数理解析研究所講究録
108巻 1971年 72-83

定数係数線型偏微分方程式の解の孤立特異点について

東大 理 金子晃

§0. 序

定数係数偏微分方程式論の一つの問題として斉次方程式の解の接続がある．以下$\mathcal{F}$は$\mathcal{O}, \mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{D}'$（順に実解析函数，hyperfunction，$C^\infty$函数，distributionの芽の層）のどれかを表わすこととし，単独偏微分方程式$P(D)u=0$の解層を$\mathcal{F}_P$で表わす．さて，$U\supset V$を二つの開集合とし，Γで層の切断を表わすとき，$\Gamma(V,\mathcal{F}_P)/\Gamma(U,\mathcal{F}_P)=$？ 即ち$V$上の解のうちどの程度のものが$U$上の解まで接続できるか？これが接続問題の最も手頃な定式化であり，これからやるのはそのごく特殊な場合に対する答である．

Uとして，原点の開近傍，$V=U\setminus\{0\}$をとる．このとき$\Gamma(U\setminus\{0\},\mathcal{F}_P)/\Gamma(U,\mathcal{F}_P)$は，原点に除去不可能な孤立特異点を持った解がどのくらいあるかを表わす．$\mathcal{F}=\mathcal{D}', \mathcal{B}$に対しては任意の$P\neq 0$に対しこれは0より多い．$\mathcal{D}'$に関してはGrušin[1]

がFourier変換を局所的にしたものを用いてこのことを示した.
$\mathcal{B}$の場合は次のように簡単に示される. まず層の完全列
$0 \to \mathcal{B}_p \to \mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{B} \to 0$ から cohomologyの完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{B}_p) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{B}) \xrightarrow{p} \Gamma(U, \mathcal{B}) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{B}_p) \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(U, \mathcal{B})}$$

$$0 \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{\Gamma_{\{0\}}(U, \mathcal{B}_p)} \longrightarrow \Gamma_{\{0\}}(U, \mathcal{B}) \xrightarrow{p} \Gamma_{\{0\}}(U, \mathcal{B}) \longrightarrow H^1_{\{0\}}(U, \mathcal{B}_p) \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1_{\{0\}}(U, \mathcal{B})}$$

さらに層$\mathcal{B}_p$に対する relative cohomology の完全列

$$0 \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{\Gamma_{\{0\}}(U, \mathcal{B}_p)} \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{B}_p) \longrightarrow \Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{B}_p) \to H^1_{\{0\}}(U, \mathcal{B}_p) \to H^1(U, \mathcal{B}_p)$$

を得る. さて$\mathcal{B}$に対し大域存在定理が成り立つから第一の列から$H^1(U, \mathcal{B}_p) = 0$ 故に第二, 第三の列とあわせて

$$\Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{B}_p) / \Gamma(U, \mathcal{B}_p) \cong H^1_{\{0\}}(U, \mathcal{B}_p) \cong \mathcal{B}_{\{0\}} / p\mathcal{B}_{\{0\}}$$

を得る. ここに$\mathcal{B}_{\{0\}}$は原点に台をもつ hyperfunction である.
これより, 上のものが$p \neq 0$なる限り0でないこと, 及びUのとりかたによらぬことがわかる.

この理由により$\mathcal{F} = \mathcal{D}', \mathcal{B}$に対する接続問題はsystemにしない限り意味がない. これに反して$\mathcal{F} = \mathcal{A}, \mathcal{E}$のときにはある種の$p \neq 0$に対して上の商空間が0になる. 即ち$U \setminus \{0\}$に於ける解が一斉に原点まで解としてのびてしまうという場合が起こる.
$\Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{E}_p) / \Gamma(U, \mathcal{E}_p) \neq 0$ なるpを決定する試みはGrušin[1]

によってなされた．そこではそのようなPに対する相当良い必要条件と十分条件が与えられたがまだ完全な答ではない．一方 Grušin [2] は $\Gamma(U\setminus\{0\}, \mathcal{E}_P) \cap \Gamma(U, \mathcal{D}')/\Gamma(U, \mathcal{E}_P) \neq 0$ なるPを決定することができた．それはPが hypoelliptic な因子を含むという条件で与えられる．Grušin が扱った二つの問題の困難さの本質的な違いは前者に於ては$\Gamma(U\setminus\{0\}, \mathcal{E}_P)$の元を一般には$\Gamma(U, \mathcal{D}')$の元とみることはできないのに対し，後者では初めから$\Gamma(U, \mathcal{D}')$の元に限っているため，すべての議論が代数的に円滑にゆくところにある．

