

M. Henle の W^* 環のガロア理論
について

茨城大. 工. 武田=郎

序

A を可分なヒルベルト空間 H 上に標準的に作用している \mathbb{I}_1 -ファクター, G を A の可付番デスクリートな外部 $*$ -自己同型 (以下自己同型なつねに $*$ -自己同型を意味するものとする) の群, B を G の自己同型で不変な A の元のなす部分環とする. このとき

(1) B' は \mathbb{I}_1 -ファクター

を仮定すると, 単純環の場合に平行してつぎの諸定理が成り立つことが知られていた. ([7], [8], [9], [10]). このとき A を群 G による B のガロア拡大, G をそのガロア群とよぶ.

定理 I. (基本定理).

G の部分群 H に, A の H -不変元のなす部分環 $C = A^H$ を対応させることによつて, G の部分群と A, B の中間にあるファクターの間には $/ : /$ の対応がつけられる. H が G の不変

部分群のときは C はまた B のガロア拡大で、そのガロア群は G/H に同型である。

定理 II. (正規基定理)

適当に $a \in A$ をとることにより、 A のすべての元を

$$x = b_1 a + b_2 g(a) + \cdots + b_k k(a)$$

($b_1, b_2, \dots, b_k \in B, g_1, \dots, g_k \in G$) と表わすことが出来る。

定理 III. (拡張定理)

C, D は A と B の中間にある部分ファクターで、 B の元を不変にする同型写像で同型とすると、その同型写像は G にぞくする A の自己同型に拡張出来る。

A が H 上に標準的に作用しているとき、 $g \in G$ の作用は H 上のユニタリ作用素 u_g によって

$$(2) \quad g(a) = u_g a u_g^*$$

と表わすことが出来る。これを g の作用の空間表現とよぶことにする。この u_g を用いて、 $a' \in A'$ に対して

$$(3) \quad g(a') = u_g a' u_g^*$$

と置くと、これは A' の外部自己同型となる。 B の可換子環 $B' = \{A'; u_g, (g \in G)\}''$ である。条件(1)のもとでは B' と A' の G による接合積 $G \otimes A'$ が代数同型になる。このことが上述の諸定理の証明のキーポイントになっていた。

実は条件(1)は

(4) G は有限群

と同値で, G が無限群のときガロア対応が成立しない反例も知られていた.

最近 M. Henle [4] が一般の W^* 環 (v. N. 環) で B' と $G \otimes A'$ とが代数同型になるための条件を調べ, 一般の v. N. 環でガロア理論がどのように変化するかを論じているので, 以下それの概要を紹介する.

1. v. N. 環の自由自己同型

Π_1 -ファクターのガロア理論においてはつぎの事実が非常に有効に使われた.

(5) g を Π_1 -ファクター A の外部自己同型とある. 任意の $b \in A$ に対して $ab = g(b)a$ であるならば $a = 0$.

一方一般の v. N. 環 A の自己同型 g について Kallman [5] は g の外部性をつぎのように特徴づけた.

(6) g は A の外部自己同型 $\iff a \in A$ が任意の $b \in A$ に対して $ab = g(b)a$ を満たすならば $C(a) < 1$.

($C(a)$ は a の central support). ファクターでは $a \neq 0$ のとき $C(a) = 1$ であるから, 上の特徴づけは

(7) g がファクターの外部自己同型 $\iff ab = g(b)a$ ならば $a = 0$.

となる。

一般の v. N. 環 A の自己同型 g が (5) の性質をもつとき、すなわち任意の $b \in A$ に対し、 $ab = g(b)a$ ならば $a = 0$ となるとき、Kallman はこれを A の自由自己同型と名づけた。それは (7) によつてファクターでは外部自己同型と一致してゐるが、 A が可換なときは自由性の条件は

(8) 任意の射影 $p \in A$ に対し、 $g \equiv p$, $g(p) \perp g$ となる射影 g がとれる。

と同値になつて、von Neumann が自由^由自己同型とよんだものと一致するからである。

A の自由自己同型 g が H 上で、 $g(a) = u_g a u_g^*$ と空間表現を許すとき、 A' の自己同型 $g(a') = u_g a' u_g^*$ もまた A' の自由自己同型である。

2. 接合積

A をヒルベルト空間 H 上の v. N. 環、 G を A の自己同型の可付番群、 $G \otimes H$ を G 上の H -値関数 $\sum g \otimes x_g$, ($x_g \in H$) で

$$\|\sum g \otimes x_g\|^2 \equiv (\sum \|x_g\|_H^2) < +\infty$$

を満たすものの全体のなすヒルベルト空間とする。

$$H_R \equiv \{\sum g \otimes x_g \mid x_g = 0, (g \neq R)\} \subset G \otimes H$$

