

非定常 Navier-Stokes 問題: 大域的解の
存在及び $t \rightarrow \infty$ における解の挙動について

大阪府大 工 藤江 徳雄

§ 0. 序

この論文では、3次元ユークリッド空間の中の区分的に滑らかな曲面 S で囲まれた内部領域 Ω における、次の Navier-Stokes 問題を考える。(ν は粘性率 > 0)

$$(P1) \begin{cases} \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \nu_k \vec{v}_{x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}(x, t) & (0.1) \\ \text{div } \vec{v} = 0, \quad \vec{v}|_S = 0, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{a}(x) & (0.2) \end{cases}$$

ここで $\vec{v}(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$

$$\nu_k \vec{v}_{x_k} = \sum_{k=1}^3 \nu_k \vec{v}_{x_k}, \quad \text{div } \vec{v} = \sum_{k=1}^3 \nu_k x_k$$

以下においても Σ を省略することが多いことを注意しておく。例えば $(\vec{u}_{x_k}, \vec{v}_{x_k}) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \vec{u}_{x_k} \cdot \vec{v}_{x_k} dx = \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} u_j x_k v_j x_k dx$ 等。

さて、2次元流の場合と異り3次元流の場合には、種々の一般化された解の範囲で考えても、一意的な解の大域的存在定理は一般には分っていない。この論文では Ladyzhenskaya にならって一般化された解を定義するが、この解について

は $\int_0^\infty \|\vec{f}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} dt, \int_0^\infty \|\vec{f}_t(x, t)\|_{L^2(\Omega)} dt < \infty$ の仮定のもとでの大域的解の存在が示されている (cf: [1], [2]). しかし $\vec{f}(x, t) \equiv \vec{f}(x) \neq 0$ の場合には明らかにこの仮定は充されていない. そこで我々はこの論文で次のことを示そう: 一意的な定常解をもつような外力 $\vec{f}(x)$ に対しては, 初期値 $\vec{u}(x)$ に適当な条件をつけることにより (P1) の大域的解が存在する. ここで定常解というのは, 次の定常 Navier-Stokes 問題 (P1') の解をいう.

$$(P1') \begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + \nu_k \vec{u}_{x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}(x) & (x \in \Omega) & (0.1) \\ \text{div } \vec{u} = 0, \quad \vec{u}|_S = 0 & & (0.2) \end{cases}$$

更に, このときの (P1) 及び (P1') の夫々の解 $\vec{u}(x, t), \vec{u}(x)$ の間の関係 (特に $t \rightarrow \infty$ における) を系としてあげておこう.

なお, 紙数の関係で証明ぬきで結果だけを述べてある場合があるが, この点は特に文献 [2] を参照して頂きたい.

§ 1. 準備

この節では, 種々の関数空間及び「一般化された解 (generalized solution)」を定義し, ついでこの「一般化された解」について既に分かっている事実を証明ぬきで述べることにする. また以下でしばしば用いられる積分の評価もしておく.

関数空間はすべて実ベクトル空間とし, Hilbert 空間 $L^2(\Omega), H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ 等については既知とする. また以下すべてにお

いして $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ を意味する.

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{ \vec{\varphi}(x) \in C_0^\infty(\Omega); \operatorname{div} \vec{\varphi}(x) = 0 \}$$

$L_\sigma^2(\Omega)$: $L^2(\Omega)$ における $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ の閉包

$$G(\Omega) = L^2(\Omega) \ominus L_\sigma^2(\Omega) = \{ \operatorname{grad} \varphi; \varphi \in L_{loc}^2(\Omega), \varphi_{x_k} \in L^2(\Omega) (k=1, 2, 3) \}$$
 (この事実については例えば[2] Chap1 参照).

$H_{0,\sigma}^1(\Omega)$: $H^1(\Omega)$ における $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ の閉包

$\mathcal{H}(\Omega)$: $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ をノルム $\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \equiv [\vec{u}, \vec{u}]^{1/2}$ で完備化した空間. ここで $[\vec{u}, \vec{v}] \equiv (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v}) \equiv (\vec{u}_{x_k}, \vec{v}_{x_k})$

今 Ω は有界であるから Poincaré の不等式によって

$\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$ と $\|\vec{u}\|_1$ は同等なノルムを定義し $\mathcal{H}(\Omega) = H_{0,\sigma}^1(\Omega)$.