さて，$\mathcal{B}$は$\mathcal{D}'$と違い flabby な層であり，$\Gamma(U\setminus\{0\}, \mathfrak{A}_P)$の元は常に$\Gamma(U, \mathcal{B})$の元とみなせる．このことに注意して Grušin [2] の方法を適当な修正のもとに翻訳すると，本報告の主題である次の定理を得る．

定理　$\Gamma(U\setminus\{0\}, \mathfrak{A}_P)/\Gamma(U, \mathfrak{A}_P) \neq 0$ なる為にはPが elliptic な因子をもつことが必要十分である．

§1　定理の証明

最初に $\Phi_U = \Gamma(U\setminus\{0\}, \mathfrak{A}_P)/\Gamma(U, \mathfrak{A}_P)$ はUによらぬことに注意する．この証明はまわり道になるので次節に与えることとし，以下Uを固定して考える．

定義1．$u \in \Gamma(U, \mathcal{B}) = \mathcal{B}(U)$ が原点に除去不可能な孤立解析特異点をもった $P(D)u = 0$ の解であるとは，

$u \in \Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_p(U \setminus \{0\})$ かつ原点でどのように修正しても $u \notin \Gamma(U, \mathcal{A}_p) = \mathcal{A}_p(U)$ なることである

ここで $u \notin \mathcal{A}_p(U)$ なる条件は $u \notin \mathcal{A}(U)$ とも $u \notin \mathcal{B}_p(U)$ とも云い換えられる．前者が同値なことは明だが後者の云い換えは次の事実による

命題 1，$u \in \mathcal{B}_p(U)$ が $u \in \mathcal{A}(U \setminus K)$，$K \subset\subset U$ ならば $u \in \mathcal{A}_p(U)$ である

この証明も次節で与える．同様に次のことも成り立つ．

命題 2，$\Gamma_K(U, \mathcal{B}_p) = 0$（即ちコンパクトな台をもつ解は 0 に限る）

次に Grušin [2] にならって

定義 2，Q は一般に local operator とする．P が Q-elliptic とは $Q \cdot \mathcal{B}_p \subset \mathcal{A}$ なることとする

定義 3，$P(D)E = Q(D)\delta$ の解（一般に hyperfunction の中に存在する）を P の Q-基本解という．

補題 3．P が Q-elliptic である為には，P の Q-基本解で原点以外では解析的なものが存在することが必要且十分である．

証明　P が Q-elliptic とせよ．P の基本解に対し $E = Q(D)F$ とおけば，E は原点以外で解析的な P の Q-基本解となる．逆に $P(D)E = Q(D)\delta$ の解 E は原点以外で解析的とせよ．

$P(D)u=0$ の原点の近傍 V に於ける解 u をとり，V の外へは 0 で拡張したものを u_1 とする（∂V 上にあいまいさがあるが以下の議論に影響しない）E を V に比して十分大きな球 W で切り取ったものを E_1 と書く．原点の十分近くで

$$Q(D)u=Q(D)u_1=Q(D)u_1*\delta=u_1*Q(D)\delta=u_1*P(D)E_1-u_1*w$$

ここに $\operatorname{supp} w\subset\partial W$ であって第二項は原点付近で 0，第一項については $\operatorname{supp} P(D)u_1\subset\partial V$ が原点の外にあるから E_1 の原点の近傍を 0 に修正したものを E_2 と書けば，原点の十分近くで

$$u_1*P(D)E_1=P(D)u_1*E_1=P(D)u_1*E_2$$

は解析的である　　q.e.d

なお上の証明から　補題3に於ける E は原点の近傍だけに存在すれば十分であることを注意しておく

補題4　P が既約で $P\nmid Q$ ならば $Q\mathcal{B}_P=\mathcal{B}_P$

この証明には system の存在定理が必要であるが今のところ local operator の system に対しては定式化さえはっきりしていないので次節でこの特別な場合に対し存在定理の証明を与える．

