数理解析研究所講究録
106巻 1971年 189-196

$u_{tt}-\Delta u+u^p=0$ の弱解の構成法について

東大理 井上淳

§1. 序

Ω を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ, $\mathbb{R}^3$ の中の有界領域とする.
ここでは

$$
\text{(I.V.P.)}\qquad
\begin{cases}
u_{tt}-\Delta u+u^p=0 & \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\
u(x,0)=\varphi(x) & \\
u_t(x,0)=\psi(x) & \\
u(x,t)|_{\partial\Omega}=0 & \text{for } t\geq 0
\end{cases}
$$

なる問題を考える.

最近 W. A. Strauss [6] は (I.V.P.) に対し, 後に定義する弱解で energy 不等式をみたすものを構成した. 彼の方法は函数 u^p を Lipschitz 連続函数で近似した方程式を用い その解の中から compact argument で望みの弱解を作るというもので, その意味で (I.V.P.) に対する I. E. Segal [5] の考えに沿うものであるといってよいであろう.

我々の目的は, Strauss と同じ結果を別の近似法, 即ち, 方程式に $\varepsilon\Delta u_t$ なる項を付け加えるという操作

で近似解をつくり，あとは Strauss と同様の compact argument で証明しようというわけである．この小文では近似解の構成法をのみ述べようと思う．

さて，弱解の定義及び Strauss の定理を述べよう．

<u>定義</u>．各 t に対し，Ω のほとんど到る所定義された函数 $u(x,t)$ が <u>(I.V.P.) の弱解</u> とは

(i) u (resp. u_t) は値を $\mathring{H}^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)$) にもつ，t の弱連続函数

(ii) 任意の $\Phi(x,t)\in C_0^\infty(\Omega\times(0,\infty))$ に対し

$$\int_0^\infty\int_\Omega(-u_t\Phi_t+\nabla u\cdot\nabla\Phi+u^p\Phi)\,dx\,dt=0$$

をみたす．但し空間 $X=\mathring{H}^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$ の位相 $\|\ \|_X$ は $\|u\|_X=\|u\|_{H^1(\Omega)}+\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}$ で与えられているものとする．

<u>定理</u> (I.V.P.) の弱解 $u(x,t)$ が存在する．
更に，任意の t に対し

$$\int_\Omega\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)dx\leqq\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|\psi|^2+\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+\frac{\varphi^{p+1}}{p+1}\right)dx$$

なる energy 不等式が成り立つ．

注意．Strauss [6] と同様，u^p はもっと一般の $F(x,u)$，また他の境界条件，たとえば Neumann 或いは

第三種境界条件についても成立する.

§2. 近似方程式に対する古典解の構成

この節では Leray-Schauder の定理を用いて

(2.1)
$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+u^p-\varepsilon\Delta u_t=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

に対する解をつくる. 以下の方法は本質的に Dafermos [1] による.

定理を述べる前に, 函数空間を定義しよう.

<u>定義</u> $0<\beta<1$ とする. $C^{k+\beta}(\bar\Omega)$, $k=0,1,2,\cdots$ ($\bar\Omega=\Omega$の閉包) とは, k回連続微分可能な函数で, k回微分したものが指数 β の Hölder 連続なるものである.

$$|w(x)|_{k+\beta}\equiv\sum_{|\alpha|=0}^{k}\sup_{x\in\bar\Omega}|D^\alpha w(x)|+\sum_{|\alpha|=k}\sup_{x,x'\in\bar\Omega}\left\{\frac{|D^\alpha w(x)-D^\alpha w(x')|}{|x-x'|^\beta}\right\}$$

は $C^{k+\beta}(\bar\Omega)$ の norm を定める.

$H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\bar Q_T)$; $\bar Q_T=\bar\Omega\times[0,T]$ は $Q_T=\Omega\times[0,T]$ で連続で以下の量が有限な函数 $v(x,t)$ のなす Banach 空間である

$$\|v(x,t)\|_\beta\equiv\sup_{\bar Q_T}|v(x,t)|+\sup_{\substack{(x,t)\\(x',t')}\in\bar Q_T}\left\{\frac{|v(x,t)-v(x',t')|}{(|x-x'|^2+|t-t'|)^{\frac{\beta}{2}}}\right\}<\infty$$

$\|\cdot\|_\beta$ を用いて,

$$\|v\|_{1+\beta} \equiv \sum_{|\alpha|\le 1} \|D_x^\alpha v\|_\beta$$

$$\|v\|_{2+\beta} \equiv \sum_{|\alpha|\le 2} \|D_x^\alpha v\|_\beta + \|v_t\|_\beta$$

$$|||v|||_{1+\beta} \equiv \|v\|_{1+\beta} + \|v_t\|_{1+\beta}$$

$$|||v|||_{2+\beta} \equiv \|v\|_{2+\beta} + \|v_t\|_{2+\beta}$$

なる norms を定義し、それぞれの norm が定義され有限な函数空間を、$H^{1+\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q_T})$, $H^{2+\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q_T})$, $B^{1+\beta}(\overline{Q_T})$, $B^{2+\beta}(\overline{Q_T})$ と記す.

定理　$\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ とする. このとき (2.1) の一意解 $u(x,t) \in B^{2+\beta}(\overline{Q_T})$, $0<\beta<\frac{1}{2}$ が存在する. 更に u は超函数的微分 $D_x^\alpha u_{tt} \in L^2(Q_T)$, $|\alpha|=1$ をもつ.

