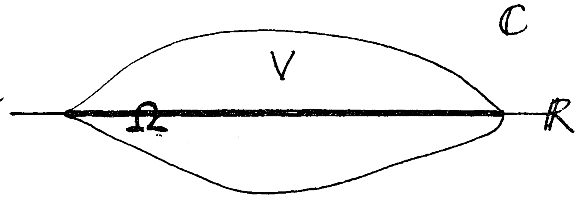
数理解析研究所講究録
108巻 1971年 1-44

相対コホモロジーとその応用

東大 理 小松彦三郎

1. はじめに。

佐藤の超函数(*hyperfunction*)は正則函数のある種の「境界値」として定義される。1変数の場合はごく簡単で次のようになる。$\Omega \subset \mathbb{R}$ を開集合、$V \subset \mathbb{C}$ を Ω を相対閉集合として含む開集合とする。このとき、Ω 上の *hyperfunction* は $V \setminus \Omega$ 上の正則函数の空間 $\mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ を、V 上の正則函数からなる部分空間 $\mathcal{O}(V)$ によって同値類に分けて得られる商空間 $\mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$ の元と定義される。$\varphi \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ のとき、φ の同値類が表わす超函数 $[\varphi]$ は φ の上半平面からの「境界値」と下半平面からの「境界値」の差:



$$(1) \qquad [\varphi](x) = \varphi(x+i0) - \varphi(x-i0)$$

と解釈することができる。実際、$[\varphi]$ が局所可積分な函数あるいは *distribution* の場合には、これらの境界値は *dis* tribution の位相あるいは函数の正則性に応じてそれより強い位相で存在し、(1)がなりたつ。

実1変数の函数あるいは超函数を正則函数の境界値の差として表わすという考え方は、古典解析学と深いつながりを持っている。Hardy, Littlewood 等による Fourier級数の函数論的研究では、単位円周上の(超)函数 $f(e^{i\theta})$ が、Fourier展開 $f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ を用いて定義されるそれぞれ $|z|<1$ 及び $|z|>1$ で正則な函数 $f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $f_-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ の境界値の差 $f(e^{i\theta}) = f_+(e^{i\theta}) - f_-(e^{i\theta})$ としてとらえられている。

また、Carleman による自己共役作用素 T のスペクトル分解定理：

$$(2) \qquad T = \int \lambda \, dE(\lambda)$$

の証明では、スペクトル測度 $dE(\lambda)$ が T のレゾルヴェント $R(z) = (z-T)^{-1}$ の境界値の差：

$$(3) \qquad \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \frac{-1}{2\pi i}\Big(R(\lambda+i0) - R(\lambda-i0)\Big)$$

として得られている。

このような正則函数の境界値の差が、定義は大局的であるにもかかわらず、局所的な性質を示すことは古くから注目されていた。また、現在では実函数論的な方法で証明されるの

が普通となっている多くの定理(共役函数の存在など)が、最初は複素函数論的な方法で得られていることも注目に値する。その後複素函数論的な方法がすたれたのは、多変数の場合に拡張することができなかったためと思われる。

佐藤の功績は第一に *hyperfunction* 全体が軟弱層(*faisceau flasque*)をなすという形で、正則函数の差がもつ局所性を一般的に導いたこと、第二に多変数の場合の理論を組立てたことである。

この佐藤理論の根底にあるのは、層係数の相対コホモロジーの理論である。1変数の場合には上述のような原始的な表示だけでも理論を構成することができるが、多変数の場合は相対コホモロジーが不可欠となる。上にも述べたように解析学では1変数の函数論が多用されたにもかかわらず、多変数函数論はあまり利用されなかった。その原因は道具が不足していたことによると思われる。佐藤理論で示されたように、相対コホモロジーは有力な手段である。今後もますます利用されることを期待する。

なお、解析学への応用という見地からは、佐藤の超函数の一般論だけでは不十分であることも指摘しておこう。例えば自己共役作用素のスペクトル分解の場合は、任意の連続あるいは Borel 可測函数 $f(\lambda)$ に対して

$$f(T)=\int f(\lambda)\,dE(\lambda)$$

が意味をもつ。しかし hyperfunction の一般論では T が有界かつ $f(\lambda)$ が実解析的であるときに限られる。

佐藤の超函数の立場からこのような問題を扱うには、超函数がいつ測度になるかなどの正則性の判定条件をみつけること、二つの超函数の積が定義される条件を求めること、無限区間での積分を扱うため、実直線のコンパクト化即ち増大度を定めた超函数の族を見出すこと、あるいは Fourier 変換論などが必要となる。これらの問題のあるものは既に Martineau [6]，森本 [7]，河合 [4] によって論じられている。Martineau 及び河合が示したように、以上の問題を扱うには、増大度を定めた相対コホモロジー群が有力な手段となるであろう。

しかしながら、森本、河合の研究はこのあと本人によって講演されることになっているから、ここではそれらにはふれず、この後の講演の準備をかねて、代数的な相対コホモロジーの理論と、位相幾何的な応用のみを示したい。

2. 相対コホモロジー群.