次に (P1), (P1)' の「一般化された解」を定義するが、上に述べたように $L^2(\Omega) = L_\sigma^2(\Omega) \oplus G(\Omega)$ であるから (0.1), (0.1)' において $\vec{f} \in L_\sigma^2(\Omega)$ としても一般性を失わない。そこで以下すべてにおいて、外力についてはこれを仮定する。

定義1 (非定常問題) $\vec{v}(x,t)$ が $Q_T = \Omega \times [0, T]$ における (P1) の「一般化された解」であるとは次の条件 i) ~ iv) を充すときをいう。

i) $\vec{v}_t, \vec{v}_{x_k} \in L^2(Q_T)$ ($k=1, 2, 3$)

ii) 各 $t \in [0, T]$ に対し $\int_\Omega \sum_{k=1}^3 v_k^4 dx \leq C_T < \infty$

iii) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, $\vec{v}|_S = 0$, $\vec{v}|_{t=0} = \vec{a}(x)$

iv) $\vec{\Phi}, \vec{\Phi}_{x_k} \in L^2(Q_T)$ ($k=1, 2, 3$), $\operatorname{div} \vec{\Phi} = 0$, $\vec{\Phi}|_S = 0$ を充すような任意の $\vec{\Phi}(x, t)$ に対し

$$\int_0^T \int_{\Omega} [\vec{v}_t \cdot \vec{\Phi} + \nu \vec{v}_{x_k} \cdot \vec{\Phi}_{x_k} - v_k \vec{v} \cdot \vec{\Phi}_{x_k}] dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\Phi} dx dt \quad (1.1)$$

定義 2 (定常問題) $\vec{v}(x)$ が (P1)' の「一般化された解」であるとは、次の条件 i)', ii)' を充すときをいう。

i)' $\vec{v}(x) \in \mathcal{H}(\Omega)$

ii)' 任意の $\vec{\varphi}(x) \in \mathcal{H}(\Omega)$ に対し

$$\int_{\Omega} [\nu \vec{v}_{x_k} \cdot \vec{\varphi}_{x_k} - v_k \vec{v} \cdot \vec{\varphi}_{x_k}] dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\varphi} dx \quad (1.2)$$

以後定義 1, 2 による「一般化された解」を夫々単に「解」及び「定常解」とよぶことにする。

それらの存在または一意性については、次の定理 1.1, 1.2 が分っている。(cf: [2]).

定理 1.1 (P1) の解は一意的である。

定理 1.2 (P1)' において、 $\vec{f}(x)$ が条件:

$$2\sqrt{3}C_{\Omega}^{*1/2} \nu^{-2} \|\vec{f}\|_{\mathcal{H}(\Omega)} < 1 \quad (\|\cdot\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \text{ は } \mathcal{H}(\Omega) \text{ 上の dual norm}) \quad (1.3)$$

を充すとき定常解は一意的に存在する。

$$\text{ここで } C_{\Omega}^* \equiv \sup_{u(x) \in H_0^1(\Omega)} \left(\frac{\int_{\Omega} u^2 dx}{\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx} \right)^{1/2} (< \infty) \quad (1.4)$$

また一般に (P1)' の定常解 $\vec{v}(x)$ について次の評価がなりたつ。

$$\|\nabla \vec{v}\| \leq \frac{1}{\nu} \|\vec{f}\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad (1.5)$$

最後に二・三の積分の評価をあげておく。

まず、 $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ (Ω : 有界) に対して

$$\int_{\Omega} u^4 dx \leq 4 \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx \right)^{3/2} \quad (1.6)$$

(証明は省略する. cf: [2] Chap 1)

次に、 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ に対して

$$A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \equiv \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nu_k \vec{w}_{x_k} dx = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 u_j \nu_k w_j x_k dx$$

を定義する (これが意味をもつことは(1.6)によって分る) と

A の性質として次の(1.7)~(1.9)をえる. ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$)

$$A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -A(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) \quad (1.7)$$

$$A(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad (1.8)$$

$$|A(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v})| \leq \beta \|\nabla \vec{u}\|^2 \|\nabla \vec{v}\| \quad (1.9)$$

$$\text{ただし } \beta \equiv \sqrt{3} \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\left(\int_{\Omega} u^4 dx \right)^{1/2}}{\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx} \quad (\leq 2\sqrt{3} C_{\Omega}^{*1/2}) \quad (1.10)$$

($\beta \leq 2\sqrt{3} C_{\Omega}^{*1/2}$ なることは(1.6)及び(1.4)から従う.)

