数理解析研究所講究録
105巻 1971年 40-52

二点接続問題

広島大 理　河野實彦

1　単独線型常微分方程式

$$(1)\qquad t^{n}\frac{d^{n}x}{dt^{n}}=\sum_{l=1}^{n}t^{n-l}\left(\sum_{r=0}^{2l}a_{l,r}t^{r}\right)\frac{d^{n-l}x}{dt^{n-l}}$$

に関する大域解について考察する。

上の微分方程式は複素全平面において $t=0$ で確定特異点を，$t=\infty$ で rank 2 の不確定特異点を持っている。先ず，それぞれの特異点の近傍での解について述べておこう。

確定特異点 $t=0$ の近傍においては，

$$(2)\qquad x_j(t)=t^{\rho_j}\sum_{m=0}^{\infty}G_j(m)t^{m}\qquad (j=1,2,\dots,n)$$

で表現される基本解が存在する事実は周知の事であろう。ここで，ρ_j は特性方程式

(3) $$E(\rho) = [\rho]_n - \sum_{l=1}^{n} a_{l,0}\,[\rho]_{n-l} = 0$$

$$[\rho]_p = \rho(\rho-1)\cdots(\rho-p+1)$$

の根で $\rho_j - \rho_k \neq$ 整数 $(j \neq k)$ と仮定しておく。

他方，不確定特異点 $t=\infty$ の近傍においては，ある一つの $t=0$ に中心を持つ扇状領域 S において，基本解 $x_S^k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ が存在し，それら解の行動を表現するものとして，

(4) $$x_S^k(t) \doteqdot x^k(t) \quad \text{as } t \to \infty \quad \text{in } S$$

なる漸近関係が成立つ事も良く知られた結果である。ここで，$x^k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ は微分方程式(1)の形式解で

(5) $$x^k(t) = \exp\left(\frac{\lambda_k}{2}t^2 + \alpha_k t\right) t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s)\, t^{-s}$$

なる形を有す。特性定数 $\lambda_k, \alpha_k, \mu_k$ について説明を加えれば，λ_k は特性方程式

(6) $$F(\lambda) = \lambda^n - \sum_{l=1}^{n} a_{l,2l}\,\lambda^{n-l} = 0$$

の根で，$\lambda_j \neq 0$，$\lambda_j \neq \lambda_k$ $(j \neq k)$ と仮定する。

すると，α_k, μ_k は次の式によって決められる定数である。

$$(7) \qquad \alpha_k = \sum_{l=1}^{n} a_{l,2l-1} \lambda_k^{n-l} \Big/ F'(\lambda_k)$$

$$(8) \qquad \mu_k = \Big\{ -\binom{n}{2} (\lambda_k^{n-1} + \lambda_k^{n-2} \alpha_k^2)$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} a_{l,2l} \binom{n-l}{2} (\lambda_k^{n-l-1} + \lambda_k^{n-l-2} \alpha_k^2)$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} a_{l,2l-1} (n-l) \lambda_k^{n-l-1} \alpha_k$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} a_{l,2l-2} \lambda_k^{n-l} \Big\} \Big/ F'(\lambda_k) .$$

上の特性定数 $\rho_j, \lambda_k, \alpha_k, \mu_k$ の決め方からわかる事は微分方程式 (1) に一つの不変式が存在する事である，それは

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_k + n(n-1)$$

であり，この関係式は後に重要な役割を演ずる事になる。

さて，話を元に戻して一つの扇状領域 S における基本解 $x_S^k(t)$ の漸近行動は一般に S に依存する，即ち $x_S^k(t)$ は S と異なった

扇状領域 S' においては もはや $x^k(t)$ を その漸近展開式 として 持たないのである。 この事実は Stokes 現象と 呼ばれている。
こうした Stokes 現象の 解明にも，大域解の構成が 必要であろう。 そこで 大域解の構成の 一つの 方法として，接続 という 手段が 浮び上ってくる。 それは，不確定特異点の 近傍における 基本解 $x^k_S(t)$ を，確定特異点の 近傍における 基本解 $x_j(t)$ の 一次結合で 表現しようというのである。

$$(10)\qquad x^k_S(t) = \sum_{j=1}^{n} C^k_j(S)\, x_j(t) \qquad \text{in } S$$

における 定数 $C^k_j(S)$ $(j,k=1,2,\dots,n)$ を 決定してやれば 良い。

そこで，逆に 収束巾級数解 $x_j(t)$ の 任意の扇状領域 S における 漸近行動を 調べる事により，例えば

$$(11)\qquad x_j(t) \cong \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_j(S)\, x^k(t) \qquad \text{as } t\to\infty \text{ in } S$$

