数理解析研究所講究録
107巻 1971年 109-113

泥堂氏の方程式 $y''=(x-A)y$ をめぐって

一松 信（京大,数理研）

0. 由来

平野菅保氏より，標題の方程式の境界条件 $y(0)=y(+\infty)=0$ に対する固有値問題をきき，その解析を少しく試みたので，概要を報告する．

問題の方程式は Bessel 函数に帰着され，$x\to+\infty$ のとき $y\to 0$ となる解は不安定な解であって，普通の数値計算では求めにくい．そのための二三の工夫が中心である．

1. 方程式の厳密解

座標をずらせて

(1) $$y''=xy$$

の $y(+\infty)=0$ である解の右側から見た最初の0点が $-A$ である．(1) は $x=0$ において超級数による解（收束半径∞）をもち，それはつぎのように表現できる：

$x>0$ においては，$z=\frac{2}{3}x^{3/2}$ とおくと，変形 Bessel 函数により

$$(2) \qquad y = z^{\frac{1}{3}}\left(a\, I_{\frac{1}{3}}(z) + b\, K_{\frac{1}{3}}(z)\right)$$

$x<0$ においては, $z=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ とおくと

$$(3) \qquad y = z^{\frac{1}{3}}\left(\alpha\, J_{\frac{1}{3}}(z) + \beta\, J_{-\frac{1}{3}}(z)\right)$$

係数は $a=\alpha+\beta$, $b=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\alpha$; $\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{3}}b$, $\beta=-a+\frac{\pi}{\sqrt{3}}b$

で結ばれる. $y(+\infty)=0$ である解は, $a=0$ で特長づけられ, $\alpha=\beta$ に対する(3)の最初の0点は, x にもどして

$-A_0$, $A_0=2.3381074104\cdots$

である. —— 泥堂氏のもとの値は $A=2.33810769\cdots$ で, 2.8×10^{-7} のずれがある. なおこれに対する z の値をBとおく. $B=\frac{2}{3}A_0^{3/2}$.

A に δ の誤差があると, たとえ途中の計算が完全に誤差なしで実行できても, (2) の a が完全に0にならないので, $x\to+\infty$ となると, $I_{\frac{1}{3}}$ の項が $K_{\frac{1}{3}}$ の項にうちかち, $y\to\pm\infty$ となる. もし途中の計算が完全に誤差なしで実行できても, $|a I_{\frac{1}{3}}|=|b K_{\frac{1}{3}}|$ となる x の値は, δ^2 以上を無視すると

$$\frac{4}{3}x^{3/2}=2z=-\log\left|\frac{\delta}{C}\right| \ ; \quad C=\frac{2\pi}{3}A_0\left(J_{\frac{1}{3}}(B)\right)^2 \doteqdot 0.32\cdots$$

であって, 意外に小さい x で「破局」となる. この種の不安定性は, もとの方程式に固有の性格である. ($\delta=2.8\times10^{-7}$ のとき, $x\doteqdot 4.8$; $x+A_0\doteqdot 7$ くらい.)

2. 対策

(i) 宇野教授の実験によると，このような場合，刻みを粗くし，桁数も短くし，つまりいい加減にとくと，係数 a がいつでも切り捨てられて完全に0となり，かえって'期待される'解に近いものがえられることもある由である．

(ii) 占部教授の御注意によるが，もし A を定めるだけなら，不安定性を逆に使い，なるべく精密にといて，$y\to+\infty$ にゆくか $y\to-\infty$ にゆくかの傾向を見定め，A の範囲をせばめてゆくこともできそうである．

(iii) 右から逆にとく手法は，ためしてみた上では有効であった．初期値は $y(x_0)=0$，$y'(x_0)<0$ と $y(x_0)>0$，$y'(x_0)=0$ からはじめる．a の僅かの値は，左へ進めば，まったくきいてこない．実験では $x_0=7.0$，初期値 $=\pm e^{-\frac{2}{3}x_0^{3/2}}$，刻み幅 $h=0.25$，平野氏による8次までの Taylor 展開の方法で，

$$A = 2.33810740\cdots$$

がもとめられた．漸近形にあわせるため，前者を $\sqrt{2\pi}$ 倍しておけば，y の値そのものも双方でかなり近い．

この方法で解の値を求めるには，$x=-A$ での初期値にあうよう，あとで定数倍する必要がある．

(iv) (iii) をさらにすすめれば，$x\to+\infty$ のとき $y\to0$ となる漸近展開を理論的に求めて，初期値のよい近似値からはじ

めることが考えられる．この種の本質的に不安定な解を計算するには，理論解を援用しなければ，無理であろう．

(v) 平野氏の Taylor 展開による方法は，(1)のような線型で $y^{(p)}$ が漸化式で求められる方程式については，きわめて有利である．p 次までとったとき，全体の打ち切り誤差はほぼ h^p に比例し，手間は p/h に比例するから，精度にもよるが，p は大きいほど有利である*)．実用上には，p を一定とせず，誤差評価をして必要な項数までとってゆく可変 Taylor 展開の方法が有用であろう．またこの際 y' も計算するので，0点を求めるには，Newton 法が有効に活用できるのも長所である．

3. 感想

昔やったことのある Bessel 函数の漸化式

$$J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0 \tag{4}$$

を n の大きい方から下げてゆく計算は，(1) の差分近似と解釈でき，本質的に同じ問題であった．逆向きに解く手法はまったく同一である．

初期値を漸近展開で精密に求める案も試みる価値がある．しかし実用的には“いい加減”な値からはじめて，あとで補正するほうが，かえって楽なように思われる．

付記　2節 (v) *) p の最適値について．

もし理想化して $h^p = c$（一定）の下で p/h を最小にするとすれば，つぎのようになる．hは小さく，たぶん <1 だから，c は 1 より小，したがって $\log c$ は負なので，これを $-a$ とおき，$1/h = x$ とおくと，

$$p/h = px = ax/\log x$$

である．$f(x) = \log x/x$ に対して $f'(x) = (1-\log x)/x^2$ で，$f(x)$ の最小は $x = e$，したがって $h = 1/e$ でおこる．だから刻み幅は 1/2 か 1/4 にして，p を必要な精度がでるまでとるのが賢明である．比例定数が問題であるが，$h = 1/e$ なら $h^p = c$ とするとき，$p = a\ (= -\log c)$ である．c が 10^{-7} くらいなら，p を 20 くらいまで上げるのがよい．

Taylor 展開による常微分方程式の解法は，新しく見直す価値がありそうである．ただし多項式を係数とする線型方程式なら，$y^{(p)}$ は漸化式で容易に求められるが，一般の場合には数式処理によるのと，漸化式によって数値的に求めるのと，どちらが有利であるのか，疑問である．手間の点ではたぶん後者が早いだろうが，数値的不安定性などの吟味は，まだ完全ではないように思われる．