数理解析研究所講究録
106巻 1971年 1-17

中性子輸送方程式の固有値問題
(Monoenergetic Neutron Transport Equation の場合)

京大 工 鵜飼正二

§1. 序

物質(媒質)と相互作用している中性子の集団的振舞は neutron transport equation によって記述される。ここではすべての中性子の速度は一定(monoenergy)という簡単な model について考察する。

D を3次元空間の bounded convex domain とし媒質が占める領域を表わすとする。D の点を $\mathfrak{r}=(x,y,z)$ で表わす。

$\mho$ を3次元空間の単位球面とする。$\mho$ の点を $\Omega=(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$ で表わす: $|\Omega|=\sqrt{\Omega_x^2+\Omega_y^2+\Omega_z^2}=1$。$\Omega$ は中性子の運動方向を表すものとする。

$\psi(\mathfrak{r},\Omega,t)$ を時刻 t に於ける点 $(\mathfrak{r},\Omega)$ での中性子密度とする。我々の考える transport eq. は次のものである。

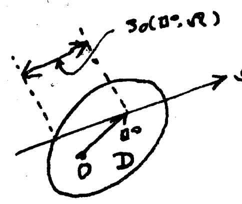
$$(1\text{-}1)\quad \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathfrak{r},\Omega,t)=-\Omega\cdot\nabla\psi(\mathfrak{r},\Omega,t)-\sigma(\mathfrak{r})\psi(\mathfrak{r},\Omega,t)+\frac{c(\mathfrak{r})}{4\pi}\int_{\mho}\psi(\mathfrak{r},\Omega',t)\,d\Omega',$$

$$\mathfrak{r}\in D,\quad \Omega\in\mho.$$

ここに $\sigma(x^0)$, $c(x^0)$ は D 上で可測，有界，非負なる関数，$\Omega\cdot\nabla = \Omega_x\frac{\partial}{\partial x}+\Omega_y\frac{\partial}{\partial y}+\Omega_z\frac{\partial}{\partial z}$ (Ω 方向の微分)，v は正定数である。

境界条件として通常物理的には次の条件が課せられる：媒質 D に外部から流入する中性子は存在しない。そこでまず

(1-2) $$s_0(x^0,\Omega)=\inf\{s \mid x^0-s\Omega\notin D,\ s\geq 0\}.$$



と定義する。以下では $s_0(x^0,\Omega)$ は $G=D\times U$ で可測と仮定する。l を D の max. diameter とする。

(1-3) $$0\leq s_0(x^0,\Omega)\leq l.$$

そこで境界条件は次のようになる。

(1-4) $$\psi(x^0-s_0(x^0,\Omega)\Omega,\Omega,t)=0 \quad \text{for } \forall x^0\in D,\ \forall\Omega\in U.$$

$L^2(G)$ $(G=D\times U)$ で operator B を

(1-5) $$B\psi=-v\Omega\cdot\nabla\psi-v\sigma(x^0)\psi+v\,c(x^0)\int_U\psi(x^0,\Omega')d\Omega'$$

で定義する。B の定義域 $\mathcal{D}(B)$ は $\psi\in L^2(G)$, $\Omega\cdot\nabla\psi\in L^2(G)$ かつ境界条件 (1-4) を満す関数 $\psi(x^0,\Omega)$ から成るものとする。$\psi(x^0,\Omega)\in\mathcal{D}(B)$ は殆んどすべての Ω 方向の直線上で x^0 について絶対連続である。

Jörgens [1] は semi-group の理論を用い，初期値問題

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=B\psi,\quad \psi(x^0,\Omega,t=0)=\psi_0(x^0,\Omega)\ (\text{given})$$

が $L^2(G)$ で well-posed であること，かつ solution operator $E(t)$ が $t\geq{}^{\exists}t_0>0$ で compact であることを示し，これより operator B の

$L^2(G)$上での spectrum について次の結果を得た。

定理 1 (Jörgens [1])

1) Bの spectrum は discrete eigenvalue より成り, half plane $\{\lambda \mid \mathrm{Re}\,\lambda \leq {}^{\exists}k\}$ にあり, 任意の strip $\{\lambda \mid \alpha_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \alpha_2\}$ で有限個。

2) すべての固有値の generalized eigenspace は有限次元。

3) $c(\mathfrak{x}) \neq 0$ in D ならBの固有値は存在する。

4) すべての固有関数は有界関数である。

ここでは次の定理を証明する。

定理 2.