とあると $G \otimes H \equiv \sum_R \oplus H_R$ である。

$t \in A$ および $h \in G$ に対して $G \otimes H$ 上の作用素を

$$\hat{t} : \hat{t} \cdot \sum g \otimes x_g = \sum g \otimes g(t)x_g$$

$$\hat{U}_h : \hat{U}_h \cdot \sum g \otimes x_g = \sum gh^{-1} \otimes x_g = \sum g \otimes x_{gh}$$

と定義する. \hat{U}_h はユニタリ作用素で $\hat{U}_h \hat{t} \hat{U}_h^* = \hat{h}(t)$ を満たし, A の群 G の作用の空間表現を与える.

$G \otimes H$ 上で $\{\hat{a}, (a \in A); \hat{U}_g, (g \in G)\}$ から生成される v. N. 環を A と G の接合積といひ, $G \otimes A$ で表わす. これは A の表現空間 H のとり方には関係しないこと ([11]) および $t \in G \otimes A$ は

$$(9) \quad t = \sum_g \hat{U}_g \hat{t}_g, \quad \hat{t}_g = e(\hat{U}_g^* t) \in \hat{A}$$

とフーリエ展開されること ([1]) が知られている. ここで

$e(t)$ は, P_g を $G \otimes H$ から H_g への射影として

$$(10) \quad e(t) = \sum_g P_g t P_g$$

で与えられる, $e(G \otimes H)$ より \hat{A} への写像である.

$P_g \in \hat{A}$, $\sum_g P_g = 1$ であるから, e は $G \otimes A$ を \hat{A} の上に写像し

$$(i) \quad e(\hat{a}) = \hat{a}, \quad (\hat{a} \in \hat{A}); \quad (ii) \quad e(\hat{U}_g) = 0, \quad (g \in G, g \neq 1)$$

$$(iii) \quad t \geq 0 \text{ のとき } e(t) \geq 0; \quad (iv) \quad \hat{a} \in \hat{A} \text{ のとき } e(\hat{a}t) = \hat{a}e(t),$$

$$e(t\hat{a}) = e(t)\hat{a}$$

を満たすので, e を $G \otimes A$ から \hat{A} への expectation といふ. e は normal, faithful である. なぜなら $e(t^*t) = 0$ とあると

$$(tP_g)^*(tP_g) = P_g t^* t P_g = P_g \left(\sum_h P_h t^* t P_h \right) P_g = P_g e(t^*t) P_g = 0$$

から $t P_g = 0$. よって $t = 0$.

3. v. N. 環のガロア拡大と基本定理

G はヒルベルト空間 H 上の v. N. 環 A に作用する自由自己同型の可付番群で, $g \in G$ による A の自己同型は H 上のユニタリ作用素 u_g によって空間表現されるものとする. A の G -不変元のなる部分環 $\{a \in A \mid g(a) = a, g \in G\} = B$ とすると, B の可換子環 B' は $\{a', (a' \in A'); u_g, (g \in G)\}$ から生成される v. N. 環である. 一方 $G \otimes A'$ は $G \otimes H$ 上で $\{\hat{a}', (a \in A); \hat{u}_g, (g \in G)\}$ から生成される環である.

定義. H 上の B' と $G \otimes H$ 上の接合積 $G \otimes A'$ が

$$a' \longleftrightarrow \hat{a}'; \quad u_g \longleftrightarrow \hat{u}_g$$

なる同型対応で代数的に同型になるとき, A は G をガロア群とする B のガロア拡大である という.

定義からは A が B のガロア拡大であるかどうかは A の表現空間 H のとり方に関係するように見えるが, つぎの定理によって実際は H のとり方に関係しないことがわかる.

定理 1. G を v. N. 環 A の自由自己同型の可付番群とすると, つぎの条件は同値である.

(a) A 内に射影 $P_g, (g \in G)$ が存在して

$$\sum_g P_g = 1, \quad P_g \perp P_h, (g \neq h), \quad g(P_h) = P_{hg^{-1}}$$

(b) A 内には

$$\sum_i p_i g(p_i) = \begin{cases} 0 & (g \neq 1) \\ 1 & (g = 1) \end{cases}$$

を満たす射影の族 $\{p_i\}$ が存在する.

(c) B' より A' への faithful, normal な expectation e が存在する.

(d) A は G をガロア群とする B のガロア拡大である.