なる関係式が 得られたとすれば，定数 $C^k_j(S)$ は $\Gamma^k_j(S)$ から 直ちに 導かれるし，その上 先の Stokes 現象も

$$(12)\qquad x_S^k(t) \cong \sum_{j=1}^{n} C_j^k(S) \sum_{l=1}^{n} T_j^l(S')\, x^k(t) \quad \text{as } t\to\infty \text{ in } S'$$

なる関係式から解明される事になる。

結局、我々の目的としては、巾函数と整函数との積として表現された確定特異点の近傍における基本解 $x_j(t)$ を調べ、定数 $T_j^k(S)$ $(j,k=1,2,\ldots,n)$（Stokes 係数）を決定するという事になろう。

2. 一般に整函数の $t=\infty$ における行動を知るには、その展開式の係数を綿密に調べる必要がある。その意向にそって、上の微分方程式 (1) の解 $x_j(t)$ について言えば、その展開式 (2) の係数 $G_j(m)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ は

$$(13)\qquad [\rho_j+m]_n\, G_j(m) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=0}^{2l} a_{l,r}\,[\rho_j+m-r]_{n-l}\, G_j(m-r)$$

なる $2n$ 階差分方程式を満たしている事は容易にわかるが、さてその後どう解析するか。

ここで、我々は $2n$ 階差分方程式 (13) の解 $G_j(m)$ の、低階の差分方程式の解による展開表現を試みるのである。余談であるが、こうした研究は Fuchs 型微分方程式については、K. Heun

A. Erdélyi の論文に見られる。Heun型微分方程式の解は超幾何函数により展開出来るし超幾何函数が巾級数展開されるのは巾函数が二つの確定特異点を持つ微分方程式の解であるからである。

低階の差分方程式としては2階の差分方程式

$$(14) \qquad (m+\rho_1-\mu_k)\, g_1^k(m) = \alpha_k\, g_1^k(m-1) + \lambda_k\, g_1^k(m-2)$$

を導入する。これは微分方程式の不確定特異点の rank により必然的に導かれるものであり基本差分方程式と呼んでも良かろう。

さて展開の話に入るが，その前に形式解 $x^k(t)$ の展開係数について説明しておかなければならない。いきなり(5)式を微分方程式に代入しその係数 $h^k(s)$ の満たす差分方程式を導こうと努力しても徒労に終りそうなので，先ず

$$(15) \qquad x_p^k(t) = t^{-p}\frac{d^p x^k}{dt^p} = \exp\left(\frac{\lambda_k}{2}t^2 + \alpha_k t\right) t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\infty} h_p^k(s)\, t^{-s}$$

とおいて，$h_p^k(s)$ に関する差分方程式を導びく。こうすると

$$(16) \qquad h_p^k(s) = \lambda_k\, h_{p+1}^k(s) + \alpha_k\, h_{p+1}^k(s-1) + (\mu_k+p+1-s)\, h_{p+1}^k(s-2)$$

$$(17)\qquad h_n^k(s) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=0}^{2l} a_{l,r}\, h_{n-l}^k(s+r-2l)$$

の二つの差分方程式が得られる。そこで，(16)式からは

$$(18)\qquad h_p^k(s) = \sum_{q=0}^{2p}\left\{\sum_{r=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]}\binom{p}{q-r}\lambda_k^{p-q+r}\alpha_k^{q-2r}H^k(p,q;r;s)\right\}h^k(s-q)$$