層の定義及び以下で証明を省いた事柄については私の講義録 [5] を参照されたい。ここで考える層はすべてアーベル

群の層またはある環上の加群の層とする。

Xを位相空間、$\mathcal{F}$をその上の層とする。このとき、

$$(4) \qquad 0 \to \mathcal{F} \to C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} C^2 \to \cdots$$

が完全系列となるような軟弱層C^iと層の準同型dが存在する。これを$\mathcal{F}$の<u>軟弱分解</u>という。ただし、層が<u>軟弱</u>であるとは、任意の開集合上の断面が全空間に拡張できることである。

Φを<u>台の族</u>、すなわちXの閉集合の族であって、(i) $A \in \Phi$, $B \subset A \Rightarrow B \in \Phi$, (ii) $A, B \in \Phi \Rightarrow A \cup B \in \Phi$ をみたすものとする。このとき$\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$または$\mathcal{F}_\Phi(X)$でもって、$\Phi$に属する集合を台とする$X$上の断面全体のなす加群を表わす。<u>$\Phi$に台をもつ$\mathcal{F}$係数の$p$次コホモロジー群</u>$H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$をコホモロジー群$H^p(\Gamma_\Phi(X, C^*))$と定義する。0次コホモロジー群$H^0_\Phi(X, \mathcal{F})$は$\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$に等しい。

特に、SをXの部分集合とし、$\Phi = \{A \,;\, A \subset S,\ X\text{で閉}\}$のとき、$H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$を$H^p_S(X, \mathcal{F})$, $H^p(X, X \setminus S, \mathcal{F})$または$H^p(X \bmod X \setminus S, \mathcal{F})$と書き、<u>$S$の中に台をもつ$p$次コホモロジー群</u>あるいは空間の対$(X, X \setminus S)$に対応する$p$次<u>相対コホモロジー群</u>という。

相対コホモロジーはSが開集合である場合が古典的であるが、われわれの目的にはSが閉集合である場合の方が重要で

ある。例えば層$\mathcal{F}$は任意の閉集合Sに対して$H_S^1(X, \mathcal{F})=0$がなりたつときそのときに限って軟弱である。

$H_\Phi^p(X, \mathcal{F})$はコホモロジー理論がもつべき諸性質をそなえている。例えば層の短完全系列

(5) $$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

に対して長完全系列

(6) $$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_\Phi^0(X, \mathcal{F}') \to H_\Phi^0(X, \mathcal{F}) \to H_\Phi^0(X, \mathcal{F}'') \\ \longrightarrow H_\Phi^1(X, \mathcal{F}') \to \cdots \end{aligned}$$

が従う。

相対コホモロジー群は更に次の諸性質をもつ。

<u>切除定理.</u> $S \subset Y \subset X$ かつSに含まれるYの閉集合Aは常にXの中で閉であって$A \cap \overline{X \setminus Y} = \phi$がなりたつとき、

(7) $$H_S^p(X, \mathcal{F}) = H_S^p(Y, \mathcal{F}).$$

<u>空間の三つ組に対する完全系列.</u> $X \supset Y \supset Z$ かつ (i) Xが任意の位相空間で、Y, Zは閉集合, (ii) XはパラコンパクトでY, Zは閉集合、あるいは (iii) Xは完全パラコンパクトでY, Zは任意とする。このとき

(8) $$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{X \setminus Y}^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H_{X \setminus Z}^0(X, \mathcal{F}) \to H_{Y \setminus Z}^0(Y, \mathcal{F}) \\ \longrightarrow H_{X \setminus Y}^1(X, \mathcal{F}) \to \cdots \end{aligned}$$

すなわち,

(9) $$0 \to H^0(X, Y, \mathcal{F}) \to H^0(X, Z, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(Y, Z, \mathcal{F})$$

$$\to H^1(X, Y, \mathcal{F}) \to \cdots$$

は完全である。

特に、$Z = \phi$ のときは、

空間の対に対する完全系列.

