数理解析研究所講究録
106巻 1971年 167-177

Weakly coupled diffusion system について

山口昌哉，亀高惟倫，三村昌泰

生態学，化学反応論，および物性論の一部(超伝導)の理論的研究に登場する方程式系は一般的にいって次の様な形である。$u(x,t) = {}^t(u_1, \ldots, u_N)$，$f(u) = {}^t(f_1, \ldots, f_N)$ として

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Lambda \Delta u + f(u) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

ただし，$\Lambda = (\lambda_i \delta_{ij})$ なる $N \times N$ 行列である。この記事では，上のような系が非線型発展方程式の中で一つの典型となり，ここには数学的な研究を発展させる余地があることを示したい。目標は上の初期値問題の解が $t \to +\infty$ においてどのような挙動をとるか，その挙動が初期値とどのようにかかわるかが判明することが，学問的に興味のあることであるが，

(1)の形の系の特別なものについては，我々のうちの一人，三村の抗原抗体反応をあつかつた論文[1]，および今回の研究会での大内氏の報告[2]，と更に三村，中岡の報告[3] において或る程度まで取扱われている。この研究をふくむような一般論が建設できないか？というのが我々の願望である。ごく一般的に直ちにわかることは，$f(u)$ に対するごく軽い条件(たとえば local lipschitz)のもとでの局所的な(1)の解の存在であるが，それ以上，上の目的に近ずくためには，$f(u)$ に対する条件を適当に課して，大局的な解の存在，一意性，更に非負の初期値に対して解も非負となること，および解の有界性をうち建てて行く必要がある。このような方向をめざす研究は外国にもある（主としてポーランド）がその一般化の方向は少なからず形式的であつて，上記三村の導いた方程式系は，その研究に含まれない。（例えば Mlak, Szarsky, MacNab, Wazewski およびその門下の大量の論文を見よ，Ann. Pol.）

しかし問題のむつかしさを示すために次のような典型的な方程式系の列をあげて見よう，いづれも非負の初期値に対して考へることにしよう。

$$(イ)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - uv \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}$$

$$
(\text{ロ})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + uv \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}
$$

$$
(\text{ハ}_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}
\qquad
(\text{ハ}_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -uv \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}
$$

$$
(\text{ニ})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + uv \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = -uv \end{cases}
$$

$$
(\text{ホ})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - uv \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = uv \end{cases}
$$

(イ), (ハ) については $0 \leq u(t,x) \leq \sup_x u_0(x)$, $0 \leq v(t,x) \leq \sup_x v_0(x)$

(ロ) については $0 \leq u(t,x) \leq \sup_x [u_0(x) + v_0(x)]$, $0 \leq v(t,x) \leq \sup_x [u_0(x) + v_0(x)]$, が成り立つ。これ等を特殊な場合として含むような一般論は建設できるが，(ニ), (ホ) を一例として含むようなものはむつかしいのである。ただし(ニ)についても(ホ)についても，a priori estimate は得られる。

そのことは次のようにして見られる。(ニ)についてこれを示しておこう。あらためて

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + uv & (1) \\[2em]
\dfrac{\partial v}{\partial t} = -uv & (2)
\end{cases}
$$

今 $u(x,0) = u_0(x) \geqq 0 \qquad \sup_x u_0(x) = \overline{u_0}$.

$\quad v(x,0) = v_0(x) \geqq 0. \qquad \sup_x v_0(x) = \overline{v_0}$

とする，ただし $v_0(x)$ は台は有界であると仮定する。

（この仮定を除いては結果はまだ判らない）．そのとき

$\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ が存在して，

$$0 \leq u(t, x) \leq \overline{u_0}\, e^{\overline{v_0}\left(\frac{e^{\delta\varepsilon}}{\delta}\right)}$$

$$0 \leq v(t, x) \leq \overline{v_0}$$

が成立する。（非負の初期値に対し，解が $0 \leq u(t, x)$ $0 \leq v(t, x)$ $\forall t \geq 0$ はどんな方法でも簡単に示せる）．

証明　(1) の方程式を u のみの方程式とみて補助方程式を考へる

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 \quad , \quad u_1(x, 0) = u_0(x). \quad (3)$$

比較定理より $u_1(x,t) \leqq u(x,t) \quad {}^{\forall} t \geqq 0,\ x \in R^n$ である。

ここで $u_0(x) \not\equiv 0$ を仮定すると，$v_0(x)$ の台に入っているxについて $u_1(x,t) \geqq {}^{\exists}\delta \quad (t \geqq \varepsilon > 0)$ であることは明らかである。一方

