

非線形半群についての注意

早稲田大 教員 宮寺 功

X は Banach 空間, X_0 は X の空でない部分集合とする. つぎの (i) ~ (iii) を満たす作用素 $T(t): X_0 \rightarrow X_0$ の族 $\{T(t); t \geq 0\}$ を contraction semi-group on X_0 と呼ぶことにする.

- (i) $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|, t \geq 0, x, y \in X_0$.
- (ii) $T(0) = I, T(t+s) = T(t)T(s), t, s \geq 0$
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, x \in X_0$.

$\{T(t); t \geq 0\}$ の i.g. A_0 , w.i.g. A' をつぎの式により定義する.

$$A_0 x = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} (T(h)x - x)$$

$$A' x = w\text{-}\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} (T(h)x - x).$$

定義域 $D(A)$, 値域 $R(A)$ とも X の部分集合である

よる、必ずしも一価である作用素 A を考へる。かゝる A に対して

$$\|Ax\| = \inf \{ \|x'\|; x' \in Ax \}$$

$$A^\circ x = \{ x' \in Ax; \|x'\| = \|Ax\| \}$$

, $x \in D(A)$, とおく。

各 $x, y \in D(A)$, $x' \in Ax$, $y' \in Ay$ に対して

$$\operatorname{Re} (x' - y', s^*) \leq 0$$

を満足する $s^* \in F(x-y)$ が存在するとき、 A を dissipative operator といい、 \Rightarrow に $\operatorname{Re}(\cdot, \cdot)$ は (\cdot, \cdot) の実部を表わし、 $F(x) = \{ x^* \in X^*; (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \}$ 。

また、作用素 A のグラフが $X \times X$ において閉集合であるとき、 A を closed operator といい。

最近 Crandall and Liggett [3] は非線形半群の生成に関してつぎの著しい結果を与えた。

定理 I. A を dissipative operator とし、

$$(C_1) \quad R(I - \lambda A) \supset D(A), \quad \lambda > 0$$

を仮定する。このとき、つぎの (1), (2) を満足する

contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が

存在する.

- (1) $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} x$, $x \in R \cap \overline{D(A)}$, $t \geq 0$,
 ただし $R = \bigcap_{\lambda > 0} R(I - \lambda A)$,
 (2) $\|T(t)x - T(s)x\| \leq \|Ax\| |t - s|$, $x \in D(A)$, $t, s \geq 0$.

定理 II. A は closed dissipative operator とし,

$$(c_2) \quad R(I - \lambda A) \supset \text{co } D(A), \quad \lambda > 0$$

と仮定する, ただし $\text{co } D(A)$ は $D(A)$ の convex hull.
 $\{T(t); t \geq 0\}$ は定理 I に より与えられる contraction
 semi-group on $\overline{D(A)}$ とする.

$x \in \overline{D(A)}$ とする. 若し $T(t)x$ が $t_0 > 0$ で強微分可能
 ならば

$$(3) \quad T(t_0)x \in D(A), \quad [(d/dt)T(t)x]_{t=t_0} \in AT(t_0)x.$$

この定理から, X が回帰的 (reflexive) ならば各 $x \in D(A)$ に対して (3) が a. e. $t_0 (\geq 0)$ で成立する. 実際 $x \in D(A)$ のとき, (2) と X の回帰性から, $T(t)x$ は a. e. $t_0 (\geq 0)$ で強微分可能と存在するのである ([6]).

この小論の第 1 の目的はつぎのことである.

(a) 定理 II に おいて (c_2) と (c_1) に弱めることが出来る,

即ち A が closed dissipative で (C₁) を満たせば、定理 II の結論は成立している。

その証明はつぎの補助定理に基づく。補助定理を述べる前に少し準備をしておく。

関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle_s : X \times X \rightarrow (-\infty, \infty)$ を

$$\langle x, y \rangle_s = \sup \{ \operatorname{Re} (x, y^*) ; y^* \in F(y) \}$$

により定義する。

(4) $\langle \cdot, \cdot \rangle_s : X \times X \rightarrow (-\infty, \infty)$ は上半連続である

([3]) .