補題5，P が Q-elliptic である為には，$P=P_1R$，$Q=Q_1R$，P_1 は elliptic，と分解されることが必要且十分である

証明　表記の分解を仮定すると，$P(D)u=0$ の任意の解 u に対し，$P(D)u=P_1(D)\cdot R(D)u=0$．$P_1$ は elliptic より $R(D)u$ は解析的，故に $Q(D)u=Q_1(D)R(D)u$ も解析的である．逆に P を Q-elliptic とせよ．まず P が既約のとき $P|Q$，又は $P\nmid Q$ の場合は補題4により，$\mathcal{B}_P=Q\mathcal{B}_P\subset\mathfrak{A}$，即ち P は elliptic となる．一般の P に対してはその一つの既約因子を P_1 とし $P=P_1\cdot P_2$ とおく．上の議論により P_1 は elliptic 又は $P_1|Q$ 前者の場合は問題ない．後者の場合には $Q=P_1Q_1$ とおけば P_2 が Q_1-elliptic なことが次のようにして示される：E を P の Q-基本解で原点以外では解析的なものとせよ．$P(D)E=Q(D)\delta$ より $P_1(D)(P_2(D)E-Q_1(D)\delta)=0$ を得るが $P_2(D)E-Q_1\delta$ は原点以外では解析的だから命題1によって全空間で解析的な函数 f を表わす．f をコンパクト凸集合 K に制限したものを f_1 とし $P_2(D)F=f_1$ の $\mathfrak{A}(K)$ に於ける解 F をとれば $E'=E-F$ は K 上 $P_2(D)E'=Q_1(D)\delta$ をみたし，$K\setminus\{0\}$ で解析的である．故に補題3（証明の後の注意）により P_2 は Q_1-elliptic となる．この手続きを繰返せばよい．　q.e.d.

補題6　P が除去不可能な孤立解析特異点を伴った解をもつ為には，P が Q-elliptic 且つ $P\nmid Q$ なる Q が存在することが必要且十分である

証明　u を原点に孤立解析特異点をもった $P(D)u=0$ の解

とせよ．$P(D)u$ は原点のみに support をもつ hyperfunction である．よって，そのような hyperfunction の構造定理により infraexponential function $Q(\xi)$ が存在して $P(D)u=Q(D)\delta$ とかける．故に u は P の解析的な Q-基本解だから補題3により P は Q-elliptic である．$P\nmid Q$ なることは次のようにしてわかる： $Q=P\cdot R$ と書かれたとすると，$P(D)u=Q(D)\delta$ より $P(D)(u-R(D)\delta)=0$，即ち $u-R(D)\delta$ は $P(D)u=0$ の解である．しかも原点以外では解析的だから，命題1により $u-R(D)\delta$ なる u の修正は原点まで込めた $P(D)u=0$ の解析的な解となる．これは u が孤立解析特異点をもっていたことに矛盾する．逆に Q を補題が主張するものとし，E を原点以外で解析的な P の Q-基本解とすれば E は原点を孤立解析特異点とする P の解である．原点が真に除去不可能であることはもしも E の修正 E_1 で，原点まで込めて解であるようなものが存在したとすると，$E-E_1$ は原点のみに support を有し，従って $E-E_1=R(D)\delta$ と書けて

$$P(D)R(D)\delta=P(D)(E-E_1)=P(D)E=Q(D)\delta$$

$$\therefore P\cdot R=Q$$

となって矛盾を生ずるからである．

以上をもとに定理の証明は次のようになる．

P が除去不可能な孤立解析特異点をもつ

$\overset{\text{補題6}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}Q$, PはQ-elliptic で $P \nmid Q$

$\overset{\text{補題5}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}Q$ $P = P_1 \cdot R$ しかも $P \nmid Q$ より $P_1 (\neq 1)$ は elliptic
$Q = Q_1 \cdot R$

$\Longleftrightarrow$ Pは elliptic な因子をもつ q.e.d.

注意 楕円型作用素は原点まで$\mathcal{D}'$の元としてのばせるような孤立解析特異点を伴う解を持つから（例えば$\mathcal{D}'$に於ける基本解がそれ）$\Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{O}_P)/\Gamma(U, \mathcal{O}_P) \neq 0$ と $\Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{O}_P) \cap \Gamma(U, \mathcal{D}')/\Gamma(U, \mathcal{O}_P) \neq 0$ とは同値である。これはC^∞の場合と比べて著しい違いである。（C^∞の場合 hypoellipticity は $\Gamma(U \setminus \{0\}, C^\infty_P)/\Gamma(U, C^\infty_P) \neq 0$ の必要条件とならぬことが知られている）