(e) G を自己同型群にもつ $v. N.$ 環 C が存在し, その接合積から B' への $\varphi(C) = A$, $\varphi(\hat{u}_g) = u_g$ を満たす normal な homomorphism φ が存在する.

証明. (a) \Rightarrow (b). 明らか.

(b) \Rightarrow (c). $t \in B'$ に対して $e(t) = \sum_i p_i t p_i$ と定めると, $t \in A'$ に対して $e(t) = t$, (b) から $e(u_g) = 0$ であるから, e は B' から A' への faithful, normal な expectation である.

(c) \Rightarrow (d). まず $g \neq 1$ のとき $e(u_g) = 0$. 仮定から $t \in A'$ に対して

$$e(u_g)t = e(u_g t) = e(g(t)u_g) = g(t)e(u_g).$$

g が自由自己同型であることから, $e(u_g) = 0$.

p を A' 上の faithful normal positive linear functional とすると, p を $p = p \circ e$ と B' 上の f. n. p. l. f. に拡大するこゝが出来る. B' を p -ノルムによつて完備化したヒルベルト空間

K 上は B' を表現し, y をその s.g. ベクトルとする.

一方 A' の p -ノルムによる完備化を H' とし, A' をその上に表現したときの s.g. ベクトルを x とする. A' のこの表現を用いて $G \otimes H'$ 上で接合積 $G \otimes A'$ をつくと, $1 \otimes x$ はその s.g. ベクトルとなる.

$$A = \{ \sum t_g u_g, (t_g \in A') \} |_K, \quad B = \{ \sum \hat{t}_g \hat{u}_g, (t_g \in A') \} |_{G \otimes H'}$$

とすると, $A|_Y, B|(1 \otimes x)$ はそれぞれ $K, G \otimes H'$ で稠密である.

$$t y = \sum t_g u_g y \longrightarrow \sum \hat{t}_g \hat{u}_g (1 \otimes x) = \sum g^{-1} \otimes g^{-1}(t_g) x$$

とすると

$$\begin{aligned} \|t y\|_K^2 &= p(t^* t) = p(e(t^* t)) = p[e((\sum_g t_g u_g)^*(\sum_h t_h u_h))] \\ &= p[e(\sum_{g,h} g^{-1}(t_g^* t_h) u_{g^{-1}h})] = p[\sum_{g,h} g^{-1}(t_g^* t_h) e(u_{g^{-1}h})] \\ &= p[\sum g^{-1}(t_g^* t_g)] = \sum \|g^{-1}(t_g) x\|_H^2 = \|\sum g^{-1} \otimes g^{-1}(t_g) x\|_{G \otimes H'}^2 \end{aligned}$$

となるので, V を K より $G \otimes H'$ へのユニタリ作用素に拡大できる.

$$V t V^* = \hat{t}, (t \in A') \quad ; \quad V u_g V^* = \hat{u}_g, (g \in G)$$

が成り立つので, V は K 上の B' と $G \otimes H'$ 上の $G \otimes A'$ の同型を与え, A は G を加群とする B の加群拡大となる.

(d) \Rightarrow (e). 明らか.

(e) \Rightarrow (a). はじめ B' は g. ベクトル $y \in H$ をもつとする. このとき $f(t) = \langle \varphi(t)y, y \rangle_H, t \in G \otimes \mathbb{C}$ と定義すると, $f(t)$ は $G \otimes \mathbb{C}$ 上の p.l.f. である.

C はヒルベルト空間 K 上に表現され, s. g. ベクトル x をもてば, $G \otimes C$ は $G \otimes K$ で $(1 \otimes x)$ を s. g. ベクトルにもつ. このような表現では $z \in G \otimes K$ で $f(t) = \langle tz, z \rangle_{G \otimes K}$ と表ゆすことが出来る.

$t \in G \otimes C$ に対し $v(tz) = \varphi(t)y$ によって $(G \otimes C)z$ より $B'y$ への写像を定義すると

$$\|\varphi(t)y\|_H^2 = \langle \varphi(t^*t)y, y \rangle_H = f(t^*t) = \langle t^*tz, z \rangle_{G \otimes K} = \|tz\|_{G \otimes K}^2$$

であるから, v は $[(G \otimes C)z]$ より $H \equiv [B'y]$ へのユニタリ作用素に拡大される.