$$(10) \quad \begin{aligned} 0 &\to H^0(X, Y, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(Y, \mathcal{F}) \\ &\to H^1(X, Y, \mathcal{F}) \to \cdots \end{aligned}$$

となる。但し、次のうちの一つを仮定する：

$$(11) \begin{cases} \text{(i)} & X \text{ は任意の位相空間で、} Y \text{ は閉集合,} \\ \text{(ii)} & X \text{ はパラコンパクトで、} Y \text{ は閉集合、} \\ \text{(iii)} & X \text{ は完全パラコンパクトで、} Y \text{ は任意。} \end{cases}$$

更にこれらを一般にした *Mayer-Vietoris* の定理を導くため、X_1, X_2 を X の部分集合とする。r_i を $X_i \subset X_1 \cup X_2$ に伴う制限写像、s_i を $X_1 \cap X_2 \subset X_i$ に伴う制限写像とすると、$X_1 \cup X_2$ 上の任意の層 $\mathcal{F}$ に対して

$$(12) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{r_1 \oplus r_2} \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2) \xrightarrow{s_1 - s_2} \mathcal{F}(X_1 \cap X_2) \to 0$$

は半完全である。第1の位置では常に完全、第3の位置ではもし $\mathcal{F}(X_1 \cap X_2)$ の元が常に $\mathcal{F}(X_1)$ または $\mathcal{F}(X_2)$ の元に拡張できるならば完全である。第2の位置で完全であることは $X_1 \cup X_2$ の被覆 $\{X_1, X_2\}$ に関して $\mathcal{F}$ の元のはりあわせが可能であることを意味する。

X_i が（$X_1 \cup X_2$ において）（11）の条件をみたし、更に（$X_1 \cup X_2$ 上の）任意の軟弱層 $\mathcal{F}$ に対して（12）が完全のとき、（X_1, X_2）を切除的な対という。例えば、次の場合は切除的である。

(i) X_1, X_2 が共に $X_1 \cup X_2$ で閉集合；

(ii) $X_1 \cup X_2$ がパラコンパクトで、X_1, X_2 が共に $X_1 \cup X_2$ で閉集合；

(iii) $X_1 \cup X_2$ が完全パラコンパクトで $X_1 \cup X_2 = \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2} X_1 \cup \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2} X_2 \cup (X_1 \cap X_2)$。

このとき（X_1, X_2）を切除的というのは次の定理がなりたつためである。

定理. X_1, X_2 は $X_1 \cup X_2$ において（11）の性質をもつとする。このとき（X_1, X_2）が切除的であるための必要十分条件は制限写像

(13) $$H^p(X_1 \cup X_2, X_2, \mathcal{F}) \to H^p(X_1, X_1 \cap X_2, \mathcal{F})$$

が $X_1 \cup X_2$ 上の任意の（軟弱）層 $\mathcal{F}$ に対して同型を与えることである。

証明. $X_1 \cup X_2$ 上の任意の軟弱層 $\mathcal{C}$ に対して、次の可換図形を考える。

$$
(14)\quad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X_1 \cup X_2, X_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(X_1 \cup X_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "s_2 \oplus id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(X_1) \oplus \mathcal{C}(X_2) \arrow[r, "s_1 \oplus id"] \arrow[d] & \mathcal{C}(X_1 \cap X_2) \oplus \mathcal{C}(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "id \oplus (-s_2)"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "id"] \arrow[d] & \mathcal{C}(X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

(11) の仮定により行はすべて完全である。また第3列も明らかに完全である。もし (X_1, X_2) が切除的ならば第2列も完全、故に9補題により、第1列は同型を与える。(4) が $\mathcal{F}$ の軟弱分解のとき、$\mathcal{C} = \mathcal{C}^p$ に対してこの同型を適用すれば (13) の同型がわかる。

逆に (13) が $\mathcal{F} = \mathcal{C}$ に対して同型となるならば (14) の第1列が完全、故に第2列も完全となり、(X_1, X_2) は切除的である。

$\mathcal{F}$ の軟弱分解に (12) の完全性を適用すれば、直ちに次の定理が導かれる。

<u>Mayer-Vietoris の定理</u>. (X_1, X_2) が切除的な対ならば $X_1 \cup X_2$ 上の任意の層 $\mathcal{F}$ に対して