§2 $\mathcal{B}$に於ける定数係数偏微分方程式の若干の結果

証明の残り

まず最初に$\Phi_U = \Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{O}_P)/\Gamma(U, \mathcal{O}_P)$ がUによらぬことを示そう。それは存在定理から出るのであるが、$\mathcal{O}$の場合はコンパクト凸集合についてしか知られていないので、ちょっと面倒である。Uを0の任意の開近傍 Vを 0を含む十分小さい任意の凸開近傍として $\Phi_U \cong \Phi_V$ を示せばよい。凸コンパクト集合L, Kを$L \supset U \supset K \supset V$ なるようにとる。$\Phi_L \hookrightarrow \Phi_U \hookrightarrow \Phi_K \hookrightarrow \Phi_V$は明であるが、完全列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(K,\mathcal{O}_p) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(K\setminus\{0\},\mathcal{O}_p) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\{0\}}(K,\mathcal{O}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\|"] & H^1(K,\mathcal{O}_p) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(V,\mathcal{O}_p) \arrow[r] & \Gamma(V\setminus\{0\},\mathcal{O}_p) \arrow[r] & H^1_{\{0\}}(V,\mathcal{O}_p) \arrow[r] & H^1(V,\mathcal{O}_p)
\end{tikzcd}$$

（ここに $H^1_{\{0\}}(K,\mathcal{O}_p)\cong H^1_{\{0\}}(V,\mathcal{O}_p)$ は excision theorem，$H^1(K,\mathcal{O}_p)=0$ は存在定理による）より $\Phi_K\cong\Phi_V$ 同様に $\Phi_L\cong\Phi_V$ も成り立つから $\Phi_U\cong\Phi_V$ が示された．

次に命題1の証明に移る．まず

補題7 $u\in\mathcal{B}_p(U)$ が $u\in\mathcal{E}(U\setminus K)$，$K\Subset U$ ならば実は $u\in\mathcal{E}_p(U)$ さらに P と U にのみ依存する正整数 m 及び正数 C が存在して $\sup\limits_{K\text{の近傍}}|D^k u|\le C\sup|D^{k+m}(P(D)u\alpha)|$

証明 K の近傍で 1 である $\alpha\in C_0^\infty(U)$ をとると，K の近傍で（E を P の $\mathcal{D}'$ に於ける基本解として）

$$u=\alpha u=\alpha u*\delta=\alpha u*P(D)E=P(D)\alpha u*E$$

ここで $P(D)\alpha u$ は仮定より C_0^∞ である．故に $u=\alpha u$ は K の近傍でも C^∞．同様に $E=\Delta^N F$，F は局所可積分函数と表わせば K の近傍で $u=\Delta^N P(D)(\alpha u)*F$ 故に $C=\int_{2U}|F|dx$ とおいて表記の評価を得る．

補題8 $\alpha(x)$ として $x\le 0$ で $\equiv 0$，$x\ge 1$ で $\equiv 1$ なる $C^\infty(R)$ の函数の範囲で考えるとき，各 k に対し $\sup\limits_{0\le x\le 1}|D^l\alpha|\le 25^k l^l$，$l\le k$ をみたす $\alpha=\alpha_k$ が存在する．

証明　$f(x)=\dfrac{\int_0^x x^k(1-x)^k dx}{\int_0^1 x^k(1-x)^k dx}$　$(0\leq x\leq 1)$

に対し計算により　$\sup_{0\leq x\leq 1}|f^{(\ell)}(x)|<25^k\ell^\ell$　が示される

この$f(x)$を適当なC^∞函数でC^kに於て近似すれば求めるα_kを得る

命題1の証明　まず補題7によりuはU全体でC^ωである．Kの近傍に於けるその微分係数評価は同じ補題に示された不等式で与えられるが，ここでαは$C_0^\infty(U)$かつKの近傍で1なら何でもよいことに注意し，そのようなαについて下限をとればTaylor展開が正の収束半径をもつような評価が得られることを見る．補題8が示す函数を各座標について作ってかけ合わせ，それを適当に回転したものでlocally finiteにKを覆い，それらのすべてを掛け合わせたものをαとして採り補題7の評価に使えばよい．　q.e.d.

