Title	On a Extension Theorem for Turning Point Problems (常微分方程式の解の定性的研究会報告集)
Author(s)	西本, 敏彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1971), 105: 18-28
Issue Date	1971-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/106321
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
105巻 1971年 18-28

On a extension theorem for turning point problems

千葉大 理　西本敏彦

§1. 序

正の微小パラメータ ε を含む微分方程式の解の $\varepsilon \to 0$ のときの性質が、考えている領域で一様に成り立たない場合の研究が特異摂動論と呼ばれており、応用数学または理論物理学の多くの問題がこの特異摂動論の研究に帰着される.

例えば最高階の微分に ε が掛っている場合、いわゆる境界層が現われて、解の漸近展開が境界を含めると一様には成りたたなくなる. また turning point problem では考える領域の内点 = turning point において解の漸近展開の一様性が成りたたない. さらに ε が最高階に掛っていなくても、無限領域で考える場合には特異摂動論ということができる.

そこで問題は境界層または turning point をも含めた領域における解の漸近展開であるが、当然この場合、単純な ε の巾級数による漸近展開は得られない.

ここで流体力学等でよく用いられている stretching and matching method についてのべる．これはまず境界を含まない領域における解の漸近展開（外部解）と独立変数の適当な stretching transformation によって境界のある近傍における漸近展開（内部解）が得られる．これらの外部解と内部解の関係が分ればよい．それには十分小なる任意の ε に対して外部解および内部解の存在領域が互いに重複することが示されればその共通領域で matching すればよい．ここで存在領域が互いに重複することを示す際、つぎの定理が応用される．

定理（Kaplun's Extension Theorem）

(i)　$F(x,\varepsilon)$ は $0<x\leqq x_0$，$0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$ で定義され

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\ \text{fixed}}} F(x.\varepsilon)=0 \qquad x>0$$

が任意の $x_1>0$ に対し $x_1\leqq x\leqq x_0$ で一様に成り立つならば $\delta_1(\varepsilon)>0$ が存在し

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_1(\varepsilon)=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F(x,\varepsilon)=0 \qquad \text{uniformly in } \delta_1(\varepsilon)\leqq x\leqq x_0$$

(ii)　$F(x.\ \varepsilon)$ 　$x_0\leqq x<\infty$ 　$0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F(x,\varepsilon)=0 \qquad \text{uniformly in } \ x_0\leqq x\leqq R$$

（Rは任意）

ならば $\delta_2(\varepsilon)$ が存在し

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_2(\varepsilon) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(x, \varepsilon) = 0 \qquad \text{uniformly in } x_0 \leqq x \leqq \delta_2(\varepsilon)^{-1}.$$

この定理の証明は例えば

W. Eckhaus On the foundations of the method of matched asymptotic approximations, J de Méca. vol.8 (1969) 265–300.

$\delta_1(\varepsilon)$ または $\delta_2(\varepsilon)$ を具体的に求めたりあるいは重複することを示すことは一般には大へんむずかしい．しかし多くの応用数学では数学的厳密さは不明であるがこの matching method は有用なものでありこの応用に関する論文や本は多い．

M.D. Van Dyke Perturbation Methods in Fluid Mechanics Academic Press (1964)

P.A. Lagerstrom and L.N. Howard and C.S. Liu Fluid Mechanics and Singular Perturbations, Acad. Press (1967)

J. D. Cole Perturbation Methods in Applied Mathematics Blaisdell Pub. (1968).

ここでの目的は turning point を含む2階常微分方程式の漸近解の存在領域を拡張することであり．これにより特性多辺形が2辺の場合も matching method により解決される．

§2 Local Turning Point Problems

原点において order q の turning point をもつ2階線型常微分方程式の原点の近傍における解の漸近展開を考える.

$$\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2} = f(x,\varepsilon)\, y$$

または vector form で

$$\text{(A)} \qquad \varepsilon \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f(x,\varepsilon) & 0 \end{bmatrix} y$$

関数 $f(x,\varepsilon)$ は領域 D:

$$|x| \leqq x_0 < 1 \qquad 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$$

で正則かつ $\varepsilon \to 0$ のとき ε の巾級数に漸近展開可能とする:

$$f(x,\varepsilon) \simeq x^q + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)\, \varepsilon^\nu$$

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=m_\nu}^{\infty} f_{\nu\mu}\, x^\mu, \qquad f_{\nu, m_\nu} \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, m_\nu \geqq 0)$$

問題は (A) の解の漸近展開を原点の近傍全体で求めることである. $q \leqq 2$ ならば comparison method により原点を含むある角領域で一様漸近展開が得られる. しかし $q \geqq 3$ の場合には一般に matching method を用いる. 原点の近傍 D の $x=0$ を含まないいくつかの部分領域において (A) の解の漸近展開が得られるが、それらの $x=0$ 自身における漸近展開を求めることを central connection problems という.