定義　$\overline{Q_T}$ で定義された函数 $u(x,t)$ は, $u_t, u_{tt}, D_x^\alpha u$ $(|\alpha|\le 2)$ $D_x^\alpha u_t$ $(|\alpha|\le 2)$ が $C^0(\overline{Q_T})$ に属し (2.1) をみたすとき解とよばれる

命題 2.1　(2.1) の解は高々一つである

補題 2.2　$a(x,t) \in H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q_T})$, $0<\beta<1$, $f(x,t) \in H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q_T})$ $f(x,0)|_{\partial\Omega}=0$ とする. 更に $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. $u(x,t) \in B^{2+\beta}(\overline{Q_T})$ を

$$(2.2)\qquad u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u - \varepsilon\Delta u_t = f$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

なる解とする。このとき，β, ε, T に依存する定数 C があって

(2.3) $\quad |||u|||_{2+\beta} \leq C(\|f\|_\beta + |\varphi|_{2+\beta} + |\psi|_{2+\beta})$

が成立する。

（注意） $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ を仮定したが，単に φ, ψ, f が compatibility condition をみたすならばよい。

（証明） ここでは割愛する。ただ Ladyzhenskaya－Solonnikov－Uralceva [4] p.320 の定理を用いることに注意しておこう。

補題 2.3 上の補題 2.2 の仮定がみたされているとき (2.2) の一意解 $u \in B^{2+\beta}(\overline{Q}_T)$ が存在する。

（証明） いわゆる continuity method を用いる。

即ち $L_\lambda(u) \equiv u_{tt} - \varepsilon \triangle u_t - \lambda(\triangle u - a(x,t)u)$ と定義し S を λ の集合で，$L_\lambda u = f$ が解 $u \in B^{2+\beta}(\overline{Q}_T)$ で $u|_{\partial\Omega} = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ をみたすものとする。$0 \in S$ は明らか。

あと上の補題を用いて，S の開かつ閉なることを証明しこれより $1 \in S$ を示す。

さて mapping $\mho_\lambda : H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T) \longrightarrow H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ を次のように定める。

即ち $v \in H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ に対し $\mho_\lambda v$ を次の方程式の

解 $w = \mho_\lambda v$ として定める

$$(2.4)\quad \begin{cases} w_{tt} - \varepsilon\Delta w_t - \Delta w + v^{p-1}w = 0 \\ w(x,0) = \lambda\varphi(x) \\ w_t(x,0) = \lambda\psi(x) \\ w(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

以下．$\mho_\lambda$ が Leray-Schauder の定理の仮定をみたすことを check する．

補題 2.3 より $\mho_\lambda$ は well-defined で compact operator なることは明らか．

補題 2.4．v が $H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ の有界集合を動くとき，$\mho_\lambda v$ は λ に関し一様連続

補題 2.5．各 λ を fix するごとに，$\mho_\lambda$ は $H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ の中の連続作用素．

さて v を ある λ に関し $\mho_\lambda$ の不動点 i.e. $\mho_\lambda v = v$ とする

以下で v の λ に independent な a priori 評価を求める

補題 2.6．

$$\max_{0\le t\le T}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|v_t|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{v^{p+1}}{p+1}\right)dx \le M_1$$

$$\varepsilon\int_0^t\int_\Omega|\nabla v_t|^2\,dx\,dt \le M_1 \qquad \text{for any } 0\le t\le T$$

以下．ε φ, ψ, T に依り λ に無関係な定数を $M_\#$ で記す．

補題 2.7.

$$\int_\Omega |\Delta v(t)|^2 dx \leq M_2 \qquad 0 \leq {}^\forall t \leq T$$

補題 2.8

$$\max_{\overline{Q_T}} |v(x, t)| \leq M_3$$

補題 2.9. $v(x, t)$ は超函数的微分 $v_{x_j tt}$ $j = 1, 2, 3$ $\in L^2(Q_T)$ をもつ. 更に

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla v_{tt}|^2 dx dt \leq M_4$$

$$\int_\Omega v_{tt}^2 dx \leq M_5 \qquad \text{for each } t$$

補題 2.10

$$\int_\Omega |\Delta v_t|^2 dx \leq M_6$$

以上の評価より

補題 2.11. $0 < \beta < \frac{1}{2}$ なる β に対し.

$$\|v\|_\beta \leq M_7.$$

この補題より Leray-Schauder を用いて我々の定理をうる.

詳しい証明及び compact argument については [3] をみられたい.

文献

[1] C.M. Dafermos : The mixed initial-boundary value problem for the equations of non-linear one-dimensional viscoelasticity
J. of Diff. Eq. 6 71-86 (1969)

[2] J.M. Greenberg, R.C. MacCamy & V.J. Mizel : On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$
J Math Mech 17 707-728 (1968)

[3] A. Inoue : Another construction of a weak solution for $u_{tt} - \Delta u + u^p = 0$ to appear

[4] O.A. Ladyzhenskaya, V.A Solonnikov & N.N. Ural'ceva
Linear and quasi-linear equations of parabolic type
vol 23 American Math. Soc. Providence 1968

[5] I.E. Segal : The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction
Bull. Math. Soc. France 91 129-135 (1963)

[6] W.A Strauss : On weak solutions of semi-linear hyperbolic equations to appear