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&0 \to H^0(X_1 \cup X_2, \mathcal{F}) \to H^0(X_1, \mathcal{F}) \oplus H^0(X_2, \mathcal{F}) \to H^0(X_1 \cap X_2, \mathcal{F}) \\
&\quad \to H^1(X_1 \cup X_2, \mathcal{F}) \to \cdots
\end{aligned}
$$

は完全である。

更に一般に次の定理がなりたつ。

<u>相対的 Mayer-Vietoris の定理</u> $X \supset X_i \supset Y_i$, $i=1,2$, かつ X_i, Y_i は $(X_1 \cup X_2)$ において (11) の条件をみたすとする。もし (X_1, X_2) 及び (Y_1, Y_2) が切除的ならば、任意の層 $\mathfrak{F}$ に対して

$$(16)\quad \begin{aligned} 0 &\to H^0(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2, \mathfrak{F}) \to H^0(X_1, Y_1, \mathfrak{F}) \oplus H^0(X_2, Y_2, \mathfrak{F}) \to H^0(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2, \mathfrak{F}) \\ &\to H^1(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2, \mathfrak{F}) \to \cdots \end{aligned}$$

は完全である。

<u>証明.</u> (4) を $\mathfrak{F}$ の軟弱分解としたとき軟弱層 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^p$ に対し次の可換図形を考える。

$$(17)\quad \begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2) & \to & \mathcal{C}(X_1, Y_1) \oplus \mathcal{C}(X_2, Y_2) & \to & \mathcal{C}(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}(X_1 \cup X_2) & \to & \mathcal{C}(X_1) \oplus \mathcal{C}(X_2) & \to & \mathcal{C}(X_1 \cap X_2) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}(Y_1 \cup Y_2) & \to & \mathcal{C}(Y_1) \oplus \mathcal{C}(Y_2) & \to & \mathcal{C}(Y_1 \cap Y_2) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

仮定により、第1行を除けばすべて完全である。故に9補題により第1行も完全である。(16) はこの完全性から直ちに導かれる。

定理の仮定が満たされる場合として、

(i) X_1, X_2, Y_1, Y_2 が $X_1 \cup X_2$ の開集合である場合；

(ii) $X_1 \cup X_2$ がパラコンパクトで，X_1, X_2, Y_1, Y_2 が $X_1 \cup X_2$ の閉集合である場合；

(iii) $X_1 \cup X_2$ が完全パラコンパクトで、

$$X_1 \cup X_2 = \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2} X_1 \cup \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2} X_2 \cup (X_1 \cap X_2)$$
$$Y_1 \cup Y_2 = \mathrm{int}_{Y_1 \cup Y_2} Y_1 \cup \mathrm{int}_{Y_1 \cup Y_2} Y_2 \cup (Y_1 \cap Y_2)$$

等がある。

(16) において $X_1 = X$, $X_2 = Y_2 = Y$, $Y_1 = Z$ とすれば三つ組の完全系列 (9) になる。

3. 写像錐のコホモロジー群.

位相幾何学におけるもう一つの長完全系列である写像錐および写像柱に関するコホモロジー群の完全系列も層係数のコホモロジー群の場合に拡張される。

X, Y を位相空間、$f: Y \longrightarrow X$ を連続写像、$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をそれぞれ X, Y 上の層とする。各 $y \in Y$ に対して連続な準同型 $h_y: \mathcal{F}_{f(y)} \longrightarrow \mathcal{G}_y$ が与えられているとき、その集まり $h = \{h_y\}$ を <u>f-準同型</u>といい、$h: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ で表わす。あるいは、X の開集合毎に定義された準同型 $h_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow$

$\mathcal{G}(f^{-1}(U))$ で制限写像と可換なものといってもよい。通常の層の準同型及び部分空間への制限写像等は f-準同型の特殊なものとみなすことができる。

$\mathcal{G}$ が f による $\mathcal{F}$ の逆像 $f^{-1}\mathcal{F}$、即ち $(f^{-1}\mathcal{F})_y = \mathcal{F}_{f(y)}$ で定義される層の場合には、恒等写像によって定まる自然な f-準同型 $f^*: \mathcal{F} \longrightarrow f^{-1}\mathcal{F}$ がある。反対に、$\mathcal{F}$ が $\mathcal{G}$ の f による順像 $f_*\mathcal{G}$、即ち $f_*\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U))$ で定義される層の場合にも、恒等写像 $f_*\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(f^{-1}(U))$ によって定まる自然な f-準同型 $f_*: f_*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ がある。

f-準同型 h は自然に $\mathcal{F}$ 及び $\mathcal{G}$ の軟弱(あるいは単射的)分解 $C^*\mathcal{F}$, $C^*\mathcal{G}$ の間の f-準同型 $h^*: C^*\mathcal{F} \longrightarrow C^*\mathcal{G}$ をひきおこし、これによってコホモロジー群の準同型 $h^\#: H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(Y, \mathcal{G})$ が定まる。これははじめの f-準同型 h によって一意的に定まる。