次のような定数 $\sigma \geq 0$, $c > 0$ かつ領域 $D_0 \subset D$ が存在するとする。

(1) $\mathrm{mes}\, D_0 \neq 0$,

(2) $\sigma(\mathfrak{x}) = \sigma$ for ${}^{\forall}\mathfrak{x} \in D_0$,

(3) $c(\mathfrak{x}) \geq c$ for ${}^{\forall}\mathfrak{x} \in D_0$,

この時 operator B は可算無限個の実固有値を持つ。

尚 B は complex eigenvalue をも持つのであるがその個数や分布に関しては未解決である。

§2. 準備

λをBの固有値, $\psi(\mathfrak{x}, \Omega) \in \mathcal{D}(B)$をその固有関数とする。

(2-1) $$\varphi(\mathfrak{x}) \equiv \int_U \psi(\mathfrak{x}, \Omega)\, d\Omega$$

とおく。 $\psi \in L^2(G)$ だから $\psi \in L^2(D)$ は明らか。Dは有界だから $\in L^1(D)$ でもある。 $B\psi = \lambda\psi$ より

$$(2\text{-}2)\qquad \Omega\cdot\nabla\psi(\mathbf{r}^0,\Omega) + \left(\frac{\lambda}{v} + \sigma(\mathbf{r}^0)\right)\psi(\mathbf{r}^0,\Omega) = \frac{c(\mathbf{r}^0)}{4\pi}\varphi(\mathbf{r}^0),$$

$\Omega\cdot\nabla$ は Ω の方向の微分であるから,

$$-\frac{\partial}{\partial s}\psi(\mathbf{r}^0 - s\Omega,\Omega) + \left(\frac{\lambda}{v} + \sigma(\mathbf{r}^0 - s\Omega)\right)\psi(\mathbf{r}^0 - s\Omega,\Omega) = \frac{1}{4\pi}c(\mathbf{r}^0 - s\Omega)\varphi(\mathbf{r}^0 - s\Omega).$$

そこで

$$(2\text{-}3)\qquad \tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s) = \frac{\lambda}{v}s + \int_0^s \sigma(\mathbf{r}^0 - s'\Omega)\,ds'$$

と置くと

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}\psi(\mathbf{r}^0 - s\Omega,\Omega)\right) = -\frac{1}{4\pi}e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}c(\mathbf{r}^0 - s\Omega)\varphi(\mathbf{r}^0 - s\Omega)$$

これを s について 0 から $s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)$ まで積分し，境界条件(1-4)を考慮すれば,

$$(2\text{-}4)\qquad \psi(\mathbf{r}^0,\Omega) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)} e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}c(\mathbf{r}^0 - s\Omega)\varphi(\mathbf{r}^0 - s\Omega)\,ds,$$

これを $\mathcal{U}$ 上で積分し，(2-1)を用いれば

$$(2\text{-}5)\qquad \varphi(\mathbf{r}^0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{U}} d\Omega \int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)} e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}c(\mathbf{r}^0 - s\Omega)\varphi(\mathbf{r}^0 - s\Omega)\,ds$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\mathbf{r}^{0\prime})}}{|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}|^2}c(\mathbf{r}^{0\prime})\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})\,d\mathbf{r}^{0\prime}$$

ここで変数変換 $\mathbf{r}^0 - s\Omega = \mathbf{r}^{0\prime}$ を行った。又

$$(2\text{-}6)\qquad \tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\mathbf{r}^{0\prime}) \equiv \tau_\lambda\left(\mathbf{r}^0, \frac{\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}}{|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}|}, |\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}|\right) = \frac{\lambda}{v}|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}| + \int_0^{|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}|}\sigma\left(\mathbf{r}^0 - s'\frac{\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}}{|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^{0\prime}|}\right)ds'.$$

逆に (2-5) の任意の解 $\varphi(\mathbf{r}^0)\in L^2(D)$ を用いて, (2-4) の右辺により $\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)$ を定義しよう。

$$(2\text{-}7)\qquad \psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)} e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}\,c(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds$$

この $\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)$ は殆んどすべての点 $(\mathbf{r}^0,\Omega)\in G$ で意味を持ちかつ $\in L^2(G)$ である。以下その証明。 まず変数変換 $\mathbf{r}^0-s\Omega=\mathbf{r}^{0\prime}$ によって

$$\int_D\frac{d\mathbf{r}^{0\prime}}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}=\int_U d\Omega\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}ds\ \le 4\pi l\ <+\infty$$

が得られる。 従って $\forall\varphi\in L^2(D)$ に対し, $\varphi\in L^1(D)$ でもあるから

$$\iint_{D\times D}\frac{|\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})|}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}\,d\mathbf{r}^0 d\mathbf{r}^{0\prime}\le 4\pi l\int_D|\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})|\,d\mathbf{r}^{0\prime}<+\infty$$