なる表現式が得られるので，これを(17)式に代入すれば $h^k(s)$ のみたす差分方程式が得られるという事になる。

準備が出来たので

$$(19)\qquad f_{j,p}^k(m) = \sum_{s=0}^{\infty} h_p^k(s)\, g_j^k(m+s) \qquad (p=0,1,\ldots,n)$$

なる展開式を考えよう。

(16)(17)式の両辺に $g_j^k(m+s)$ をかけて s について 0 から ∞ までの和を考えれば

$$(20)\qquad f_{j,p}^k(m) = (m+\rho_j+p+1)\, f_{j,p-1}^k(m+2)$$

$$(21)\qquad f_{j,n}^k(m) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=0}^{2l} a_{l,r}\, f_{j,n-l}^k(m+2l-r)$$

が得られ，更に(20)から得られる

$$(22)\qquad f_{j,p}^k(m) = [m+\rho_j+2p]_p\, f_{j,0}^k(m+2p)$$

を (21) 式に代入すれば

$$(23)\quad [m+\rho_j+2n]_n\, f^k_{j,0}(m+2n) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=0}^{2l} a_{l,r}\,[m+\rho_j+2n-r]_{n-l}\, f^k_{j,0}(m+2n-r)$$

を得る。これは取りも直さず、$f^k_{j,0}(m)$ が差分方程式 (13) の特殊解である事を示しているのである。基本差分方程式 (14) には二つの独立な解が存在するから、結局 $2n$ 個の特殊解が得られた事になる。そこで上の形式的計算に意味づけをしなければならない。

(i) $f^k_{j,p}(m)$ $(p=0,1,2,\ldots,n)$ は well-defined であるか。

(ii) $2n$ 個の特殊解が差分方程式 (13) の基本解をなすか。

肯定的答を得るためには (i) では級数 (19) の収束性を示さなければならないし (ii) では Casorati-行列を検討する訳であるが、それには $g^k_1(m)$, $h^k_p(s)$ の, m, s が充分大きいときの行動を調べておく必要がある。計算は省略するが、こうして次の結果を得る事が出来る。

<u>定理</u>　係数 $G_j(m)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ は $f_j^k(m)\equiv f_{j,0}^k(m)$, $f_j^{k*}(m)\equiv f_{j,0}^{k*}(m)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ の一次結合で表現される。

$$(24)\qquad G_j(m)=\sum_{k=1}^{n}\Pi_j^k f_j^k(m)+\sum_{k=1}^{n}\Pi_j^{k*}f_j^{k*}(m)$$

ここで，Stokes 係数 Π_j^k, Π_j^{k*}, は次の一次式によって，決定される定数である。

$$\begin{pmatrix} G_j(0)\\ G_j(-1)\\ \vdots\\ \vdots\\ G_j(-2n+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_j^1(0) & \cdots & f_j^n(0) & f_j^{1*}(0) & \cdots & f_j^{n*}(0)\\ f_j^1(-1) & \cdots & f_j^n(-1) & f_j^{1*}(-1) & \cdots & f_j^{n*}(-1)\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_j^1(-2n+1) & \cdots & f_j^n(-2n+1) & f_j^{1*}(-2n+1) & \cdots & f_j^{n*}(-2n+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Pi_j^1\\ \vdots\\ \Pi_j^n\\ \Pi_j^{1*}\\ \vdots\\ \Pi_j^{n*}\end{pmatrix}$$

3　さて　二点接続問題の話に入ろう。

上の結果によって，微分方程式 (1) の収束巾級数解 $x_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ は，下で定義される $2n$ 個の函数 $x_j^k(t)$, $x_j^{k*}(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ の一次結合として表わされる。即ち

$$(25)\qquad x_j(t)=t^{\rho_j}\sum_{m=0}^{\infty}G_j(m)\,t^m$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Pi_j^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_j^k(m)\, t^{m+\rho_j} \right) + \sum_{k=1}^{n} \Pi_j^{k*} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_j^{k*}(m)\, t^{m+\rho_j} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Pi_j^k\, x_j^k(t) + \sum_{k=1}^{n} \Pi_j^{k*}\, x_j^{k*}(t)$$