turning point $x=0$ に対する特性多辺形が唯一本の辺からなる場合は,

T. Nishimoto On the central connection problem at a turning point, Kōdai Math. Sem. Reports 22 (1970) 30〜44

つぎに特性多辺形が2本の辺から成る場合を考える. このことはつぎの簡単な不等式で表わされる.

$$2m_1 + 2 < q$$

最も簡単な場合すなわち $f(x,\varepsilon) = x^3 - \varepsilon$ なるときの研究が

M. Nakano and T. Nishimoto On a secondary turning point problem Kōdai Math. Sem. Reports 22 (1970) 355〜384

でなされている.

Iwano の理論に従がえば領域 D は 4つの型の部分領域にわかれその各々において異なる主要項をもつ, すなわち

(i) Outer domain D_1

$$D_1 \qquad M\varepsilon^{\rho_1} \leqq |x| \leqq x_0$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{q/2} \end{bmatrix} z \qquad (r = m_1 \text{ とする})$$

$$(\mathrm{A}_1) \qquad (\varepsilon x^{-\rho_1^{-1}}) x^{(q-2r)/2} \frac{dz}{dx} = A_1(x,\varepsilon) z$$

$$A_1(x,\varepsilon) \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=m_\nu}^{\infty} B_{\nu\mu} x^{(\nu-1)q+\mu-\nu r} (\varepsilon x^{-\rho_1^{-1}})^{\nu}.$$

ここで $B_{\nu\mu}$ は 2-2 定数行列である.

(ii) The first intermidiate domain D_2

$$D_2 \qquad m\varepsilon^{\rho_1} \leqq |x| \leqq M\varepsilon^{\rho_1} \quad (m \leqq |s| \leqq M)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\gamma_1} \end{bmatrix} z \qquad x = \varepsilon^{\rho_1} s$$

$$(A_2) \qquad \varepsilon^{1-\rho_1-\gamma_1} \frac{dz}{ds} = A_2(s,\varepsilon)\, z$$

$$A_2(s,\varepsilon) \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ s^q + f_{1r} s^r, & 0 \end{bmatrix} + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(s)\, \varepsilon^{\nu/(q-r)}$$

ここで $B_\nu(s)$ は 2-2 行列でその要素は s の多項式でその degree は高々 $(\nu+q)/(q-r)$ である.

(iii) The second intermidiate domain D_3

$$D_3 \qquad M\varepsilon^{\rho_2} \leqq |x| \leqq m\varepsilon^{\rho_1} \quad (M\varepsilon^{\rho_2-\rho_1} \leqq |s| \leqq m)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\frac{1}{2}} x^{\frac{r}{2}} \end{bmatrix} z \qquad x = \varepsilon^{\rho_1} s$$

$$(A_3) \qquad \varepsilon^{1-\rho_1-\gamma_1} s^{-r/2} \frac{dz}{ds} = A_3(s,\varepsilon)\, z$$

$$A_3(s,\varepsilon) \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{1r} + s^{q-r}, & 0 \end{bmatrix} + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_k(s) [s^{(\rho_1-\rho_2)^{-1}} \varepsilon]^{\rho_1 \nu}$$

ここで $B_k(s)$ は $s^{1/(q-2r-2)}$ の正則関数である.

(iv) Inner domain D_4

$$D_4 \qquad |x| \leqq M\varepsilon^{\rho_2} \quad (|s| \leqq M\varepsilon^{\rho_2-\rho_1},\ |t| \leqq M)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon^{\delta_2}\end{bmatrix}z \qquad x=\varepsilon^{\rho_2}s$$

$$(A_4)\qquad \frac{dz}{dt}=A_4(t,\varepsilon)z$$

$$A_4(t,\varepsilon)\simeq\begin{bmatrix}0 & 1\\ f_{1r}t^r & 0\end{bmatrix}+\sum_{\nu=1}^{\infty}B_\nu(t)\varepsilon^{\nu/(r+2)}$$

ここで $B_\nu(t)$ は t の多項式でその degree は高々 $(\nu+r)/(r+2)$.

m と M はある定数，また

$$\rho_1=\frac{1}{q-r}\quad \rho_2=\frac{1}{r+2}\quad \gamma_1=\frac{q}{2(q-r)}\quad \gamma_2=\frac{r+1}{r+2}.$$

D_3 および D_4 において存在する解の漸近展開の matching は丁度、方程式 (A_2) の turning point $s=0$ の近傍で matching することであり これは $s=0$ に対応する特性多辺形が一辺から成ることが分るので可能である．そこで問題は D_2 における漸近解と D_1 および D_3 において存在する漸近解との間の matching である．以下において方程式 (A_2) を少し一般化した方程式について Kaplun's Extension Theorem における $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$ を具体的に求めることにする．これらのことから全ての matching が可能となることが分る.