よって Fubini の定理より

$$\iint_{D\times D}\frac{\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}\,d\mathbf{r}^0 d\mathbf{r}^{0\prime}=\int_D d\mathbf{r}^0\int_U d\Omega\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds,$$

即ち積分

$$\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds$$

は殆んどすべての $(\mathbf{r}^0,\Omega)\in G$ で意味を持つ。これが $\in L^2(G)$ であることは容易に示せる。 $\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)$ についても同様。(証明終り)。

さて $s_0(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)=s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)-s$, $\tau_\lambda(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega,s'-s)=\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s')-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)$

を考慮すれば, (2-7) より,

$$\psi(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)=\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)}e^{-\tau(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega,s')}\,c(\mathbf{r}^0-s''\Omega)\,\varphi(\mathbf{r}^0-s''\Omega)\,ds'\ ,\quad s''=s+s'$$

$$=e^{\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}\int_s^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s')}\,c(\mathbf{r}^0-s'\Omega)\,\varphi(\mathbf{r}^0-s'\Omega)\,ds'.$$

右辺の積分は s に関する可積分関数の積分だから s について絶対連続，$T_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)$ についても同様なことは定義 (2-3) を見れば明らか。従って $\psi(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)$ は s について絶対連続，微分すれば $\varphi(\mathbf{r}^0)$ が (2.5) を満すこと及び (2-7) を用いれば (2-2) 即ち $B\psi=\lambda\psi$ を得る。以上によって次の Lemma が証明出来た。

Lemma 2-1. λ を B の固有値，$\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\in D(B)$ をその固有関数，

$$\varphi(\mathbf{r}^0)\equiv\int_U \psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\,d\Omega$$

とすると，$\varphi(\mathbf{r}^0)\in L^2(D)$ かつ次の積分方程式を満す。

$$\text{(2-8)}\qquad \varphi(\mathbf{r}^0)=\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{-T_\lambda(\mathbf{r}^0,\mathbf{r}^{0\prime})}}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}\,c(\mathbf{r}^{0\prime})\,\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})\,d\mathbf{r}^{0\prime}$$

逆にこの積分方程式の任意の解 $\varphi\in L^2(D)$ に対し

$$\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)} e^{-T_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}\,c(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds$$

で定義される $\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)$ は $\in D(B)$ かつ $B\psi=\lambda\psi$ を満す。

そこで operator G_λ を

$$\text{(2-9)}\qquad (G_\lambda\varphi)(\mathbf{r}^0)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_D c_1(\mathbf{r}^0)\frac{e^{-T_\lambda(\mathbf{r}^0,\mathbf{r}^{0\prime})}}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}\,c_1(\mathbf{r}^{0\prime})\,\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})\,d\mathbf{r}^{0\prime},\quad \mathbf{r}^0\in D$$

$$c_1(\mathbf{r}^0)=\sqrt{c(\mathbf{r}^0)}$$

と定義する。

Lemma 2-2　λ を任意の complex number とする。G_λ は $L^2(D)$ 上の compact operator である。

証明) 例えば Mikhlin [2] p.32 を見よ。

そこで λをparameterと見做し G_λ の固有値問題を考える：

$$\rho\varphi = G_\lambda\varphi \quad , \quad \varphi \in L^2(\mathbb{D})$$

明らかに固有値 ρ は λの関数である。$\rho=\rho(\lambda)$。従って Lemma 2-1 より $B\psi=\lambda\psi$ を解くことは $\rho(\lambda)=1$ なる λを求めることになる。

以下我々は B の real eigenvalue のみを考察する。従って以下では λは real である。容易に次のことが証明出来る。

$$T_\lambda(\mathfrak{v}^0, \mathfrak{v}^{0\prime}) = T_\lambda(\mathfrak{v}^{0\prime}, \mathfrak{v}^0) \text{。}$$

従って次のことが成立つ。

Lemma 2-3. λが real ならば G_λ は self-adjoint である。

従って G_λ の固有値 $\rho(\lambda)$ は real，その集積点は（もし存在すれば）$\rho=0$ のみである。我々の目的は $\rho(\lambda)=1$ を解くことにある。従って正の固有値 ρ のみに興味がある。G_λ の正の固有値を大きいものから順に番号を附す。

$$\rho_1(\lambda) \geq \rho_2(\lambda) \geq \cdots \geq \rho_n(\lambda) \geq \cdots \geq 0$$