ここで，

$$(26) \qquad x_j^k(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_j^k(m)\, t^{m+\rho_j}$$

$$(27) \qquad x_j^{k*}(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_j^{k*}(m)\, t^{m+\rho_j}$$

更に，上の巾級数展開式の係数 $f_j^k(m)$, $f_j^{k*}(m)$ は，基本差分方程式 (14) の解による級数展開式で与えられたことを考慮すれば，例へば

$$(28) \qquad x_j^k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} h^k(s)\, g_j^k(m+s) \right) t^{m+\rho_j}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s) \left(\sum_{m=0}^{\infty} g_j^k(m+s)\, t^{m+\rho_j} \right)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s)\, x_j^k(t, s)$$

となる。そこで，次の段階として，函数

$$(29) \qquad x_j^k(t, s) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} g_j^k(m+s)\, t^{m+\rho_j}$$

の解析を行う。実際，函数 $x_j^k(t,s)$ は簡単な微分方程式

$$(30) \qquad t\,\frac{d\,x_j^k(t,s)}{dt} = \left[\lambda_k t^2 + \alpha_k t + (\mu_k - s)\right] x_j^k(t,s)$$
$$+ \lambda_k\, g_j^k(s-1)\, t^{\rho_j+1} + (s+\rho_j-\mu_k)\, g_j^k(s)\, t^{\rho_j}$$

を満たしていることを知り、求積法により次のような積分による表現が得られる。

$$(31) \qquad x_j^k(t,s) = \lambda_k\, g_j^k(s-1)\, t^{\rho_j+1}\, \chi\!\left(\sqrt{\lambda_k}\,t : s-\mu_k+\rho_j+1 : \frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)$$
$$+ (s+\rho_j-\mu_k)\, g_j^k(s)\, t^{\rho_j}\, \chi\!\left(\sqrt{\lambda_k}\,t : s-\mu_k+\rho_j : \frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)$$

ここで

$$(32) \qquad \chi(t:\nu:\gamma) = \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}t^2(1-\tau^2) + \gamma t(1-\tau)\right)\tau^{\nu-1}\,d\tau .$$

結局、微分方程式(1)の収束巾級数解 $x_j(t)$ の解析は、(32)の積分によって定義される函数 $\chi(t:\nu:\gamma)$ の解析へと移行したことになる。このようにして、次の定理を得る。

定理 (i) $\rho_j - \rho_k \neq$ 整数 $(j \neq k,\ j, k = 1, 2, \ \ , n)$

(ii) $\rho_j - \mu_k \neq$ 整数 $(j, k = 1, 2, \ \ , n)$

(iii) $0 < \dfrac{|\lambda_k|}{|\lambda_j - \lambda_k|} < \dfrac{1}{2(L_k|\alpha_k|)^2} \qquad (j \neq k,\ j, k = 1, 2, \ , n)$

L_k : constants

を仮定する。

$$S_p = \bigcap_{k=1}^{n} \left\{ p\pi - \frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{\lambda_k}\, t \leq p\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

とおくと

(A) p が偶数のとき

$$(33) \qquad x_j(t) \cong \sum_{k=1}^{n} T_j^k e^{p(\rho_j - \mu_k)\pi i} \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left(\frac{\alpha_k^2}{2\lambda_k}\right) x^k(t)$$

$$+ O(t^{\rho_j + 1}) \qquad t \to \infty \ \text{in}\ S_p$$

(B) p が奇数のとき

$$(34) \qquad x_j(t) \cong \sum_{k=1}^{n} T_j^{k*} e^{(p+1)(\rho_j - \mu_k)\pi i + \pi i} \sqrt{2\pi}\, \exp\left(\frac{\alpha_k^2}{2\lambda_k}\right) x^k(t)$$

$$+ O(t^{\rho_j + 1}) \qquad t \to \infty \ \text{in}\ S_p$$

$$(j = 1, 2, \ \ , n)$$

が成立つ。

詳しくは

M. Kohno : A two point connection problem for n-th order single linear ordinary differential equations with an irregular singular point of rank two, to appear.

を参照されたい。