(1.7)は $\text{div } \vec{v} = 0$ 及び ν S 上の積分=0 に注意すれば、Greenの公式より直ちにえられる。(1.8)は(1.7)より明らか。

(1.9)は $|A(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v})| \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \nu_j \nu_k^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 u_j^2 u_k^2 dx \right)^{1/2}$
 $\leq \sqrt{3} \|\nabla \vec{v}\| \left\{ \sum_{j=1}^3 \left(\int_{\Omega} u_j^4 dx \right)^{1/2} \right\}$. ここで $u_j \in H_0^1(\Omega)$ に対して β の定義式(1.10)を用いればよい。

§ 2. 大域的解の存在及び $t \rightarrow \infty$ における解の挙動

次にあげる定理は、§ 0 で予告した事実であるが、外力 $\vec{f}(x, t)$ についてはやや一般化されている。即ち $\vec{f}(x, t)$ は定理 1. 2 の条件を充す $\vec{f}(x)$ に十分 "近い" 限り t に依存してもよい。しかし、我々が以下で行う証明法では、 $\vec{f}(x)$ に対する定常解 $\vec{v}(x)$ について、残念ながら $\sup_{x \in \Omega} |\vec{v}(x)| < \infty$ の仮定を要する。
(この仮定は、例えば境界 S が C^3 , $\vec{f}(x)$ が $\bar{\Omega}$ で Hölder 連続ならば確かに保証される。cf: [2] Chap 5, [4])

定理 $\vec{f}(x)$ は条件 (1.3) を充し、 $\vec{f}(x)$ に対する (一意的) 定常解 $\vec{v}(x)$ は $\sup_{x \in \Omega} |\vec{v}(x)| < \infty$ を充すとす。また、 $\vec{a}(x) = \vec{v}(x, 0)$, $\vec{f}(x, t)$ については

$$\vec{a}(x) \in H^2(\Omega) \cap H_{0,\sigma}^1(\Omega); \quad \|\vec{f}(x, t)\|^2, \|\vec{f}_t(x, t)\| \in L^1_{loc}$$

であって、次の条件を充すとす:

$$\begin{aligned} & (\|\vec{a}(x) - \vec{v}(x)\| + \int_0^\infty \|\vec{f}(x, t) - \vec{f}(x)\| dt) \\ & \times \left(\sup_{0 \leq t < \infty} \|\vec{f}(x, t) - \vec{f}(x)\| + \|\nu_t(x, 0)\| + \int_0^\infty \|\vec{f}_t(x, t)\| dt \right) < \frac{\hat{\nu}^3}{\beta^2} \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \hat{\nu} \equiv \nu - \frac{\beta}{\nu} \|\vec{f}'\|_{\mathcal{H}(\Omega)} (> 0)$$

このとき (P1) の大域的解 $\vec{v}(x, t)$ が存在する。

(注意 1) $\hat{\nu} > 0$ なることは (1.3) 及び (1.10) から直ちに従う。
また $\vec{v}_t(x, 0)$ については 式 (0.1) で $t=0$ とおくと

$$\vec{v}_t(x, 0) + \text{grad} p(x, 0) = \nu \Delta \vec{a} - a_k \vec{a}_{x_k} + \vec{f}(x, 0) \quad (\vec{a}(x) \in H^2(\Omega))$$

この式の右辺は $\in L^2(\Omega)$ であり、この関数の $L^2_0(\Omega)$ への正射影として $\vec{v}_t(x, 0)$ は $\vec{a}(x)$, $\vec{f}(x, 0)$ から一意的に定まる。

(注意2) $\vec{f}'(x) = 0$ (従って $\vec{v}'(x) = 0$) のときは $\vec{v} = v$ であり、丁度 [1], [2] における大域的解の存在定理と一致する。

(証明) まず、解に対して一意性がなりたつことを注意しておく。(cf: 定理1.1)

$\vec{q}(x, t) = \vec{f}(x, t) - \vec{f}(x)$, $\vec{b}(x) = \vec{a}(x) - \vec{v}(x)$, $\vec{u}(x, t) = \vec{v}(x, t) - \vec{v}(x)$ とおこう。すると $\vec{v}(x, t)$ が (1.1) を充すことと $\vec{u}(x, t)$ が次の等式 (2.2) を充すことは同等である。 $\vec{v}(x)$ に対する等式 (1.2) に注意すればよい。