Lemma 2-4. $\rho_n(\lambda)$ $(\neq 0)$ は λの連続関数である。

証明）良く知られた定理（例えば Zaanen [3], p. 426）により

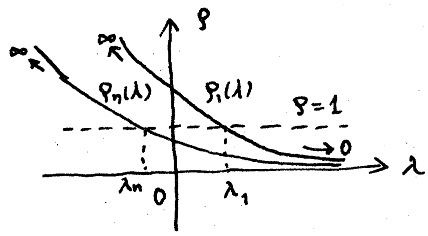
$$|\rho_n(\lambda) - \rho_n(\lambda')| \leq \| G_\lambda - G_{\lambda'} \|$$

一方 $\lambda' \to \lambda$ ならば右辺は $\to 0$ であることが容易に示せる（証略）。

そこで $\rho_n(\lambda)$ のグラフを描き，これと直線 $\rho=1$ との交点を求めればそれより B の固有値 λが求まる。(Graph method)。

以下では任意の λに対し正の固有値 $\rho_n(\lambda)$ の個数は

無限個，かつ 各 $\rho_n(\lambda)$ は概ね右図のような様子であることを証明する。



そのためには以下で多くの積分作用素の正の固有値を min-max 定理 (Courant-Hilbert [4]) によって比較することになる。

Min-Max 定理 [4]． $\mathcal{H}$ を Hilbert space，Q を $\mathcal{H}$ 上の compact，self-adjoint operator とする。$v_1, v_2, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ を任意にとって

$$m(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}; Q) = \max \frac{(Q\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2}, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \ (\varphi, v_i) = 0, \ 0 < i \leq n-1,$$

と定義すると，Q の n 番目の正の固有値 $\mu_n(Q)$ は次式で与えられる。

$$\mu_n(Q) = \min_{\{v_1, v_2, \cdots v_{n-1}\}} m(v_1, v_2, \cdots v_{n-1}; Q) .$$

§3 $\lambda \geq -v\sigma$ での $\rho_n(\lambda)$ の性質

Lemma 3-1． $\rho_n(\lambda) \longrightarrow 0 \ (\lambda \to \infty)$, for each n が成立つ。

証明) $c(\boldsymbol{r})$ は仮定により有界：

$$0 \leq c(\boldsymbol{r}) \leq {}^{\exists}c_0$$

更に $\lambda > 0$ とすれば

$$\int_D \frac{e^{-\tau_\lambda(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} d\boldsymbol{r}' \leq \int_D \frac{e^{-\lambda|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} d\boldsymbol{r}' \leq \int_{R^3} \frac{e^{-\lambda|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} d\boldsymbol{r}' = 4\pi \int_0^\infty e^{-\lambda r} dr = \frac{4\pi}{\lambda}$$

が成立つ。従って ${}^{\forall}\varphi \in L^2(D)$ に対し，Schwartz より

$$|G_\lambda \varphi|^2 \leq \left(\frac{c_0}{4\pi}\right)^2 \int_D \frac{e^{-\lambda|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} d\boldsymbol{r}' \int_D \frac{e^{-\lambda|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} |\varphi(\boldsymbol{r}')|^2 d\boldsymbol{r}' \leq$$

$$\leq \left(\frac{c_0}{4\pi}\right)^2 \frac{4\pi}{\lambda} \int_D \frac{e^{-\lambda|\mathfrak{x}^0-\mathfrak{x}^{0\prime}|}}{|\mathfrak{x}^0-\mathfrak{x}^{0\prime}|^2} |\varphi(\mathfrak{x}^{0\prime})|^2 d\mathfrak{x}^{0\prime}.$$

これより

$$\|G_\lambda\varphi\| \leq \left(\frac{c_0}{\lambda}\right) \|\varphi\|$$

が成立つ。即ち $\|G_\lambda\| \leq (c_0/\lambda) \to 0\ (\lambda\to\infty)$。（証明終り）。

さて定理２の条件の領域 D_0 を考える。D_0 の中に半径 a の球 K をとる（これは可能）。$K \subset D_0 \subset D$. operator G_λ の積分核を $G_\lambda(\mathfrak{x}^0, \mathfrak{x}^{0\prime})$ と書く。

$$(3\text{-}1) \qquad G_\lambda(\mathfrak{x}^0,\mathfrak{x}^{0\prime}) = \frac{1}{4\pi} c_1(\mathfrak{x}^0) \frac{e^{-\tau_\lambda|\mathfrak{x}^0-\mathfrak{x}^{0\prime}|}}{|\mathfrak{x}^0-\mathfrak{x}^{0\prime}|^2} c_1(\mathfrak{x}^{0\prime})$$