次は存在定理の証明である　まず

命題9．infraexponential function $Q(\zeta)$，凸コンパクト集合K，$\varepsilon>0$に対してそれらのみで定まる$C_\varepsilon>0$があって　$\sup|f(\zeta)e^{-H_K(i\zeta)}|\leq C_\varepsilon\sup|Q(\zeta)f(\zeta)e^{-H_K(-i\zeta)+\varepsilon|\zeta|}|$

が成り立つ．ここにH_KはKのsupporting functionである

が位数の理論を使って証明できる（詳細は略）これより特に

系10．複素凸開集合Ωに対し，Z_Ωを type $<H_\Omega(-i\zeta)$ の指数型整函数の空間とするとき $Q(\zeta): Z_\Omega \longrightarrow Z_\Omega$ は閉値域をもつ．特に $Q(D)\mathcal{O}(\Omega)=\mathcal{O}(\Omega)$

系11．開集合Uに対し $Q(D)\mathcal{B}(U)=\mathcal{B}(U)$

が得られる　これらの推論の仕方は小松[3] p.217 と同様

補題4の証明　複素凸開集合Ωに対し $Q(D)\mathcal{O}_p(\Omega)=\mathcal{O}_p(\Omega)$ を示せば十分である．

$$Q(D)\mathcal{O}_p(\Omega)=\mathcal{O}_p(\Omega) \Leftrightarrow (\mathcal{O}_p(\Omega))' \xleftarrow{Q(D)} (\mathcal{O}_p(\Omega))' \leftarrow 0 \text{ 完全，閉値域}$$

$$(\mathcal{O}_p(\Omega))' \cong (\mathcal{O}(\Omega))'/P(\mathcal{O}(\Omega))', \quad (\mathcal{O}_p(\Omega))' \cong (\mathcal{O}(\Omega))'/P(\mathcal{O}(\Omega))'$$

これらの演算は$\mathcal{O}(\Omega)$がFS空間だから正当である．

Fourier変換して　$\Leftrightarrow Z_\Omega/P(\zeta)\cdot Z_\Omega \xleftarrow{Q(\zeta)} Z_\Omega/P(\zeta)Z_\Omega \leftarrow 0$ 完全，閉値域

ここでQが閉値域なことは系10でよい

故にQが injective なことを言えばよいがそれは次の補題から従う（命題9があるから整函数の範囲で割ればよい）

補題12　Pは既約多項式，Q, F, G は整函数とし $PF=QG$ かつ $P\nmid Q$ ならば $P|G$, $Q|F$.

証明　(1)　1変数のときは明である．2変数以上のとき $P(z)=P(z_1,z')=z_1^m+\cdots$ を仮定し $P=\prod_{i=1}^{m}(z_1-\lambda_i(z'))$ と書く．P既約より判別式 $\Delta(z')\not\equiv 0$．$\Delta=\{\Delta(z')=0\}$ の外部（連結）で $\lambda_i(z')$ は正則（多価）で相異なる．$P\nmid Q$ より $Q(\lambda_i(z'),z')\not\equiv 0$ なるiが存在することが特異点の除去定理によりわかる

(2) 実は任意の i について $Q(\lambda_i(z'), z') \not\equiv 0$ それにはすべての $\lambda_i(z')$ が $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \Delta$ で互いに入れ替わることを見ればよい．もしも互いに非可遷な二つの組に分かれたとすると $P(z, z')$ は z の多項式として z' の整函数を係数として因数分解されるがこれらの係数は高々多項式程度の増大度をもち，従って Liouville の定理により z' の真の多項式である．故に $P(z)$ は多項式として分解されたことになり不合理．

(3) 以上により $\{P(z)=0\} \cap \{\prod_{i=1}^{m} Q(\lambda_i(z'), z')=0\}$ の外では G/p は割り切れて正則函数を表わす．故に Hartogs の定理により G/p は整函数である．

系14．P, Q の仮定は補題4と同じとする $\begin{cases} P(D)u = f \\ Q(D)u = g \end{cases}$ は

$Q(D)f - P(D)g = 0$ のとき可解である．

証明 $P(D)u_1 = f$ なる u_1 をとり $w = u - u_1$ とおけば補題4に帰着される．

文献

[1] V. V. Grušin. On solutions with isolated singularities for partial differential equations with constant coefficients. Trans. Moskow Math. Soc 1966 p.p. 295−315

[2] V. V. Grušin On the Q-hypoelliptic equations (in Russian) Mat. Sb. 1962 57−2 p.p. 233−240

[3] 小松彦三郎 佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式 東大セミナリーノート 22

[4] S. Lang Diophantine Geometry, Interscience 1962