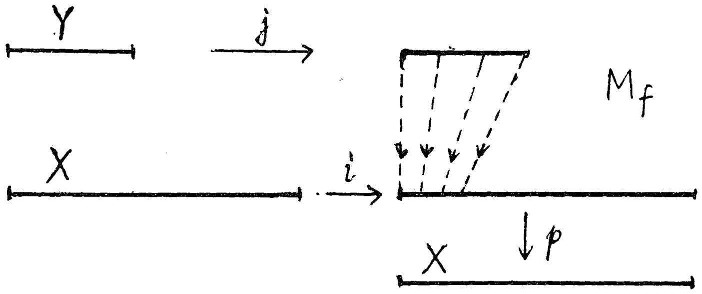
このとき、更に h の写像錐のコホモロジー群あるいは h に関する相対コホモロジー群と呼ばれる群 $H^p(X \xleftarrow{f} Y, \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G})$ が定義され、

$$(18)\quad \begin{aligned} 0 &\to H^0(X \xleftarrow{f} Y, \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(Y, \mathcal{G}) \\ &\to H^1(X \xleftarrow{f} Y, \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G}) \to \cdots \end{aligned}$$

が完全系列となる。

$H^p(X \xleftarrow{f} Y, \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G})$ の一つの定義を与えるため、f およ

び h の写像柱を次のように定義する。



まず、f の写像柱 M_f または $M(X \xleftarrow{f} Y)$ は、X と Y の合併集合 $X \cup Y$ において、$\{U \cup f^{-1}(U)$; U は X の開集合$\}$ $\cup \{V$: V は Y の開集合$\}$ を開集合の基本系としてもつ位相空間と定義する。$i: X \longrightarrow M_f$, $j: Y \longrightarrow M_f$ をそれぞれ恒等写像とすれば、これらによって X, Y はそれぞれ M_f の閉集合，開集合として同相に埋込まれる。また、$p: M_f \longrightarrow X$ を X 上で恒等写像、Y 上で f と一致する射影写像とする。

次に、h の写像柱 $\mathcal{M}_h$ または $\mathcal{M}(\mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G})$ は次のように定義される M_f 上の層である。

U を X の開集合とするとき、$\mathcal{M}_h(U \cup f^{-1}(U)) = \mathcal{F}(U)$。$V$ を Y の開集合とするとき、$\mathcal{M}_h(V) = \mathcal{G}(V)$。更に、制限写像 $\rho: \mathcal{M}_h(U \cup f^{-1}(U)) \longrightarrow \mathcal{M}_h(f^{-1}(U))$ は h_U と等しいとする。この前層が層をなすことは容易にたしかめられる。

$0 \to \mathcal{F} \longrightarrow C^*\mathcal{F}$, および $0 \to \mathcal{G} \to C^*\mathcal{G}$ が軟弱

分解のとき，M_f 上の層の列 $\mathcal{L}^* \mathcal{M}_h$ を

$$\mathcal{L}^p \mathcal{M}_h = i_* C^p \mathcal{F} \oplus i_* f_* C^{p-1} \mathcal{G} \oplus j_* C^p \mathcal{G},\ p = 0, 1, 2 \cdots$$

で定義し、また微分 $d : \mathcal{L}^p \mathcal{M}_h \to \mathcal{L}^{p+1} \mathcal{M}_h$ を

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{L}^p \mathcal{M}_h (U \cup f^{-1}(U)),\ U \text{ は } X \text{ の開集合},$$

$$\varphi_1 \in C^p \mathcal{F}(U),\ \varphi_2 \in C^{p-1} \mathcal{G}(f^{-1}(U)),\ \varphi_3 \in C^p \mathcal{G}(f^{-1}(U))$$

に対しては

$$d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (d\varphi_1, -h^p \varphi_1 - d\varphi_2 + \varphi_3, d\varphi_3)$$

で、

$$(\varphi_3) \in \mathcal{L}^p \mathcal{M}_h (V),\ V \text{ は } Y \text{ の開集合},$$