そこで operator E_λ を積分核

$$(3\text{-}2) \qquad E_\lambda(\mathfrak{x}^0,\mathfrak{x}^{0\prime}) = \begin{cases} G_\lambda(\mathfrak{x}^0,\mathfrak{x}^{0\prime}) & ;\ \mathfrak{x}^0,\mathfrak{x}^{0\prime} \in K \\ 0 & ;\ \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。明らかに E_λ は $L^2(D)$（従って $L^2(K)$）で compact self-adjoint である。$\mu_n(E_\lambda)$ を E_λ の n 番目の正の固有値とする。

Lemma 3-2 $\quad \rho_n(\lambda) \geq \mu_n(E_\lambda)$ for each n が $-\infty<\lambda<\infty$ で成り立つ。

証明）Min-Max 定理を使う。まず

$$m'(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}; G_\lambda) = \max_{\substack{\varphi\in L^2(D) \\ (\varphi, v_i)=0,\ i=1,\cdots n-1 \\ \varphi=0 \text{ for } \mathfrak{x}^0\notin K}} \frac{(G_\lambda\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2}$$

と定義すると，max の定義より

$$m(v_1, v_2, \cdots v_{n-1}; G_\lambda) \geq m'(v_1, v_2, \cdots v_{n-1}; G_\lambda)$$

は明らか。よって Min-Max 定理より

$$(3\text{-}3)\quad p_n(\lambda)=\mu_n(G_\lambda)=\min_{(v_1,\cdots v_{n-1})} m(v_1,\cdots v_{n-1};G_\lambda)\geq \min_{(v_1,\cdots v_{n-1})} m'(v_1,\cdots v_{n-1};G_\lambda)$$

ところで $\varphi(x^0)\equiv 0$ for $x^0\notin K$ とすれば、$(G_\lambda\varphi,\varphi)=(E_\lambda\varphi,\varphi)$ であるから (3-3) の最後の項は $\mu_n(E_\lambda)$ に等しい（証明終り）。

さて $x^0\in K$ とすると定理2の条件2によって $c_1(x^0)\geq\sqrt{c}$，条件3によって $r_\lambda(x^0,x^{0'})=(\frac{\lambda}{v}+\sigma)|x^0-x^{0'}|$，$(x^{0'}\in K)$，が成立つことに着目して operator F_λ を積分核

$$(3\text{-}4)\qquad F_\lambda(x^0,x^{0'})=\frac{c}{4\pi}\frac{e^{-(\frac{\lambda}{v}+\sigma)|x^0-x^{0'}|}}{|x^0-x^{0'}|^2}\qquad ;\ x^0,x^{0'}\in K$$

で定義する。明らかに F_λ は $L^2(K)$ で compact, self-adjoint である。

Lemma 3-3. $\mu_n(E_\lambda)\geq\mu_n(F_\lambda)$ for each n が $-\infty<\lambda<\infty$ で成立つ。

証明）$\forall\varphi\in L^2(K)$ に対し $\psi(x^0)=c_1(x^0)\varphi(x^0)$ と置く。明らかに $\|\varphi\|^2\leq\|\psi\|^2/c$ が成立つ。従って (3-2) と (3-4) を比較すれば

$$\frac{(E_\lambda\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2}=\frac{1}{c}\frac{(F_\lambda\psi,\psi)}{\|\varphi\|^2}\geq\frac{(F_\lambda\psi,\psi)}{\|\psi\|^2}$$

を得る。最後の不等号は $(F_\lambda\psi,\psi)\geq 0$ の時成立つ。φ が $L^2(K)$ を動く時 ψ もやはり $L^2(K)$ 全体を動く（$0<\sqrt{c}\leq c_1(x^0)\leq\sqrt{c_0}<+\infty$, $x^0\in K$ だから）。従って Min-Max 定理より Lemma が得られる。

Lemma 3-4. $\lambda\geq -v\sigma$ とする。この時 F_λ の固有値はすべて正，かつ可算無限個である。

証明） $(F_\lambda\varphi,\varphi)\geq 0$ for ${}^\forall\varphi\in L^2(K)$ かつ $F_\lambda\varphi\equiv 0\Rightarrow\varphi\equiv 0$ を示す。それには Lehner-Wing [5] の方法を3次元空間に拡張すればよい。 $w=(w_1,w_2,w_3)\in R^3$ とし，Fourier 変換

$$\hat{\varphi}(w)\equiv\int_K e^{iw\cdot r^0}\varphi(r^0)dr^0$$

$$(\tilde{F_\lambda\varphi})(w)\equiv\int_{R^3}e^{-iw\cdot r^0}(F_\lambda\varphi)(r^0)dr^0$$