§3 方程式 (A_2) の研究

ここでは方程式 (A_2) をつぎの形に変形して考える.

(B) $$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p(x,\varepsilon) & 0 \end{bmatrix} y$$

$$p(x,\varepsilon) \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(x)\,\varepsilon^\nu$$

$$p_0(x) = x^q + p_{0\,q-1}x^{q-1} + \cdots + p_{0,0}$$

$$p_\nu(x) = p_{\nu,\nu\alpha}\,x^{\alpha\nu+\beta} + \cdots + p_{\nu,0} \qquad (\nu \geqq 1)$$

ここで h は正の整数，α, β は正の有理数，また $p_\nu(x)$ は x の多項式である．(A_2) ではつぎの値が対応している：

$$h = q-2r-2 \qquad \alpha = [2(q-r)]^{-1} \qquad \beta = q(q-r)^{-1}\ .$$

方程式(B) の漸近解はつぎのようにして求める。変換

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{p_0} & -\sqrt{p_0} \end{bmatrix} (1+\varepsilon Q_1)(1+\varepsilon^2 Q_2)\cdots(1+\varepsilon^{h+m}Q_{h+m})\,z_m$$

を施すことにより．z_m に関する方程式を ε^{m+h} の項まで対角化する．

$$\varepsilon^h \frac{dz_m}{dx} = \sqrt{p_0}\left\{ \sum_{\nu=0}^{h+m} D_\nu(x)\,\varepsilon^\nu + \varepsilon^{h+m+1} R_{h+m+1}(x,\varepsilon) \right\} z_m$$

Q_ν, D_ν は各々 antidiagonal，diagonal matrix でその要素は

$$\nu \leqq h \qquad Q_\nu(x), D_\nu(x) = L\left\{ \prod Q_1^{i_1} Q_2^{i_2} \cdots Q_\nu^{i_{\nu-1}} a_k \ ;\ i_1 + 2i_2 + \cdots + (\nu-1)i_{\nu-1} + k = \nu \right\}$$

$$\nu \geqq 1 \qquad Q_{\nu+h}(x), D_{\nu+h}(x) = L\left\{ \begin{array}{l} \prod Q_1^{i_1} \cdots Q_{\nu+h-1}^{i_{\nu+h-1}} a_k \ :\ i_1 + \cdots + (\nu+h-1)i_{\nu+h-1} + k = h+\nu \\ \prod Q_1^{i_1} \cdots Q_\nu^{i_\nu} Q_l'/\sqrt{p_0} \ :\ i_1 + \cdots + \nu i_\nu + l = \nu \end{array} \right\}$$

ここで L は { } の中の要素の一次結合を表わし，また

$a_k = p_k/p_0 \ (k \neq h,\ k=0,1,\cdots)$，$a_h = p_h/p_0 + p_0'/p_0^{3/2}$.

ここでつぎのようにおく．

$$\frac{\sqrt{p_0}}{\varepsilon^h}\left\{\sum_{\nu=0}^{h} D_\nu(x)\varepsilon^\nu\right\} = \begin{bmatrix} \gamma_h(x,\varepsilon) & 0 \\ 0 & -\gamma_h(x,\varepsilon)\end{bmatrix} - \frac{p_0'}{4p_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\gamma_h(x,\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_0}}{\varepsilon^h}\left\{1 + \frac{p_1}{2p_0}\varepsilon + \left(\frac{p_2}{2p_0} - \frac{1}{8}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2\right)\varepsilon^2 + \cdots + \frac{p_h}{2p_0}\varepsilon^h\right\}$$

$$\xi_h(x,x_0\varepsilon) = \int_{x_0}^{x} \gamma_h(x\ \varepsilon)\,dx\ ,\quad \Lambda_h(x,x_0,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \xi_h(x,x_0,\varepsilon), & 0 \\ 0 & -\xi_h(x,x_0\varepsilon)\end{bmatrix}$$

$$\xi_0(x\ x_0) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{p_0}\,dx$$

$$z_m(x,\varepsilon) = \hat{z}_m(x,\varepsilon)\, p_0^{-\frac{1}{4}} \exp\Lambda_h(x,x_0\varepsilon)$$

$$w_m(x,\varepsilon) = \hat{w}_m(x,\varepsilon)\, p_0^{-\frac{1}{4}} \exp\Lambda_h(x,x_0\varepsilon)$$

$$\hat{w}_m(x,\varepsilon) = \exp\int^{x} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{p_0}\, D_{h+j}(x)\varepsilon^j\,dx$$

$w_m(x\,\varepsilon)$ はある領域で $z_m(x,\varepsilon)$ の order m の漸近展開となっていることを証明する．そのために領域に関するつぎの定義をのべる．

(i) canonical regions.