(2)をとけば

$$v(x,t) = v_0(x)\, e^{-\int_0^t u(x,\tau)\,d\tau}$$
$$\leqq v_0(x)\, e^{-\int_0^t u_1(x,\tau)\,d\tau}$$
$$\leqq v_0(x)\, e^{-\int_\varepsilon^t u_1(x,\tau)\,d\tau}$$
$$\leqq v_0(x)\, e^{-\delta(t-\varepsilon)} \leqq \bar{v}_0\, e^{-\delta(t-\varepsilon)} = w(t)$$

再び(1)と比較する方程式

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + u_2 w(t), \quad u_2(x,0) = u_0(x) \qquad (4)$$

を考へれば

$$u(x,t) \leqq u_2(x,t)$$

が証明できる。

$$u_2\, e^{-\int_0^t w(\tau)\,d\tau} = u_3(x,t)$$

とかくと $u_3(x,t)$ は次の方程式をみたす,

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \Delta u_3 \quad , \quad u_3(x,0) = u_0(x)$$

これについては, $0 \leqq u_3(x,t) \leqq \overline{u_0}$ はよく知られているから.

$$0 \leqq u(x,t) \leqq e^{\overline{v_0}\left(\frac{e^{\delta\varepsilon}}{\delta}\right)} e^{-\overline{v_0}\frac{e^{-\delta(t-\varepsilon)}}{\delta}} \overline{u_0}$$

が成立し, 自明の $0 \leqq v(x,t) \leqq \overline{v_0}$ とあわせて上記の結果を得る。

当:の結果が best であるかどうか, (イ)とか(ハ) に述べた結果が成立する望みがあるのかどうか未だ判明してはいない。

次に一般論であるが, それは以下のように定式化できる。

* の方程式について次のような3つの仮定をおく,

[仮定1] u の空間 R^N の中に A 枚の超曲面 $\{u \in R^N, V_\alpha(P_\alpha u) = 0\}$ $\alpha = 1, 2, \cdots, A$, $P_\alpha u = {}^t(u_{\alpha_1}, \cdots, u_{\alpha_{s_\alpha}})$ のかこむ空でないコンパクト集合 $S = \bigcap_{\alpha=1}^{A} \{u \in R^N, V_\alpha(P_\alpha u) \leqq 0\}$ がある。

[仮定2] $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2} = \cdots = \lambda_{\alpha_{s_\alpha}} = \mu_\alpha$

[仮定3] 正数 δ_0 があって $0 \leqq \delta \leqq \delta_0$ なる任意の δ に対して集合 $\bigcup_{\alpha=1}^{A} \{u \in R^N; V_\alpha(P_\alpha u) = \delta, V_\beta(P_\beta u) \leqq \delta \ (\beta \neq \alpha)\}$ 上で

(i) $$\left(\frac{\partial^2 V_\alpha(P_\alpha u)}{\partial u_{\alpha_i}\, \partial u_{\alpha_j}} \right) \geqq 0$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{s_\alpha} \frac{\partial V_\alpha(P_\alpha u)}{\partial u_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}(u) \leq K\delta \qquad (\exists K \geqq 0)$$

結論　以上の仮定のもとで $u_0(x) \in S$, $\forall x \in R^n$ なる任意の初期値に対して $u(x,t) \in S$ $\forall t \geqq 0$, $x \in R^n$ なる(*)の解は一意的に存在する。

証明はここでは大域解は既にあるものとして、それが S から出発して常に S 内におさまることを証明することにとどめよう。連結集合 $[0,\infty)$ の部分集合 e を次のように定義する

$$e = \{ t \in [0,\infty) \,;\, u(x,t) \in S \quad \text{for } \forall x \in R^n \}$$

そして e が空でないこと、閉集合であること、および開集合であることを示せば $e = [0,\infty)$ となって上のことの証明になる。先ず空でないことは $t = 0$ において $u(x,0)$ は S に入るからあきらかである。次に閉であることは $u(x,t)$, $V_\alpha(P_\alpha u)$ の連続性と S のコンパクト性よりあきらかである。残るのは開であることである。すなわち $T > 0$ があって $[0,T)$ 上のすべての t について $u(x,t) \in S$ を云えばよい。