を定義する。 $e^{-\alpha|r^0|}/|r^0|^2\in L^1(R^3)$ $(\alpha>0)$ であるから，簡単な計算により

$$(\tilde{F_\lambda\varphi})(w)=\frac{c}{|w|}\tan^{-1}\frac{|w|}{\frac{\lambda}{v}+\sigma}\,\hat{\varphi}(w)\quad,\quad\lambda>-v\sigma$$

を得る。但し $|w|=\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}$. Fourier 変換に対する parseval の等式から

$$(3\text{-}5)\qquad (F_\lambda\varphi,\varphi)=c\int_{R^3}\frac{1}{|w|}\tan^{-1}\frac{|w|}{\frac{\lambda}{v}+\sigma}\,|\hat{\varphi}(w)|^2dw\,.$$

$\lambda>-v\sigma$ であるからこの被積分関数 ≥ 0 だから，$(F_\lambda\varphi,\varphi)\geq 0$ を得る。更に $F_\lambda\varphi\equiv 0$ とすると (3-5) より $\hat{\varphi}(w)\equiv 0$ でなければならない。即ち $\varphi(r^0)\equiv 0$ を得る。（証明終り）

以上の Lemma 3-2～4 より次の Lemma が従う。

Lemma 3-5. $\lambda>-v\sigma$ とする。G_λ は可算無限個の正の固有値を持つ。

§4 $\lambda \leqq -v\sigma$ での $p_n(\lambda)$ の性質

$\lambda \leqq -v\sigma$ の時，F_λ は正値でないので少し複雑になる。まず $\beta = -\left(\frac{\lambda}{v}+\sigma\right)$ とおく。今の場合 $\beta \geqq 0$。$R_\beta = \{ u = (u_1, u_2, u_3)\,;\ |u| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \leqq \beta \}$ なる球（$\subset R^3$）を考える。次式が成立つ

$$(4\text{-}1)\qquad F_\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{c}{4\pi}\int_{R_\beta} \cos k(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot u \,\frac{du}{|u|} + \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}\left(2 - e^{-\beta|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$$

$$\equiv F_\lambda^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{x}') + F_\lambda^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x}') \quad ; \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K .$$

operator $F_\lambda^{(1)}$, $F_\lambda^{(2)}$ は $L^2(K)$ で共に compact, self-adjoint であること，及び $F_\lambda = F_\lambda^{(1)} + F_\lambda^{(2)}$ であることは明らかである。

Lemma 4-1. $\lambda \leqq -v\sigma$ に対し，即ち $\beta \geqq 0$ に対し

$$\mu_n(F_\lambda) \geqq \mu_n(F_\lambda^{(1)}) \quad \text{for each } n .$$

証明）Lemma 3-4 と同様の方法で operator $F_\lambda^{(2)}$ は正値であることがわかる。（証明終り）。

ここで $\mathbf{x}$ の原点を球 K の中心に選ぶ（一般性は失なわない）。

$$(4\text{-}2)\qquad \cos k(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot u = \cos k\mathbf{x}\cdot u \cos k\mathbf{x}'\cdot u - \sin k\mathbf{x}\cdot u \sin k\mathbf{x}'\cdot u$$

に着目して次のように定義する。

$$(4\text{-}3)\qquad H_{\beta c}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{c}{4\pi}\int_{R_\beta} \cos k\mathbf{x}\cdot u \cos k\mathbf{x}'\cdot u \,\frac{du}{|u|}$$

$$(4\text{-}4)\qquad H_{\beta s}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{c}{4\pi}\int_{R_\beta} \sin k\mathbf{x}\cdot u \sin k\mathbf{x}'\cdot u \,\frac{du}{|u|}$$

但し $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K$ とする。operator $H_{\beta c}$, $H_{\beta s}$ は $L^2(K)$ 上で compact

かつ self-adjoint である。又 $F_\lambda^{(1)} = H_{\beta c} - H_{\beta s}$.

Lemma 4-2. Operator $H_{\beta c}$ は可算無限個の正の固有値を持つ。

証明) $\varphi \in L^2(K)$, $\varphi(\mathfrak{n}^0) = \varphi(-\mathfrak{n}^0)$ なる関数の全体を $L^2_c(K)$ と書く。明らかにこれは $L^2(K)$ の部分空間かつ無限次元である。更に $\forall \varphi \in L^2_c(K)$, $\varphi \not\equiv 0$ に対し (4-3) より

$$(4\text{-}5) \qquad (H_{\beta c}\varphi, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_{R_\beta} \frac{1}{|u|}\left|\int_K \cosh \mathfrak{n}^0 \cdot u\, \varphi(\mathfrak{n}^0)\, d\mathfrak{n}^0\right|^2 du > 0$$

を得る（証明終り）。

Lemma 4-3. $\mu_n(F_\lambda^{(1)}) = \mu_n(H_{\beta c})$ for each n.

