  において classes  $C_p(M)$  を定義し, 更に classes  $C_p(M)$  が Banach algebra になることを示す。

定義2。  $1 \leq p < \infty$  に対して,  $C_p(M) = \{a \in C_\infty(M) ; \|a\|_p = \|\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a)^p\}^{1/p}\| < \infty\}$  特には,  $C_\infty(M)$  において uniform topology を与える。

すると, 次の事が分る。

補題4。

- (a)  $C_p(M) \subset C_{p'}(M)$  if  $p \leq p'$ ,  $\|a\|_p \downarrow$  for  $p \uparrow$ ;  
 (b)  $a, b \in C_p(M) \Rightarrow a+b \in C_p(M)$  and  $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ ;  
 (c)  $a \in C_p(M)$ ,  $b \in C_q(M)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ )  $\Rightarrow ab \in C_1(M)$  and  $\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$ ;  
 (d)  $a \in C_p(M)$ ,  $t \in M \Rightarrow ta, at \in C_p(M)$  and  $\|at\|_p \leq \|a\|_p \|t\|$ ,  $\|ta\|_p \leq \|t\| \|a\|_p$ 。

補題4によつて classes  $C_p(M)$  は normed algebra である。更に次の事から,  $C_p(M)$  が Banach algebra となる。

定理 2.  $C_p(M)$  における列  $\{a_n\}$  が  $\|a_n - a_m\|_p \rightarrow 0$  as  $n, m \rightarrow \infty$  を満たす時,  $C_p(M)$  の元  $a$  が存在して,  $\|a_n - a\|_p \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  が成立する。

Hilbert space における finite rank の operator に代って  $F = \{a \in C_\infty(M) : |a| = \sum_{i=1}^N a_i e_i, N < \infty\}$  によって  $F$  を定義する。その時, 次の様に  $F$  が ideal となる。更に, classes  $C_p(M)$  において dense であることが分る。

補題 5.  $F \ni a, M \ni b \Rightarrow ab, ba \in F$  が成立する。

補題 6.  $C_\infty(M) \ni a$  に対して,  $F$  において次の性質を満たす列  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  が存在する。

$$(1) \|b_n - a\| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

$$(2) \|b_n - a\|_p \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ if } a \in C_p(M);$$

$$(3) \|b_n\|_p \rightarrow \|a\|_p \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ if } a \in C_p(M).$$

§ 4. type I von Neumann algebra  $M$  における classes  $C_p(M)$  の duality.

$C_1(M)$  の positive element  $a$  の spectral decomposition  $a = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$  に対して,  $\text{Tr}(a) = \sum_{i=1}^\infty a_i$  とおく。その時,  $X \ni \xi$  に対して,

$\text{Tr}(a)^{\wedge}(z) = \text{Tr}(a(z))$  が成立する。そこで、 $\text{Tr}(a(z))$  は  $B(H(z))$  の trace を表わす。今、 $C_1(M) \ni a$  に対し、 $a = a_1 - a_2 + i(a_3 - a_4)$  ( $a_i \geq 0$ ) と表わした時、 $\text{Tr}(a) = \text{Tr}(a_1) - \text{Tr}(a_2) + i(\text{Tr}(a_3) - \text{Tr}(a_4))$  によつて、 $\text{Tr}$  を定義した時、 $\text{Tr}$  は次の性質をもつ。(1)  $a, b \in C_1(M)$ ,  $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Tr}(ca + db) = c\text{Tr}(a) + d\text{Tr}(b)$ ; (2)  $a \in C_1(M)$ ,  $u \in M$   $\Rightarrow \text{Tr}(u^* a u) = \text{Tr}(a)$ ; (3)  $a \in C_1(M) \Rightarrow \varphi(b) = \text{Tr}(ba)$  for  $b \in M$  は  $M$  上の continuous  $\mathbb{Z}$ -linear functional である。

そこで  $C_p(M)$  の duality を考へるにあつて、 $C_p(M)$  上の continuous functional として、 $\|\cdot\|_p$ -continuous  $\mathbb{Z}$ -linear functional を表わす。その意味で  $C_p(M)^* = C_q(M)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) が成立する。最初に次の事を示す。

定理3.  $1 < p < \infty$ ,  $a \in C_p(M)$  に対し、次が成立する。

$$\|a\|_p = \sup_{b \in F} \frac{\|\text{Tr}(ab)\|}{\|b\|_q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

H. Halpern は  $C_1(M)^* = M$ ,  $C_\infty(M)^* = C_1(M)$  であることを示している。しかし、彼の議論は Kaplansky の結果、即ち  $C_2(M)$  が Modular Hilbert space であることを使つてゐる。しかし、 $p \neq 1, \infty$  に対しは、定理3が必ずしも成つて来ず。最後に、定理3を用ひることによつて、 $1 < p < \infty$  に対し  $C_p(M)^* = C_q(M)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) なることを示す。

定理4。  $a_0 \in C_g(M)$  に対し、  $\varphi(a) = \text{Tr}(aa_0)$  for  $a \in C_p(M)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) によつて定義され、  $C_p(M)$  上の  $\mathbb{Z}$ -linear functional  $\varphi$  は continuous となる。 更に、  $C_p(M)$  上の任意の continuous  $\mathbb{Z}$ -linear functional  $\varphi$  に対し、  $C_g(M) \ni a_\varphi$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) が一意に定まると、  $\varphi(a) = \text{Tr}(aa_\varphi)$  for  $\forall a \in C_p(M)$  and  $\|\varphi\| = \|\varphi\|_q$  が成立する。

## References

- [1] J. Dixmier; Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [2] J. Dixmier; Les C\*-algebres et leus representation, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [3] N. Dunford and J.T. Schwartz; Linear operators II.
- [4] J. Glimm; A Stone-Weierstrass theorem for C\*-algebras, Ann. of Math., 72(1960), 216-244.
- [5] J. Glimm; Type I C\*-algebras, Ann. of Math., 73(1961), 572-612.
- [6] H. Halpern; A spectral decomposition for self-adjoint element in the maximal GCR-ideal of a von Neumann algebra with applications to non-commutative integration theory, Trans. Amer. Math. Soc., 133(1968), 281-306.
- [7] S. Sakai; The theory of W\*-algebras, Lecture Note, 1962.