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [\vec{u}_t \cdot \vec{\Phi} + \nu \vec{u}_{x_k} \cdot \vec{\Phi}_{x_k} - (u_k \vec{u} + u_k \vec{v}' + v'_k \vec{u}) \cdot \vec{\Phi}_{x_k}] dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \vec{\Phi} dx dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

従って、再び $\vec{v}(x)$ が $\vec{f}(x)$ に対する定常解であることに注意すれば、 $\vec{v}(x, t)$ の代りに、定義1の条件 i), ii), iii) (ただし $\vec{u}(x, 0) = \vec{b}(x)$) 及び iv)' (これは (1.1) を上の (2.2) でおきかえたもの) を充す $\vec{u}(x, t)$ が Q_T (T : 任意) において存在することを示せば十分である。それを以下で示すことにしよう。

まず次の性質をもつような $H^1_{0,\alpha}(\Omega)$ における完全系 $\{\vec{\psi}^p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ をとる。(δ_p^q はクロネッカーのデルタ)

$$(\vec{\psi}^p, \vec{\psi}^q) = \delta_p^q, \quad \vec{\psi}^0(x) = \frac{\vec{b}(x)}{\|\vec{b}(x)\|} \quad (\vec{b}(x) = 0 \text{ のときには } \vec{\psi}^0(x) = 0)$$

次に

$$\vec{u}^n(x, t) = \sum_{p=0}^n c_{pn}(t) \vec{\psi}^p(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots, t \geq 0) \quad (2.3)$$

とおき、ここで $c_{pn}(t)$ を次の(2.4), (2.5) を充すように定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0,n}(0) = \|\vec{b}\|, \quad c_{pn}(0) = 0 \quad (p=1, 2, \dots, n) \\ (\vec{u}_t^n, \vec{\psi}^p) + \nu (\nabla \vec{u}^n, \nabla \vec{\psi}^p) - (u_k^n \vec{u}^n, \vec{\psi}_{x_k}^p) - (u_k^n \vec{v}', \vec{\psi}_{x_k}^p) \\ - (\nu_k' \vec{u}^n, \vec{\psi}_{x_k}^p) = (\vec{q}, \vec{\psi}^p) \quad (p=0, 1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$- (\nu_k' \vec{u}^n, \vec{\psi}_{x_k}^p) = (\vec{q}, \vec{\psi}^p) \quad (p=0, 1, \dots, n) \quad (2.5)$$

すなわち $c_{pn}(t)$ は次の常微分方程式系の解として定義される。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} c_{pn}(t) + \sum_{q=0}^n a_{pq} c_{qn}(t) + \sum_{r=0}^n a_{pqr} c_{qn}(t) c_{rn}(t) = (\vec{q}, \vec{\psi}^p) \\ c_{0,n}(0) = \|\vec{b}\|, \quad c_{pn}(0) = 0 \quad (p=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (t \geq 0) \quad (2.6)$$

ここで a_{pq}, a_{pqr} は $\vec{v}', \vec{\psi}^0, \vec{\psi}^1, \dots, \vec{\psi}^n$ によって定まる定数である。また右辺 $(\vec{q}, \vec{\psi}^p)$ は t に関して絶対連続である。

このようにして確定した $\{\vec{u}^n(x, t)\}_{n=0}^{\infty}$ に対しては、次の各式がなりたつ。

$$\vec{u}^n(x, 0) = \vec{b}(x) \quad (2.7)$$

$$\|\vec{u}_t^n(x, 0)\| \leq \|\vec{v}_t(x, 0)\| \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}^n\|^2 + \nu \|\nabla \vec{u}^n\|^2 - A(\vec{v}', \vec{u}^n, \vec{u}^n) = (\vec{q}, \vec{u}^n) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}_t^n\|^2 + \nu \|\nabla \vec{u}_t^n\|^2 - A(\vec{v}', \vec{u}_t^n, \vec{u}_t^n) + A(\vec{u}_t^n, \vec{u}_t^n, \vec{u}^n) \\ = (\vec{q}_t, \vec{u}_t^n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}^n\|^2 + \tilde{\nu} \|\nabla \vec{u}^n\|^2 \leq (\vec{q}, \vec{u}^n) \quad (2.9')$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}_t^n\|^2 + \tilde{\nu} \|\nabla \vec{u}_t^n\|^2 + \mathcal{A}(\vec{u}_t^n, \vec{u}_t^n, \vec{u}_t^n) \leq (\vec{g}_t, \vec{u}_t^n) \quad (2.10')$$