証明) $F_\lambda^{(1)} = H_{\beta c} - H_{\beta s}$ より $H_{\beta c}H_{\beta s} = H_{\beta s}H_{\beta c} = 0$ であれば よい。 ところで

$$\int_K H_{\beta c}(\mathfrak{n}^0, \mathfrak{n}^{0\prime\prime}) H_{\beta s}(\mathfrak{n}^{0\prime\prime}, \mathfrak{n}^{0\prime})\, d\mathfrak{n}^{0\prime\prime} = \int_{R_\beta} \frac{1}{|u|} \cosh \mathfrak{n}^0 \cdot u\, du \int \frac{1}{|u'|} \cosh \mathfrak{n}^{0\prime} \cdot u'\, du'$$
$$\times \left[\int_K \cosh \mathfrak{n}^{0\prime\prime} \cdot u \sinh \mathfrak{n}^{0\prime\prime} \cdot u'\, d\mathfrak{n}^{0\prime\prime}\right].$$

右辺の $[\cdots] \equiv 0$ for $\forall u, u' \in R_\beta$ である（証明終り）。

従って Lemma 3-2, 3-3, 4-1, 4-3 より $\lambda \leqq -\nu\sigma$ $(\beta > 0)$ の時

$$(4\text{-}6) \qquad \rho_n(\lambda) \geq \mu_n(E_\lambda^{(\cdot)}) \geq \mu_n(F_\lambda) \geq \mu_n(F_\lambda^{(1)}) = \mu_n(H_{\beta c}).$$

を得る。Lemma 4-2 によって $\mu_n(H_{\beta c}) \neq 0$ for each n, よって次の Lemma を得る。

Lemma 4-4 G_λ $(\lambda \leq -\nu\sigma)$ は無限個の正の固有値 $\rho_n(\lambda)$

を持つ。

最後に $\rho_n(\lambda)\to\infty$ $(\lambda\to-\infty)$ for each n を証明する。まず $\gamma=\beta a$ とおく。a は K の半径であった。(4-3)で $u\to\gamma u$ とおきなおせば

(4-7) $$H_{\beta c}(\mathfrak{v}^\circ,\mathfrak{v}^{\circ\prime})=\frac{c}{4\pi}\gamma^2\int_K \cosh\gamma\mathfrak{v}^\circ\cdot u\,\cosh\gamma\mathfrak{v}^{\circ\prime}\cdot u\,\frac{du}{|u|}\quad.$$

そこで

(4-8) $$I_\gamma(\mathfrak{v}^\circ,\mathfrak{v}^{\circ\prime})=\frac{c}{4\pi a}\int_K \cosh\gamma\mathfrak{v}^\circ\cdot u\,\cosh\gamma\mathfrak{v}^{\circ\prime}\cdot u\,du\,;\ \mathfrak{v}^\circ,\mathfrak{v}^{\circ\prime}\in K.$$

によって operator I_γ を定義する。明らかに compact, self-adjoint on $L^2(K)$.

Lemma 4-5. $\mu_n(H_{\beta c})\geq\gamma^2\mu_n(I_\gamma)$ for each n.

証明) $|u|\leq a$ for $u\in K$ だから, $\forall\varphi\in L^2(K)$ に対し

$$((H_{\beta c}-\gamma^2 I_\gamma)\varphi,\varphi)=\frac{c}{4\pi}\gamma^2\int_K\left(\frac{1}{|u|}-\frac{1}{a}\right)\left|\int_K\cosh\gamma\mathfrak{v}^\circ\cdot u\,\varphi(\mathfrak{v}^\circ)\,d\mathfrak{v}^\circ\right|^2du\geq 0$$

従って Min-Max 定理より明らか。(証明終り)

Lemma 4-6. I_γ $(\gamma>0)$ は無限個の正の固有値を持つ。

証明) Lemma 4-2 と同様に出来る(証明終り)。

さて operator T_γ を

(4-9) $$T_\gamma(\mathfrak{v}^\circ,\mathfrak{v}^{\circ\prime})=\cosh\gamma\mathfrak{v}^\circ\cdot\mathfrak{v}^{\circ\prime}\ ;\quad \mathfrak{v}^\circ,\mathfrak{v}^{\circ\prime}\in K$$

によって定義すれば，(4-8) より，

$$(4\text{-}10) \qquad I_\gamma = \frac{c}{4\pi a} T_\gamma{}^2$$

が従う。T_γ は compact, self-adjoint on $L^2(K)$.