に対しては

$$d(\varphi_3) = (d\varphi_3)$$

で定義する。このようにして定義される d が層の準同型をなすことおよび $d^2 = 0$ は容易にたしかめられる。

<u>定理.</u> $(\mathcal{L}^* \mathcal{M}_h, d)$ は $\mathcal{M}_h$ の軟弱分解をなす。

<u>証明.</u> $\mathcal{L}^p \mathcal{M}_h$ の各成分は軟弱層の順像として軟弱層をなす。従って、$\mathcal{L}^p \mathcal{M}_h$ は軟弱である。

さて、$(\varphi_1, 0, \varphi_3) \in \ker(\mathcal{L}^0 \mathcal{M}_h \to \mathcal{L}^1 \mathcal{M}_h)(U \cup f^{-1}(U))$ とすると、まず $d\varphi_1 = 0$ より $\varphi_1 \in \mathcal{F}(U)$、次に $-h^0 \varphi_1 + \varphi_3 = 0$ より $\varphi_3(y) = h\, \varphi_1(f(y))$ を得る。最後の条件 $d\varphi_3 = 0$ は自動的にみたされる。また、$(\varphi_3) \in \ker(\mathcal{L}^0 \mathcal{M}_h \to \mathcal{L}^1 \mathcal{M}_h)(V)$ ならば、$d\varphi_3 = 0$ より $\varphi_3 \in$

$\mathcal{G}(V)$ がわかる。従って、$(\varphi_1,\ 0,\ \varphi_2)$ または (φ_3) を X 上では φ_1、Y 上では φ_3 と同一視すれば、$\mathcal{M}_h$ の断面が得られる。

次に $p>0$, $x\in X$ とし、

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \ker(\mathcal{L}^p\mathcal{M}_h \longrightarrow \mathcal{L}^{p+1}\mathcal{M}_h)_x$,

$\varphi_1 \in C^p\mathcal{F}_x$, $\varphi_2 \in \varinjlim_{U\ni x} C^{p-1}\mathcal{G}(f^{-1}(U))$, $\varphi_3 \in \varinjlim_{U\ni x} C^p\mathcal{G}(f^{-1}(U))$

と仮定する。但し、U は x の開近傍を動く。

$d\varphi_1 = 0$ より、$\varphi_1 = d\psi_1$ となる $\psi_1 \in C^{p-1}\mathcal{F}_x$ が存在する。また、$-h^p\varphi_1(f(y)) - d\varphi_2(y) + \varphi_3(y) = 0$, $y \in f^{-1}(U)$ より、$\varphi_3(y) = d(h^{p-1}\psi_1(f(y)) + \varphi_2(y))$, $y\in f^{-1}(U_1)$, を得る。そこで、$\psi_2 = 0$, $\psi_3(y) = h^{p-1}\psi_1(f(y)) + \varphi_2(y)$ とおけば、

$$\begin{aligned} d(\psi_1, \psi_2, \psi_3) &= (d\psi_1, -h\psi_1 + h\psi_1 + \varphi_2, d(h\psi_1 + \varphi_2)) \\ &= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \end{aligned}$$

がなりたつ。故に $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathrm{im}(\mathcal{L}^{p-1}\mathcal{M}_h \to \mathcal{L}^p\mathcal{M}_h)_x$ が結論された。

Y 上では $\mathcal{L}^p\mathcal{M}_h$ は $C^p\mathcal{G}$ と同じであるから、$\mathcal{L}^*\mathcal{M}_h$ は明らかに Y 上でも完全系列をなす。　　　　（証明終）

次に、$\pi^*: C^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}^*\mathcal{M}_h$, $\iota^*: \mathcal{L}^*\mathcal{M}_h \longrightarrow C^*\mathcal{F}$, $\kappa^*: \mathcal{L}^*\mathcal{M}_h \longrightarrow C^*\mathcal{G}$ をそれぞれ次のように定義する：