A を dissipative operator とし

$$(c_1) \quad R(I - \lambda A) \supset \overline{D(A)}, \quad \lambda > 0$$

を仮定する。

$$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \lambda^{-1} (J_\lambda - I), \quad \lambda > 0$$

$$\text{よって } \|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in R(I - \lambda A)$$

で、かつ

$$(5) \quad A_\lambda x \in A J_\lambda x, \quad x \in R(I - \lambda A)$$

$$(6) \quad \|A_\lambda x\| \leq \|Ax\|, \quad x \in D(A), \quad \lambda > 0.$$

また、定理 I から、contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$

on $\overline{D(A)}$ が存在して

$$(7) \quad T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J_\lambda^{[t/\lambda]} x \quad (= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} x)$$

, $x \in \overline{D(A)}$, $t \geq 0$.

補助定理. A は (C_1) を満たす dissipative operator とし, $\{T(t); t \geq 0\}$ は (7) により定義される contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ とする.

$x \in \overline{D(A)}$, $x_0 \in D(A)$, $y_0 \in Ax_0$ とする.

$$(8) \quad \sup_{s^* \in F(x-x_0)} \left\{ \limsup_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Re} \left(\frac{T(t)x - x}{t}, s^* \right) \right\} \leq \langle y_0, x - x_0 \rangle_s.$$

証明. $\|J_\lambda^{[t/\lambda]} x_0 - x_0\| \leq t \|Ax_0\|$ のゆえ

$$(9) \quad \|J_\lambda^{[t/\lambda]} x - x_0\| \leq \|x - x_0\| + t \|Ax_0\|.$$

$\lambda > 0$, 正整数 k に対して

$$y_{\lambda, k} \equiv \lambda^{-1} (J_\lambda^k x - J_\lambda^{k-1} x) \in AJ_\lambda^k x.$$

A は dissipative のゆえ, 適当な $\eta^* \in F(J_\lambda^k x - x_0)$ を選ぶと

$$(10) \quad \operatorname{Re} (y_{\lambda, k} - y_0, \eta^*) \leq 0.$$

$$\operatorname{Re} (y_{\lambda, k}, \eta^*) = \lambda^{-1} \operatorname{Re} (J_\lambda^k x - x_0 - \{J_\lambda^{k-1} x - x_0\}, \eta^*)$$

$$\geq \lambda^{-1} (\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\| \|J_\lambda^k x - x_0\|)$$

$$\geq (2\lambda)^{-1} (\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2) ; \quad \lambda > 0$$

$$\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2 \leq 2\lambda \operatorname{Re}(\gamma_{\lambda, k}, \eta^*)$$

$$\leq 2\lambda \operatorname{Re}(\gamma_0, \eta^*) \quad ((2.10) \text{ 及 } \mathcal{F} \cap \mathcal{L})$$

$$\leq 2\lambda \langle \gamma_0, J_\lambda^k x - x_0 \rangle_s .$$

$$J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x = J_\lambda^k, \quad k\lambda \leq \tau < (k+1)\lambda \quad \text{の } \tau \text{ 之}$$

$$\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2$$

(4.1)

$$\leq 2 \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \langle \gamma_0, J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x - x_0 \rangle_s d\tau .$$

$t \geq \lambda > 0$, (11) 及 $k=1, \dots, [t/\lambda]$ について加える

>

$$\|J_\lambda^{[t/\lambda]} x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2$$

$$\leq 2 \int_\lambda^{([t/\lambda]+1)\lambda} \langle \gamma_0, J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x - x_0 \rangle_s d\tau .$$

$\limsup (\lambda \rightarrow 0+ \text{ 及 } t > 0) \leq \exists \tau$, (4) 及び (9) 及び

Lebesgue の収束定理により

$$\|T(t)x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2$$

$$\leq 2 \int_0^t \langle \gamma_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s d\tau .$$

$$\|T(t)x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2 \geq 2 \operatorname{Re}(T(t)x - x, s^*)$$

, $s^* \in F(x - x_0)$ の τ 之

$$(12) \operatorname{Re}(T(t)x - x, s^*) \leq \int_0^t \langle \gamma_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s d\tau$$

, $t > 0$.

$T(\tau)x$ は $\tau \geq 0$ について強連続であるから, (4) により, $\langle y_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s$ は $\tau \geq 0$ に関して上半連続である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ が存在して

$$\langle y_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s < \langle y_0, x - x_0 \rangle_s + \varepsilon, \quad 0 \leq \tau < \delta.$$

(12) から

$$\operatorname{Re} \left(\frac{T(t)x - x}{t}, s^* \right) \leq \langle y_0, x - x_0 \rangle_s + \varepsilon, \quad 0 < t < \delta$$

即ち

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Re} \left(\frac{T(t)x - x}{t}, s^* \right) \leq \langle y_0, x - x_0 \rangle_s, \quad s^* \in F(x - x_0).$$

証明終.