Lemma 4-7. T_γ の固有値はすべて負でない。

証明) (4-9) を展開する。

$$(4\text{-}11) \qquad T_\gamma(\mathfrak{n}^0, \mathfrak{n}^{0\prime}) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{2n} \frac{(\mathfrak{n}^0 \cdot \mathfrak{n}^{0\prime})^{2n}}{(2n)!}$$

そこで operator S_n を

$$(4\text{-}12) \qquad S_n(\mathfrak{n}^0, \mathfrak{n}^{0\prime}) = (\mathfrak{n}^0 \cdot \mathfrak{n}^{0\prime})^{2n} \ ; \ \mathfrak{n}^0, \mathfrak{n}^{0\prime} \in K$$

によって定義するとこれは compact, self-adj. on $L^2(K)$. かつ

$$(4\text{-}13) \qquad T_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} S_n$$

が成立つ(一様収束)。ところで $\mathfrak{n}^0 = (x, y, z)$, $\mathfrak{n}^{0\prime} = (x', y', z')$ とおけば ${}^\forall \varphi \in L^2(K)$ に対して，$C_{i,j,k}$ を正定数として

$$(S_n \varphi, \varphi) = \sum_{i+j+k=2n} C_{i,j,k} \left| \int_K x^i y^j z^k \varphi(\mathfrak{n}^0) d\mathfrak{n}^0 \right|^2 \geq 0$$

が成立つ。よって S_n は正値。(4-13) より T_γ も正値である(証明終り)。

Lemma 4-8. $\mu_n(I_\gamma) = \frac{c}{4\pi a} \{\mu_n(T_\gamma)\}^2$ for each n.

証明) (4-10)及び Lemma 4-7 より明らか(証明終り).

Lemma 4-9. $\gamma \geq \gamma' > 0$ ならば

$$\mu_n(T_\gamma) \geq \mu_n(T_{\gamma'}) \quad \text{for each } n.$$

証明) (4-13) 及び Lemma 4-7 より

$$T_\gamma - T_{\gamma'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2n} - \gamma'^{2n}}{(2n)!} S_n \geq 0$$

が従う(証明終り)。

従って (4-6), Lemma 4-5, 8, 9 より次式を得る。

$$(4\text{-}14) \qquad \rho_n(\lambda) \geq \mu_n(H_{\beta c}) \geq \gamma^2 \mu_n(I_\gamma) \geq \frac{c}{4\pi a}\gamma^2 \{\mu_n(T_\gamma)\}^2 \geq \geq \frac{c}{4\pi a}\gamma^2 \{\mu_n(T_{\gamma'})\}^2$$

$$(\beta = \gamma a, \ \gamma \geq \gamma' > 0, \ -\beta = \frac{\lambda}{v} + \sigma)$$

ところで Lemma 4-6 と 4-8 より $\mu_n(T_{\gamma'}) \neq 0$ for $\forall n > 0, \forall \gamma' > 0$。

よって (4-14) で $\gamma' > 0$ を fix し, $\gamma \to \infty$ $(\lambda \to -\infty)$ とすれば結局

Lemma 4-10. $\rho_n(\lambda) \to \infty$ $(\lambda \to -\infty)$ for each n.

以上より次のことがわかった。

(1) G_λ は $-\infty < \lambda < \infty$ なる各 λ に対し無限個の正の固有値 $\rho_n(\lambda)$ を持つ。各 $\rho_n(\lambda)$ は $-\infty < \lambda < \infty$ で連続.

(2) $\rho_n(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty)$, $\rho_n(\lambda) \to \infty$ $(\lambda \to -\infty)$ for each n.

従って方程式 $\rho_n(\lambda) = 1$ は $-\infty < \lambda < \infty$ に少くとも1つの根 λ_n を持つ。(1)より λ_n の個数は無限個, λ_n は B の固有値。従って

§1の定理2が証明出来た。

Operator B は real eigenvalue の外に complex eigenvalue を持つのであるがその個数や分布は未解決である。

尚 $\sigma(\mathbb{r}^0)$, $c(\mathbb{r}^0)$ が共に D で定数の場合については既に[6]で同じ結果を得ている。発表の際はこの場合について述べた。

References

[1] Jörgens. K. ; CPAM, 11, 209(1958)

[2] Mikhlin. S.G. ; "Multi-dimensional Singular Integrals and Integral Equations". Pergamon (1965)

[3] Zaanen. A.C. ; "Linear Analysis" NorthHoland (1953)

[4] Courant. R., Hilbert. D. ; "Method of Math. Phys". vol. 1. Interscience, (1953)

[5] Wing. G. M. ; "An Introduction to Transport Theory" p.93 John-Wiley (1962)

[6] Ukai. S. ; J. Nucl. Sci. Tech. 3, 263(1966)