$t, t' \in G \otimes C$ で $\varphi(t) = \varphi(t')$ であれば

$$\|(t-t')z\|_{G \otimes K}^2 = \|\varphi(t-t')y\|_H^2 = 0$$

であるから $tz = t'z$, すなわち $t \in B'$ に対し $\varphi^{-1}(t)z$ は well-defined である.

p を $G \otimes K$ から M への射影とすると, M は $G \otimes C$ で不変であるから $p \in (G \otimes C)'$ で, 作用素 v は $(G \otimes C)|_M$ と $B'|_H$ の空間同型を与える. たゞなら $t \in G \otimes C$, $s \in B'$ に対し

$$(vtv^*)(sy) = vt(\varphi^{-1}(s)z) = v(t\varphi^{-1}(s)z) = \varphi(t)(sy).$$

よって $vtv^* = \varphi(t)$.

φ は C を A' 上に写像するから $C|_M$ と $A'|_H$ の空間同型を与える. よって $(pCp)' = (C|_M)'$ と $A'|_H$ とは同型である. p'_g を $G \otimes K$ から $g \otimes K$ への写像とすると

$$P P'_g P \subset P C' P = (P C P)'.$$

ゆえに $P_g = V P P'_g P V^* \in A$. よって $\{P_g, (g \in G)\}$ は互に直交して, 和が 1 となる射影の族で

$$\begin{aligned} g(P_R) &= U_g P_R U_g^* = (V \hat{U}_g V^*) (V P P'_R P V^*) (V \hat{U}_g^* V^*) \\ &= V (\hat{U}_g P P'_R P \hat{U}_g^*) V = V P (\hat{U}_g P'_R \hat{U}_g^*) P V^* = V P P'_{Rg} P V^*. \end{aligned}$$

B' が g ベクトル γ をもたないし ε には, おのおの B' が g ベクトルをもつようは $H = [B'\gamma_1] \oplus [B'\gamma_2] \oplus \dots$ と直交分解ある. $[B'\gamma_n]$ への射影を p_n とすると, $p_n \in B$ で p_n は G の作用で不変である. $B' \rightarrow p_n B' p_n$ は準同型写像で $p_n B' p_n$ は条件 (c) を満たす. よって互に直交し, 和が p_n となる $p_n H$ への射影 $P_g^{(n)}$ が存在して $U_g P_R^{(n)} U_g^* = P_{Rg}^{(n)}$ となる. $P_g = \sum_n P_g^{(n)}$ とすれば (a) の条件を満たす射影となる.

A の部分環で G の部分群の不変元の集合になつてゐるものはつぎのように特徴づけられる.

定理 2. $v.N.$ 環 A は群 G をガロア群とする B のガロア拡大とする. また A への G の作用は A の表現空間 H 上で空間表現で与えるものとする. このとき C を $B \subseteq C \subseteq A$ なる A の部分 $v.N.$ 環とすると, C につぎのつぎの条件は同値である.

- (a) C は G の部分群 H の不動元の集合である: $C = A^H$.
- (b) C の中に互に直交する射影の族 $\{P_i\}$ がとれ, つぎの

関係を満足する:

$$\sum P_i g(P_i) = \begin{cases} 1 & (g|_C = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (g|_C \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- (C) B' から C' への faithful, normal な expectation f が存在して次式を満たす:

$$f(u_g) = \begin{cases} u_g & (g|_C = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (g|_C \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

定理 1, 2 の準備のもとに以下の定理が証明される.

定理 3. (基本定理)

v. N. 環 A は G をガロア群とする B のガロア拡大とする. このとき

- (a) G の部分群 H にぞくする自己同型で不変な A の元の全体を C とすると, A は H をガロア群とする C のガロア拡大になる.
- (b) 逆に C を $B \subseteq C \subseteq A$ で定理 2 の条件を満たす A の部分 v. N. 環とすると, C に対して G の部分群 $H = \{g \in G \mid g|_C = 1\}$ とすると, C は H の不変元の全体となる.
- (c) G の部分群 H に対応する A の部分環 C が G にぞくするすべての A の自己同型で不変 ($g(C) = C$) になるための必要十分条件は H が G の不変部分群であることである. このとき C は G/H をガロア群とする B のガロア

拡大となる。

II - ファクターの場合には B の元を不変にする A の自己同型はガロア群 G にぞくあるものに限られたが、一般の $v. N.$ 環のときは少し複雑となり、つぎの定義が必要になる。

定義. G を $v. N.$ 環 A の自己同型の群, $\{p_g, (g \in G)\}$ を互に直交する中心射影の族で $\sum_g p_g = 1$ とする. $t \in A$ に対して

$\theta(t) = \sum_g g(t) p_g$ とすると, $\theta(t)$ は A の自己同型になる. この形の A の自己同型の群を, H. Dye [2] に従い, G から生成された full group とよび, $[G]$ で表わすことにする.