$M = \max_{\alpha} \sup_{0 \leq t \leq T} V_\alpha(P_\alpha u)$ とする。

$V_\alpha(P_\alpha u_0) \leqq 0$ であるから T を十分小にとって $M \leqq \delta_0 / 3e$ とする。$r \geqq 1$, $a \geqq 2n\mu_\alpha$ ($\forall \alpha$), $b > K$ なる定数 r, a, b をとって、$W_\alpha = V_\alpha(P_\alpha u) - \frac{M}{r^2}(1 + |x|^2 + at)e^{bt}$ とおく。$W_\alpha(x, 0) < 0$ for $\forall x \in R^n$, であり、$\forall \alpha$, $(x,t) \in \{|x| \leq r\} \times [0, T]$ なる (x,t) に関して $W_\alpha(x,t) < 0$ がえる。何故ならば、そうでないとして、ある番号 α について $W_\alpha(x_1, t_1) \geqq 0$ となる点 $(x_1, t_1) \in \{|x| \leq r\} \times [0, T)$ がある。$W_\alpha(x, t)$ の連続性よりそのような t_1 の inf (α についても) を t_0 とする。$\max_{|x| \leq r} W_\alpha(x, t_0) = 0 = W_\alpha(x_0, t_0)$ となる点 x_0 ($|x_0| \leq r$) がある。$\beta \neq \alpha$ に対しては $W_\beta(x_0, t_0) \leq 0$ である。W_α に関する放物型微分不等式をみちびく。(x_0, t_0) においてこれをおこなう

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s_\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial u_{\alpha_i}} \frac{\partial u_{\alpha_i}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s_\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial u_{\alpha_i}} \left[\mu_\alpha \Delta u_{\alpha_i} + f_{\alpha_i}(u)\right]$$

$$= \mu_\alpha \Delta V_\alpha - \mu_\alpha \sum_{i,j=1}^{s_\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial u_{\alpha_i} \partial u_{\alpha_j}} \frac{\partial u_{\alpha_i}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\alpha_j}}{\partial x_k}$$

$$+ \sum_{i=1}^{s_\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial u_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}$$

$$\frac{\partial W_\alpha}{\partial t} - \mu_\alpha \Delta W_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} - \mu_\alpha \Delta V_\alpha - \frac{M}{\gamma^2} \left[b(1+|x|^2+at) \right.$$

$$\left. + a - 2n\mu_\alpha \right] e^{bt}$$

点 (x_0, t_0) では $\dfrac{\partial W_\alpha}{\partial t} \geqq 0$, $\Delta W_\alpha \leqq 0$ であり

更に $W_\alpha = 0$, $W_\beta \leqq 0$ $\beta \neq \alpha$,

$$V_\alpha(P_\alpha u) = \frac{M}{\gamma^2} (1 + |x_0|^2 + a t_0) e^{b t_0} \leqq \delta$$

$(\gamma \geqq 1$, $T \leq \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ とすると, $\delta \leq 3eM \leq \delta_0$

$V_\beta \leq \delta$ $(\beta \neq \alpha)$ (したがって (x_0, t_0) においい

て仮定3 の (i) (ii) が成立し,

$$0 \leq \frac{\partial W_\alpha}{\partial t} - \mu_\alpha \Delta W_\alpha \leqq -(b-k)\delta < 0 \quad \text{矛盾.}$$

このことにより，$\forall\alpha$ について $V_\alpha(P_\alpha u) < \frac{M}{r^2}(1+|x|^2+at)e^{bt}$ が $\{|x|\leq r\}\times[0,T)$ について示された。(x,t) を固定し，$r\to+\infty$ とすると $\frac{M}{r^2}(1+|x|^2+at)e^{bt}\to 0$ となり $V_\alpha(P_\alpha u)\leq 0$ が $\forall(x,t)\in R^n\times[0,T)$ について示された。よって $u(x,t)\in S$ である。

証明おわり.

例. たとえば上述の(ハ$_2$)については

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -uv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv$$

$$\varphi_1 = u-1, \quad \varphi_4 = -v$$

$$\varphi_2 = v-1, \quad \varphi_5 = -u.$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}uv = -uv \leq 0$$

$$0\leq u\leq 1, \quad 0\leq v\leq 1$$

がわかる。

これ以外に例えば，Hodikin Huxley の方程式系，超伝導の方程式系等が上の定理を適用できる対象になる。Nogumo Model の系はこれができない。

文献

[1] M. Mimura : Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ Ser.A vol. 5. No. 1 (1969)

[2] S. Ôuchi : 縮退した半線型方程式系の iteration による非負解の構成について。本講究録

[3] M. Mimura, A. Nakaoka : ある種の化学反応系に関連した半線型楕円型方程式について。本講究録