$\pi^p\varphi_1 = (\varphi_1, 0, h^p\varphi_1)$, $\varphi_1 \in C^p\mathcal{F}$;

$$\iota^p(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \varphi_1, \quad \varphi_1 \in C^p\mathcal{F}, \varphi_2 \in C^{p-1}\mathcal{G}, \varphi_3 \in C^p\mathcal{G};$$

$$\kappa^p(\varphi_3) = \varphi_3, \quad \varphi_3 \in C^p\mathcal{G}。$$

容易にたしかめられるように、これらはそれぞれ p-, i-, j- 準同型からなる層のコチェイン変換になる。

定義から明らかなように、

$$\kappa^*\pi^* = h^* : C^*\mathcal{F} \longrightarrow C^*\mathcal{G},$$

$$\iota^*\pi^* = id : C^*\mathcal{F} \longrightarrow C^*\mathcal{F}$$

がなりたつ。最後に、$\pi^*\iota^*$ であるが、残念ながら、これは $id : \mathcal{L}^*\mathcal{M}_h \longrightarrow \mathcal{L}^*\mathcal{M}_h$ とホモトープにはならない。しかし、$\mathcal{L}^*\mathcal{M}_h$ を i でひきもどして X 上の層 $i^{-1}\mathcal{L}^*\mathcal{M}_h$ を自分自身にうつす層の準同型とみなせば、id とホモトープである。実際、$\eta : \mathcal{L}^p\mathcal{M}_h(U \cup f^{-1}(U)) \to \mathcal{L}^{p-1}\mathcal{M}_h(U \cup f^{-1}(U))$ を

$$\eta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (0, 0, -\varphi_2)$$

で定義すれば容易に

$$\pi^*\iota^* - id = d\eta + \eta d$$

が示される。

特に、X の任意の開集合 U に対し、$C^*\mathcal{F}(U)$ と $\mathcal{L}^*\mathcal{M}_h(U \cup f^{-1}(U))$ はコチェイン同値である。以上によって次の定理を得る。

<u>定理.</u> X の中の任意の開集合 U に対して、次の図形は可換である。

$$
\begin{array}{lccc}
 & H^p(U,\mathcal{F}) & \xrightarrow{h} & H^p(f^{-1}(U),\mathcal{G}) \\
(19) & \pi \Downarrow \Uparrow \iota & & \| \, id. \\
 & H^p(U\cup f^{-1}(U),\mathcal{M}_h) & \xrightarrow{\kappa} & H^p(f^{-1}(U),\mathcal{G})。
\end{array}
$$

ここで、$\mathcal{M}_h|f^{-1}(U) = \mathcal{G}|f^{-1}(U)$ に注意すると、κ は $\mathcal{M}_h$ の $U\cup f^{-1}(U)$ から $f^{-1}(U)$ への制限写像に等しいことがわかる。従って、

<u>定義.</u> $H^p(X \xleftarrow{f} Y, \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G}) = H^p_X(M_f, \mathcal{M}_h)$

によって、$H^p(X\leftarrow Y, \mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G})$ を定義すれば、相対コホモロジーに関する長完全系列 (10) から (18) が証明される。

$\mathcal{L}^*\mathcal{M}_h$ における制限写像 κ の核が $\mathcal{L}^*\mathcal{M}_h$ の元のうち、第3成分が 0 となるもの全体と一致することに注意すると上で得られた結論は次のようにいいかえることもできる。

<u>定理.</u> $H^p(X\leftarrow Y, \mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G}) = H^p((\mathcal{C}^*\mathcal{F}\oplus f_*\mathcal{C}^{*-1}\mathcal{G})(X))$

ただし、 $d(\varphi_1, \varphi_2) = (d\varphi_1, -h\varphi_1 - d\varphi_2)$,

$$\varphi_1 \in C^p\mathcal{F}(X),\ \varphi_2 \in C^{p-1}\mathcal{G}(Y).$$

と定義すれば (18) が完全系列となる。

後の定義から (18) を直接証明することも容易である。実際これだけを目標とするならば、後の定義を用いた方が早道である。しかし、前の定義によれば、$H^p(X\leftarrow Y, \mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G})$ が $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ の軟弱分解によらないことが自然に示される。また、次節で述べる導来層の理論がそのまゝ写像錐のコホモロ

ジー群に拡張されるという利点がある。

写像錐のコホモロジー群についても三つ組の長完全系列がなりたつ。

<u>定理.</u> $X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$ を三つの位相空間と連続写像、$\mathfrak{F} \xrightarrow{h} \mathfrak{G} \xrightarrow{k} \mathfrak{H}$ をそれらの上の層と、f-及びg-準同型とする。このとき、次の長完全系列がなりたつ。

$$
\begin{aligned}
(20)\quad & 0 \to H^0(X \leftarrow Y, \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}) \to H^0(X \leftarrow Z, \mathfrak{F} \to \mathfrak{H}) \to H^0(Y \leftarrow Z, \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}) \\
& \to H^1(X \leftarrow Y, \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}) \to \cdots
\end{aligned}
$$