$p_0(x)=0$ をみたす点を turning point という．turning point $\tilde{x}$ からでる Stokes curve とは

$$Re\ \xi(x\ x_0) = constant = Re\ \xi(\tilde{x},x_0)$$

によって定義される曲線である．Stokes curves の族は x_0，$p_0(x)^{\frac{1}{2}}$ の分枝のとりかた，および x_0 と x を結ぶ曲線のとりかたによらない．Stokes curves に関するいくつかの性質がつぎの文献でしらべられている．

M.A. Evgrafov and M.B. Fedoryuk, Asymptotic behavior of solutions of $w''(z) - p(z,\lambda)w = 0$ as $\lambda \to \infty$ in the complex z-plane, Uspehi Mat. Nauk 21 (1966), 3－50

これらの曲線族は x-plane を有限個の単連結無限領域に分ける．これらを Stokes regions と呼ぶ．$\xi(x, x_0)$ を x から ξ-平面への写像とすると，Stokes curves は ξ-平面の虚軸に平行な線分にうつることから Stokes region は ξ-平面の vertical strip $(a < Re\,\xi < b)$ かまたは half-plane $(Re\,\xi \gtrless a)$ にうつる．適当な隣り合う有限個の Stokes regions の $\xi(x, x_0)$ による像が ξ-平面において何本かの垂直な切口をのぞき ξ-平面全体になるとき，これらの Stokes regions の合併集合を canonical region と呼ぶ．canonical region の内部の任意の点に対し適当に無限遠にいく曲線をとればそれにそって $Re\,\xi$ は単調に $+\infty$，$-\infty$ にいくようにできる．

(ii) domain of influence

方程式 (B) の turning point x_0 の domain of influence とは x_0 における特性多辺形の最右上の辺の勾配を $-\rho_{x_0}^{-1}$ とすると

$$N_{x_0} : \quad |x-x_0| \leqq M \varepsilon^{\rho_{x_0}}$$

である．ここでMはある正の定数である．

§4　存在定理.

Δ : $\xi(x, x_0)$ に関する canonical region

Δ_d : Δ から各 turning point の domain of influences N をとりのぞいたもの　$\Delta_d = \Delta \cap (C-N)$, $C = x$-平面, $N = \bigcup_{x_0} N_{x_0}$

$$D(\Delta_d, \varepsilon) = \{ (x, \varepsilon) \quad x \in \Delta_d \ , \ |x^{\delta} \varepsilon| \leqq M \quad 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0 \}$$

ここで δ は後で定義される正の有理数

$\widehat{D}(\Delta_d, \varepsilon) = \{ (x, \varepsilon) \in D(\Delta_d, \varepsilon)$; 全ての $(x, \varepsilon) \in \widehat{D}(\Delta_d, \varepsilon)$ に対し点 $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ および x と $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ を結ぶ曲線 $\gamma_1(x\, x_1)$, $\gamma_2(x, x_2)$ が存在し $\mathrm{Re}\, \xi_h(x\, x_0\, \varepsilon)$ は γ_1, γ_2 上で単調非減少，単調非増加かつ $|x| \to \infty$ のとき $\mathrm{Re}\, \xi_h \to +\infty, -\infty$ とできる$\}$

$\widehat{D}(\Delta_d, \varepsilon)$ は $D(\Delta_d, \varepsilon)$ を少し縮少することにより得られる．さらに $|x| \to \infty$ ととき $\widehat{D}(\Delta_d, \varepsilon)$ は Δ に限りなく近づく．

定理　$\widehat{D}(\Delta_d, \varepsilon)$ において $K > 0$ が存在し

$$|\hat{z}_m - \hat{w}_m| \leqq \begin{cases} K \{ |x-x_0|^{-\rho_{x_0}^{-1}} \varepsilon \}^{m+1} & (M\varepsilon^{\rho_{x_0}} \leqq |x-x_0| \leqq m), \\ K \{ |x^{\delta} \varepsilon| \}^{m+1} & (|x-x_0| \geqq m \quad), \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} (h+1)(\alpha+\beta-g) + \frac{g}{2} + 1 & (\beta \geqq g), \\ (h+1)\alpha + \beta - g - \frac{g}{2} + 1 & (\beta < g) . \end{cases}$$