定理 4. $v. N.$ 環 A は G をガロア群とする B のガロア拡大とする. このとき B の元を不変にする A の自己同型の全体は群 $[G]$ である.

4. ガロア拡大の例

つぎの 2 つの定理によつて $v. N.$ 環にガロア拡大の例が数多く存在することが保証される.

定理 5. G を $v. N.$ 環 A に作用する自由自己同型の有限群, B をその不動元の環とすると, A は G をガロア群とする B のガロア拡大である.

定理 6. G は $v. N.$ 環 A に作用する自由自己同型の可付番群とする. A が properly infinite のときは, 必要に応じて $g \in$

G の作用は A の内部自己同型を補って、ガロア条件を満たすように $G \pm A$ に作用させることが出来る。

しかし G が 3 つの条件 (1) G の無限群 (2) G はガロア群 (3) G は A の f. n. p. l. f. を不変に保つ を同時に満足することは不可能なことが示されるので、有限型ファクターに作用する自由自己同型群がガロア群であるのはそれが有限群かつそのとまのみに限られる。また無限群が有限測度空間 (X, m) に自由保測変換として作用すると、それが可換 v. N. 環 $L^{\infty}(X)$ に惹起する自由自己同型群はけしてガロア群にはならないことになる。

5. 正規基定理と拡張定理

一般の v. N. 環のガロア拡大ではつぎの形の正規基定理と拡張定理が成り立つ。

定理 7. (正規基定理)

A は G をガロア群とする B のガロア拡大, $\{p_g\}$ は定理 1 (a) に示された射影の族とする。

(a) 射影の組 $\{p_g, p_h\}$ に対応して $t \in A$ には $p_h t p_g = p_h t_{h,g} t_g$ を満たす $t_{h,g} \in B$ が定まる。この $t_{h,g}$ はこの条件と $p_h t_{h,g} p_g = 0, (h \neq g)$ とから一意に決定される。この

こゝを $t \sim \{t_{R,g}\}$ で表わし, $S \sim \{S_{R,g}\}$ とおくと

$$(t+S)_{R,g} = t_{R,g} + S_{R,g}, \quad (tS)_{R,g} = \sum_k t_{R,k} S_{k,g}$$

$$(t^*)_{R,g} = (t_{g,R})^*, \quad (R(t))_{R,g} = t_{Rk, gk}, \quad (k \in G)$$

が成り立つ。

(b) G が有限群または $\{P_g\} \subset \Sigma(A)$ (A のセーター) のときは
 は (a) の t の行列表示は $t = \sum t_g P_g$, ($t_g \in B$) で置え換えられ
 る。係数 t_g は条件 $t_g P_g = t P_g$ から一意に定まる。

定理 8. (拡張定理).

A は G をガロア群とする B のガロア拡大, Q_1, Q_2 は中間の
 $v. N$ 環で Q_1 は定理 2 の条件を満たすとする。このとき B の元
 を不動にする Q_1 より Q_2 への同型写像は $[G]$ にぞくする A の自己
 同型に拡大される。

References

1. W.Arveson:Analyticity in Operator Algebra,Amer.Jour.Math.89 (1967)578-642.
2. H.Dye:On Groups of Measure Preserving Transformations I, Amer.Jour.Math. 81 (1954) 119-159.
3. V.Ja.Golodec:On von Neumann's Aproximately finite algebras with finite trace, Dokl.Akad.Nauk SSSR Tom 181 (1968)no.6.
4. M.Henle:Galois Theory of W^* Algebras, unpublished.
5. R.Kallman:A Generalization of Free Action,Duke Math.Jour. 36 (1969) 781-789.
6. M.Nakamura and Z.Takeda:On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras,Proc.Japan Acad. 34 (1958) 489-494.
7. M.Nakamura and Z.Takeda:GA Galois theory for finite factors Proc.Japan Acad. 36(1960) 258-260.
8. M.Nakamura and Z.Takeda:On the Fundamental Theorem of Galois Theory for Finite Factors.Proc.Japan Acad.36(1960)313-318.
9. Z.Takeda:On the Extension Theorem of the Galois Theory for Finite Factors.Proc.Japan Acad. 36(1961)78-82.
10. Z.Takeda:On the Normal Basis Theorem of the Galois Theory for Finite Factors.Proc. Japan Acad.37(1961)144-148.
11. G.Zeller-Meier:Produits Croises d'une C^* -Algebre par un Groupe d'automorphisms,Jour.de Math.Pures et Appliquées 47(1968) 101-239.