数理解析研究所講究録
107巻 1971年 1-5

converging factor について

広島大 理　新谷尚義

収束級数

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$$

の和 S を，部分和 $S_k = \sum_{l=0}^{k} u_l$ を計算して求める場合を考えよう。

(2) $$S = S_{n-1} + u_n C_n \qquad (n \geqq m,\ u_n \neq 0)$$

と表わすことができるとき C_n を converging factor という。

C_n はつぎの方程式をみたす。

(3) $$u_n - u_n C_n + u_{n+1} C_{n+1} = 0$$

$r_n = u_n / u_{n-1}$ が

(4) $$r_n = A_0 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \frac{A_3}{n^3} + \cdots\cdots$$

と展開できる場合を考えよう。

(i) $A_0 \neq 1$ のとき

(5) $$C_n = B_0 + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \cdots\cdots$$

と展開できる。ただし

$$B_0 = 1/(1-A_0), \qquad B_1 = B_0^2 A_1, \qquad B_2 = B_0^2 A_2 + B_0^3 A_1 (A_1 - 1)$$

である。

(ii) $A_0 = 1$ のとき

(6) $$C_n = nB_{-1} + B_0 + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \cdots\cdots$$

と展開できる。ただし

$$B_{-1} = -1/(1+A_1), \quad B_0 = -A_2 B_{-1}/A_1$$

$$B_1 = (B_0 A_2 + A_3 B_{-1})/(1-A_1),$$

である。

C_n^* を C_n の近似とする。

(7) $$v_n = S_{n-1} + u_n C_n^* \qquad (n = m, m+1, \cdots\cdots)$$

とおくと $\{S_n\}$ の代りに，速く収束する数列 $\{v_n\}$ がえられる。これは

(8) $$d_n = 1 - C_n^* + r_{n+1} C_{n+1}^*$$

とおくと，(1)を級数

(9) $$S_{m-1} + u_m C_n^* + u_m d_m^* + u_{m+1} d_{m+1}^* + \cdots\cdots$$

で置きかえたことになる。

C_n を r_j を使って近似しよう。

(i) $A_0 \neq 1$ のとき

(10) $$C_n^{(1)} = \frac{1}{1 - r_{n+1}} = C_n + 0(n^{-2})$$

(11) $$C_n^{(2)} = 1 + \frac{r_{n+1}(1 - r_{n+2})}{1 - 2r_{n+2} + r_{n+1} r_{n+2}} = C_n + 0(n^{-3})$$

(12) $$d_n^{(1)} = \frac{r_{n+1}(r_{n+2}-r_{n+1})}{(1-r_{n+1})(1-r_{n+2})}$$

(13) $$d_n^{(2)} = \frac{r_{n+1}r_{n+2}\{(1-r_{n+1})(r_{n+3}-r_{n+2})+(1-r_{n+3})(r_{n+1}-r_{n+2})\}}{\{1-2r_{n+2}+r_{n+1}r_{n+2}\}\{1-2r_{n+3}+r_{n+2}r_{n+3}\}}$$

がえられる。

(ii) $A_0 = 1$ の場合

(14) $$C_n^{(2)} = C_n + O(n^{-1})$$

(例1) $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$$r_n = -1 + \frac{1}{n}$$

$$C_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{1}{4n^5} - \frac{17}{16n^7} + \cdots$$

C_n の近似として

$$C_n^{(1)} = \frac{2n+1}{4n}, \quad C_n^{(2)} = \frac{2n^2+n+1}{2(2n^2+1)}, \quad C_n^{(3)} = \frac{4n^3+2n^2+8n+3}{8n(n^2+2)}$$

がえられ，

$$d_n^{(1)} = -\frac{1}{4n(n+1)^2}, \qquad d_n^{(2)} = \frac{3}{2(n+1)(2n^2+1)(2n^2+4n+3)}$$

であるから，級数

$$S = S_{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{4n^2} + \sum_{m=n}\frac{(-1)^{m+1}}{4m^2(m+1)^2}$$

$$S = S_{n-1} + (-1)^{n+1} \frac{2n^2 + n + 1}{2n(2n^2+1)}$$

$$+ \sum_{m=n} (-1)^{m+1} \frac{3}{2m(m+1)(2m^2+1)(2m^2+4m+3)}$$

がえられる。

n	S_n	$V_n^{(1)}$	$V_n^{(2)}$	$V_n^{(3)}$
2	0.50000000000	0.75000000000	0.66666666667	0.70833333333
26	0.67428596108	0.69314749954	0.69314717980	0.69314718056
59	0.70154994870	0.69314716952	0.69314718056	
400	0.69189874306	0.69314718056		
6000	0.69306385417			

(例 2) $\quad u_n = \dfrac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

C_nの近似として

$$C_n^{(1)} = n + \frac{1}{2}, \quad C_n^{(2)} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}, \quad C_n^{(3)} = n + \frac{1}{2} + \frac{35n^2+18}{6n(35n^2+25)}$$

がえられる。

n	S_n	$V_n^{(1)}$	$V_n^{(2)}$	$V_n^{(3)}$
2	1.2500000000	1.5000000000	1.6666666667	1.6472222222
14	1.5759958390	1.6448582952	1.6449341562	1.6449340668
115	1.6362761123	1.6449339544	1.6449340668	
1194	1.6440968965	1.6449340668		
2000	1.6444341918			

[1] Lubkin, S. : A method of summing infinite series, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B., 48(1952), 228-254.

[2] Rosser, B. J. : Transformations to speed the convergence of series, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B., 46(1951),56-64.

[3] Szasz, O. : Summations of slowly convergent series, J. Math. Phys., 28(1949), 272-279.

[4] Wynn, P. : On a connection between two techniques for the numerical transformation of slowly convergent series, Nedrl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 65(1962), 149-154.

[5] Wynn, P. : On the computation of certain functions of large argument and parameter, BIT, 6(1966), 228-259.