まず(2.7)は明らかだが、これを用いると(2.8)は： $\vec{u}^n(x, 0) = \vec{b}(x) = \vec{a}(x) - \vec{v}(x)$ 及び $\vec{v}(x)$ に対して(1.2)がなりたつことに注意すると、(2.5)で $t=0$ とおくことにより $C_p^n(0) = (\vec{f}(x, 0) + \nu \Delta \vec{a} - a_k \vec{a}_{x_k}, \vec{\varphi}^p) = (\vec{v}_t(x, 0), \vec{\varphi}^p(x))$ をえる。従って $\vec{u}_t^n(x, 0) = \sum_{p=0}^n (\vec{v}_t(x, 0), \vec{\varphi}^p(x)) \vec{\varphi}^p(x)$ 。ここで Bessel の不等式を用いればよい。

(2.9)は(2.5)の両辺に $C_p^n(t)$ をかけて $p=0$ から n まで加え合せたものに \mathcal{A} の性質(1.8)を用いればよい。(2.10)は(2.5)の両辺を t で微分したものに $C_p^n(t)$ をかけて加え合せ \mathcal{A} の性質(1.8), (1.7)を用いる。また(2.9), (2.10)'は(2.9), (2.10)において \mathcal{A} に対する評価(1.9)及び \vec{v} に対する評価(1.5)を用いればよい。

$$\text{ただし } \tilde{\nu} = \nu - \frac{\beta}{\nu} \|\vec{f}'\|_{\mathcal{M}(\Omega)} (> 0)$$

以上の性質を用いて $\{\vec{u}^n(x, t)\}_{n=0}^{\infty}$ の収束を調べるのだが、そのためにまず次の補題を示すことにする。

補題 $\vec{u}(x, t)$ が $Q_T = \Omega \times [0, T]$ において次の条件を充すとしよう：

$$\|\nabla \vec{u}(x, t)\|, \|\vec{u}_t(x, t)\| : \text{絶対連続}, \quad \vec{u}(x, 0) \in L^2(\Omega)$$

$$\vec{u}_t(x, t) \in H_{0,\sigma}^1(\Omega), \quad \int_0^T \|\nabla \vec{u}_t\|^2 dt < \infty$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}\|^2 + \tilde{\nu} \|\nabla \vec{u}\|^2 \leq (\vec{q}, \vec{u}) \quad (2.9')$$

($\tilde{\nu} > 0$)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}_t\|^2 + \tilde{\nu} \|\nabla \vec{u}_t\|^2 + A(\vec{u}_t, \vec{u}_t, \vec{u}) \leq (\vec{q}_t, \vec{u}_t) \quad (2.10')$$

このとき

a) $t \in [0, T]$ に対して次の評価がなりたつ:

$$\|\vec{u}(\alpha, t)\| \leq \|\vec{u}(\alpha, 0)\| + \int_0^t \|\vec{q}(\alpha, t)\| dt \quad (2.11)$$

$$\|\vec{u}(\alpha, t)\|^2 + 2\tilde{\nu} \int_0^t \|\nabla \vec{u}\|^2 dt \leq \|\vec{u}(\alpha, 0)\|^2 + 2\|\vec{u}(\alpha, 0)\| \int_0^t \|\vec{q}(\alpha, t)\| dt + 2\left(\int_0^t \|\vec{q}(\alpha, t)\| dt\right)^2 \quad (2.12)$$

b) 上にあげた条件に加えて更に次の条件:

$$A_T^2 \equiv \left(\|\vec{u}(\alpha, 0)\| + \int_0^T \|\vec{q}(\alpha, t)\| dt \right) \cdot \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{q}(\alpha, t)\| + \|\vec{u}_t(\alpha, 0)\| + \int_0^T \|\vec{q}_t(\alpha, t)\| dt \right) < \frac{\tilde{\nu}^3}{\beta^2} \quad (2.13)$$