さて A が closed dissipative ならば, 各 $\lambda > 0$ に対して $R(I - \lambda A)$ は closed. よって (C_1) から (C_1') がとれるう, 従って補助定理の (8) が成立する. [3] におけると同様にして (a) が得られる. (定理 II [3] の証明で条件 (C_2) は上の不等式 (8) を得るためのみ用いられている.)

上の補助定理を用いてつぎのことが得られる.

(b) A は (C_1) を満足する maximal dissipative operator in $\overline{D(A)}$ とし, $\{T(t); t \geq 0\}$ は定理 I により与えられる contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ とする.

A° は一価であると仮定する。

(i') X が reflexive ならば, $D(A^\circ) = D(A)$, A° は $\{T(t); t \geq 0\}$ (on $\overline{D(A)}$) の w.i.g. で, しかも

$$(w-D^+)T(t)x = A^\circ T(t)x, \quad x \in D(A), \quad t \geq 0$$

(ii') X が uniformly convex ならば, $D(A^\circ) = D(A)$, A° は $\{T(t); t \geq 0\}$ (on $\overline{D(A)}$) の i.g. で, しかも

$$D^+T(t)x = A^\circ T(t)x, \quad x \in D(A), \quad t \geq 0,$$

ただし $D^+T(t)x$ ($(w-D^+)T(t)x$) は $T(t)x$ の強(弱)右側微係数を表わす。

上の (b) からつぎの結果がえられる。

(b') X, X^* がともに uniformly convex, A が (C_1) を満足する closed dissipative operator ならば, A° は一価で $D(A^\circ) = D(A)$, しかも A° は i.g. として $\{T(t); t \geq 0\}$ unique contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ が存在する。

最後に, 定理 I の逆の問題を考えて見る。すなわち, 1 の contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on X_0 を与えたとき,

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} x, \quad x \in X_0$$

となる如き dissipative operator A が存在するか?

\Rightarrow X_0 は X_0 上の closed convex set とする. X が Hilbert 空間のときには, \Rightarrow μ は肯定的に解決される ($\{T(t); t \geq 0\}$ の i.g. の maximal dissipative extension を考へればよい). Banach 空間では未解決であるが, \Rightarrow μ に関連するものとしてつぎのことが成立する.

(c) $\{T(t); t \geq 0\}$ は contraction semi-group on X_0 とし, $A^h = h^{-1}(T(h) - I)$, $E = \{x \in X_0; \|A^h x\| = O(1), h \rightarrow 0+\}$ とおく. このとき 各 $x \in \bar{E}$ に対し

$$T(t)x = \lim_{(\lambda, h) \rightarrow (0, 0)} (I - \lambda A^h)^{-\lceil t/\lambda \rceil} x$$

が $[0, \infty)$ の各有界区画上で一様に成立している.

実際, [8] 及び [3] の中の評価から

$$\|T(\lceil t/h \rceil h)x - (I - \lambda A^h)^{-\lceil t/\lambda \rceil} x\|$$

$$\leq \{ \sqrt{th} + h + 2(\lambda^2 + \lambda t)^{1/2} \} \|A^h x\|$$

$x \in X_0, t \geq 0, \lambda > 0, h > 0$ がえしけるからである.

文 献

- [1] H. Brezis and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions on convex sets, to appear in J. of Functional Analysis .
- [2] _____, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, to appear.
- [3] M.G. Crandall and T.M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, to appear.
- [4] M.G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. of Functional Analysis, 3 (1969), 376 - 418.
- [5] T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Nonlinear Functional Analysis, Chicago, Amer. Math. Soc., (1968).
- [6] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493 - 507 .
- [7] _____, Differentiability of nonlinear

semi-groups, *J. Math. Soc. Japan*, 21 (1969), 375 - 402.

[8] I. Miyadera, Approximation of nonlinear semi-groups, *京大数解研講究録* (1969).

[9] _____, Some remarks on semi-groups of nonlinear operators, to appear.

[10] I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semi-groups of nonlinear operators, *Tôhoku Math. J.*, 22 (1970), 24 - 47.

[11] S. Oharu, On the generation of semi-groups of nonlinear contractions, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.