が充されるならば、次の評価がなりたつ。 ($t \in [0, T]$)

$$\|\vec{u}_t(\alpha, t)\|^2 + 2\gamma \int_0^t \|\nabla \vec{u}_t\|^2 dt \leq \|\vec{u}_t(\alpha, 0)\|^2 + 2 \int_0^t \|\vec{q}_t\| \left(\|\vec{u}_t(\alpha, 0)\| + \int_0^t \|\vec{q}_t\| dt \right) dt \quad (2.14)$$

$$\text{ただし } \gamma = \tilde{\nu} - \beta \tilde{\nu}^{-1/2} A_T (> 0)$$

(補題の証明) 大略を示すことにする。

a) (2.9')より $\|\vec{u}\| \frac{d}{dt} \|\vec{u}\| \leq (\vec{q}, \vec{u}) \leq \|\vec{q}\| \|\vec{u}\|$. この不等式より容易に(2.11)がえられる。(2.12)は(2.9')の両辺を0からtまで積分して、今えられた(2.11)を用いればよい。

b) まず(2.9')より(2.11)を用いて

$$\tilde{\nu} \|\nabla \vec{u}\|^2 \leq (\vec{q} - \vec{u}_t, \vec{u}) \leq (\|\vec{q}\| + \|\vec{u}_t\|) \|\vec{u}\|$$

$$\leq (\|\vec{q}(x, t)\| + \|\vec{u}_t(x, t)\|) (\|\vec{u}(x, 0)\| + \int_0^t \|\vec{q}(x, \tau)\| dt) \quad (2.15)$$

一方 (2.10) から (1.9): $|\mathcal{A}(\vec{u}_t, \vec{u}_t, \vec{u})| \leq \beta \|\nabla \vec{u}\| \|\nabla \vec{u}_t\|^2$ を用いて
 $(\tilde{\nu} - \beta \|\nabla \vec{u}\|) \|\nabla \vec{u}_t\|^2 \leq \|\vec{u}_t\| (\|\vec{q}_t\| - \frac{d}{dt} \|\vec{u}_t\|)$ をえるがここで

$$B(t) \equiv \tilde{\nu} - \beta \tilde{\nu}^{-1/2} \left\{ \max_{0 \leq \tau \leq t} (\|\vec{q}(x, \tau)\| + \|\vec{u}_t(x, \tau)\|) \right\}^{1/2} \\ \times (\|\vec{u}(x, 0)\| + \int_0^t \|\vec{q}\| dt)^{1/2} \quad (2.16)$$

とおくと、(2.15) によって $\tilde{\nu} - \beta \|\nabla \vec{u}\| \geq B(t)$ であるから結局

$$B(t) \|\nabla \vec{u}_t\|^2 \leq \|\vec{u}_t\| (\|\vec{q}_t\| - \frac{d}{dt} \|\vec{u}_t\|) \quad (2.17)$$

さて、 $B(t)$ はその定義 (2.16) より単調減少連続関数で、また仮定 (2.13) より $B(0) > 0$ であるが、更に $B(T) \geq \gamma > 0$ である。これを示すために $B(T_1) = 0$, $B(t) > 0$ ($0 \leq t < T_1$) としよう^(*)。すると (2.17) から $t \in [0, T_1]$ で $0 \leq \|\vec{u}_t\| (\|\vec{q}_t\| - \frac{d}{dt} \|\vec{u}_t\|)$ 。従って (2.17) と類似の次の式をえる。

$$\|\vec{u}_t(x, t)\| \leq \|\vec{u}_t(x, 0)\| + \int_0^t \|\vec{q}_t\| dt \quad t \in [0, T_1] \quad (2.18)$$

これを (2.16) に用いて

$$B(t) \geq \tilde{\nu} - \beta \tilde{\nu}^{-1/2} \left(\max_{0 \leq \tau \leq t} \|\vec{q}(x, \tau)\| + \|\vec{u}_t(x, 0)\| + \int_0^t \|\vec{q}_t(x, \tau)\| dt \right)^{1/2} \\ \times (\|\vec{u}(x, 0)\| + \int_0^t \|\vec{q}\| dt)^{1/2} \quad t \in [0, T_1]$$

ここでもし $T > T_1$ とすると、上式で $t = T_1$ とおくことによって $B(T_1) \geq \tilde{\nu} - \beta \tilde{\nu}^{-1/2} A_{T_1} \geq \tilde{\nu} - \beta \tilde{\nu}^{-1/2} A_T = \gamma > 0$ 。これは T_1 のとり方 $B(T_1) = 0$ に反する。従って $T \leq T_1$ であり、 $t = T$ に対して上の不等式がなりたつことから $B(T) \geq \tilde{\nu} - \beta \tilde{\nu}^{-1/2} A_T = \gamma > 0$ 。

(*) そのような T_1 が存在しないときにも、以下の推論はそのままなりたつ。

以上によって $B(t) \geq B(T) \geq \gamma (> 0)$ が分った. ($t \in [0, T]$)

これを用いて (2.17) の両辺の積分を考えることにより

$$\|\vec{u}_t(x, t)\|^2 + 2\gamma \int_0^t \|\nabla \vec{u}_t\|^2 dt \leq \|\vec{u}_t(x, 0)\|^2 + 2 \int_0^t \|\vec{g}_t\| \|\vec{u}_t\| dt$$

この右辺に (2.18) を用いると求める評価 (2.14) がえられる. ただし $t \in [0, T]$. (補題の証明終り)

(定理の証明つづき) 既に述べたことから明らかのように、各 $\vec{u}^n(x, t)$ は補題の仮定を充している. 更に (2.7), (2.8) 及び定理の仮定 (2.1) に注意すれば $\vec{u}^n(x, t)$ に対して次の一様評価 (2.19), (2.20) をえる. ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\|\vec{u}_t^n(x, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla \vec{u}_t^n\|^2 dt \leq c(t) \quad t \in [0, \infty) \quad (2.19)$$

ここで $c(t)$ は (2.14) を見れば分るように、単調増大連続関数でかつ有界.

従ってまた

$$\|\vec{u}^n(x, t)\|^2 + \|\nabla \vec{u}^n\|^2 \leq \tilde{c}(t) \quad t \in [0, \infty) \quad (2.20)$$

ここで $\tilde{c}(t)$ は単調増大連続関数.

(1.6) に注意すると (2.20) から $\|u_i^n u_j^n\|^2$ ($1 \leq i, j \leq 3$) がまた連続関数によって n に関して一様におさえられることが分る ($t \in [0, \infty)$). 従って $\{\vec{u}^n\}_{n=0}^\infty$ から適当な部分列 $\{\vec{u}^{n'}\}$ をとって、 $\vec{u}^{n'}$, $\vec{u}_{x_k}^{n'}$, $\vec{u}_t^{n'}$, $\vec{u}_{t+x_k}^{n'}$, $u_i^{n'} u_j^{n'}$ ($1 \leq i, j, k \leq 3$) が $L^2(Q_T)$ (T : 任意) で弱収束するようにできる. ところが更に (2.19), (2.20) によって (必要ならばもう一度部分列をとって) t を固定したとき、各 $t \in [0, T]$

に対し $\{\vec{u}^{n'}(x,t)\}$ は $H_{0,0}^1(\Omega)$ での弱収束列となる (これは Ascoli-Arzelà の定理を用いて示されるが、証明は割愛する)。そこで上の極限関数を $\vec{u}(x,t)$ とすると、これが定義1の条件 i), ii), iii) を充すことは容易に確かめられる。そこで、あとはこの $\vec{u}(x,t)$ が (2.2) を充すことをいえばよい。これを示そう。

まず、 $\vec{\Phi}^m(x,t) = \sum_{l=0}^m d_l(t) \vec{\psi}^l(x)$ ($d_l(t) \in L^2(0,T)$) の形の試料関数に対しては、 $n' \geq m$ に対する式 (2.5) の両辺に $d_l(t)$ をかけてしについての和をとり、 t について積分すると

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [\vec{u}_t^{n'} \cdot \vec{\Phi}^m + \nu \vec{u}_{x_k}^{n'} \cdot \vec{\Phi}_{x_k}^m - (u_k^{n'} \vec{u}^{n'} + u_k^{n'} \vec{v} + v_k \vec{u}^{n'}) \cdot \vec{\Phi}_{x_k}^m] dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \vec{\Phi}^m dx dt. \end{aligned}$$

ここで $\sup_{x \in \Omega} |\vec{v}(x)| < \infty$ に注意して $n' \rightarrow \infty$ とすれば $\vec{\Phi}^m$ に対する式 (2.2) をえる。また、定義1 iv) にいう任意の試料関数は、空間変数に関する1階微分までこめて上でいった $\vec{\Phi}^m(x,t)$ の形の関数で、 $L^2(Q_T)$ においていくらでも近似できることが容易に確かめられる。このことから、任意の試料関数に対して (2.2) がなりたつことが分る。 (証明終り)

次に、上の定理でえられた大域的解 $\vec{v}(x,t)$ の $t \rightarrow \infty$ における挙動に関して系をあげておく。

系 上の定理で存在が示された大域的解 $\vec{v}(x,t)$ について

a) $\|\vec{v}(x,t) - \vec{v}'(x)\|_1 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$

b) 特に $\vec{f}(x,t) \equiv \vec{f}'(x)$ のときには

$$\|\vec{v}(x,t) - \vec{v}'(x)\| \leq e^{-\alpha t} \|\vec{v}(x,0) - \vec{v}'(x)\| \quad (t \geq 0)$$

ただし $\alpha = \frac{1}{2C_\Omega^{*2}} (\nu - \beta \|\nabla \vec{v}'\|) (> 0)$

(注意) 2次元流の場合における類似の結果が [2] で示されている。なお、 $\alpha > 0$ なることは $\nu - \beta \|\nabla \vec{v}'\| \geq \tilde{\nu}$ より明らか。

(証明) 大略にとどめる。以下で $\vec{u}(x,t) = \vec{v}(x,t) - \vec{v}'(x)$ 。

a) 弱収束の下半連続性によって $\int_0^\infty \|\nabla \vec{u}\|^2 dt, \int_0^\infty \|\nabla \vec{u}_t\|^2 dt < \infty$ (cf: (2.12), (2.19)). これからまず $\|\nabla \vec{u}\|^2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ が分るが、 $\|\vec{u}\|^2 \leq C_\Omega^{*2} \|\nabla \vec{u}\|^2$ より結局 $\|\vec{u}(x,t)\|_1 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ 。

b) $\vec{u}(x,t)$ は (2.2) を充している。ただし $\vec{q}(x,t) = 0$ 。これから殆ど到るところの $t (\geq 0)$ に対し

$$\int_\Omega [\vec{u}_t \cdot \vec{\Phi} + \nu \vec{u}_{x_k} \cdot \vec{\Phi}_{x_k} - (u_k \vec{u} + u_k \vec{v}' + v'_k \vec{u}) \cdot \vec{\Phi}_{x_k}] dx = 0$$

ここで $\vec{\Phi}(x,t) = \vec{u}(x,t)$ とおくと $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{u}) = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}', \vec{u}) = 0$ より

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}\|^2 + \nu \|\nabla \vec{u}\|^2 + \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}') = 0 \quad (\text{a.e. } t \geq 0)$$

これに不等式 $|\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}')| \leq \beta \|\nabla \vec{v}'\| \|\nabla \vec{u}\|^2$ 及び $\nu \|\nabla \vec{u}\|^2 \geq C_\Omega^{*-2} \times \|\vec{u}\|^2$ を用いると $\frac{d}{dt} \|\vec{u}\|^2 + 2\alpha \|\vec{u}\|^2 \leq 0 \quad (\text{a.e. } t \geq 0)$ をえる。
 $\therefore \|\vec{u}(x,t)\| \leq e^{-\alpha t} \|\vec{u}(x,0)\|, \quad (\text{証明終り})$

最後に、ここでえられた大域的解の存在についての結果は、Fujita-Kato [3] のそれ ([3] Theorem 1.4) にそのまま含まれてしまうものではないことを注意しておく。それは、外力 $\vec{f}(x, t)$ として $\{\varphi(t) + 1\} \vec{f}(x)$ ($\vec{f}(x)$ は条件 (1.3) を充し $\neq 0$) の形の関数を考え、ここで $\varphi(t)$ を我々の定理の仮定を充し、しかも [3] Theorem 1.4 の仮定は充さないように定めることができることから分る。

追記：最近 Heywood の論文 [5] を知る機会をえたが、ここでは本稿と類似の結果がえられており、更に外部問題にも触れられている。本稿で扱ったような問題に関心を持たれる方は、是非参照して頂きたい。

文献

- [1] A.A. Kiselev & O.A. Ladyzhenskaya: On the existence and uniqueness of solutions of the non-stationary problems for flows of non-compressible fluids ... Izv. Akad. Nauk SSSR 21(1957) 英訳 A.M.S. Transl.
- [2] O.A. Ladyzhenskaya: The mathematical theory of viscous incompressible flow (英訳) ... Gordon & Breach
- [3] H. Fujita-T. Kato: On the Navier-Stokes initial val-

- ue problem I. ... Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964)
- [4] H. Fujita : On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation ... J. Fac. Sci. Univ. Tokyo vol 9 part 1 (1961)
- [5] J.G. Heywood : On stationary solutions of the Navier-Stokes equations as limits of nonstationary solutions ... Arch. Rat. Mech. Anal. 37 (1970)