<u>証明.</u> ∵ 自然な同型 $M(X \leftarrow M(Y \leftarrow Z)) = M(M(X \leftarrow Y) \leftarrow Z)$ および $\mathfrak{M}(\mathfrak{F} \to \mathfrak{M}(\mathfrak{G} \to \mathfrak{H})) = \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}) \to \mathfrak{H})$ があることに注意し、空間の三つ組 $M = M(X \leftarrow M(Y \leftarrow Z)) \supset M(Y \leftarrow Z) \supset Z$ に関する $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{F} \to \mathfrak{M}(\mathfrak{G} \to \mathfrak{H}))$ 係数のコホモロジー群の長完全系列

$$\cdots \to H^p(M, M(Y \leftarrow Z), \mathfrak{M}) \to H^p(M, Z, \mathfrak{M}) \to H^p(M(Y \leftarrow Z), Z, \mathfrak{M}) \to \cdots$$

を解釈すればよい。実際、第1項はこれを長完全系列

$$
\begin{array}{l}
\cdots \to H^p(M, M(Y \leftarrow Z), \mathfrak{M}) \to H^p(M, \mathfrak{M}) \to H^p(M(Y \leftarrow Z), \mathfrak{M}) \to \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \wr\wr \qquad\qquad\qquad\qquad \wr\wr \\
\cdots \to H^p(X \leftarrow Y, \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}) \to H^p(X, \mathfrak{F}) \to H^p(Y, \mathfrak{G}) \to \cdots
\end{array}
$$

に埋込むことができ、5補題により $H^p(X \leftarrow Y, \mathfrak{F} \to \mathfrak{G})$ と同型であることがわかる。同様にして $H^p(M, Z, \mathfrak{M}) \approx H^p(X \leftarrow Z, \mathfrak{F} \to \mathfrak{H})$ が示される。第3項は定義により $H^p(Y \leftarrow Z, \mathfrak{G} \to \mathfrak{H})$ に等しい。

$\mathcal{G}=f^{-1}\mathcal{F}$ かつ $h=f^{*}:\mathcal{F}\longrightarrow f^{-1}\mathcal{F}$ のとき、$H^p(X\xleftarrow{f}Y, \mathcal{F}\xrightarrow{h}\mathcal{G})$ を $H^p(X\xleftarrow{f}Y,\mathcal{F})$ とかく。このコホモロジー群は佐藤によって層 $\mathcal{C}$ の研究に際して導入されたものである。

さらに特別な場合として、f が1対1の同相写像である場合には、もう一つの相対コホモロジー群 $H^p(X\supset Y,\mathcal{F})$ が得られる。X, Y が (11) の条件をみたすとき、これは §2 で与えた相対コホモロジー群 $H^p(X,Y,\mathcal{F})$ に等しい。むしろ長完全系列 (10), (9) がいつでもなりたつという意味では、$H^p(X\supset Y,\mathcal{F})$ の方が相対コホモロジー群とよばれるのにふさわしい。(なお、Bredon [1] を参照せよ。)

また、層の短完全系列に伴う長完全系列も (18) の特別なものとみなすことができる。

4. 相対コホモロジーに伴う導来層.

X を位相空間、$\mathcal{F}$ をその上の層とする。部分集合 S を定めたとき、各 p に対して前層 $\{U\longmapsto H^p_{S\cap U}(U,\mathcal{F}) : U$ は X の開集合$\}$ が定まる。これに伴う層を $\mathcal{H}^p_S(\mathcal{F})$ とかいて、S の中に台をもつ $\mathcal{F}$ の p 次導来層という。これを導来層というのは、$\mathcal{H}^p_S$ が層を層にうつす函手 $\mathcal{H}^0_S$ の p 次導来函手に等しいことが証明されるからである。(佐藤はこれを

$\mathrm{Dist}^p(S, \mathcal{F})$ とかいて $\mathcal{F}$ の p 分布の層と呼んでいる。）

S が開集合のときは Cartan [2] が既に扱っている。

定理（Cartan）. S が閉集合ならば

$$(21)\qquad \mathcal{H}_S^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_S,$$

$$(22)\qquad \mathcal{H}_S^p(\mathcal{F}) = 0 \quad , \quad p > 0,$$

かつ、

$$(23)\qquad 0 \to \mathcal{H}_S^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_{X \setminus S} \longrightarrow 0$$

が完全である。

ただし、$\mathcal{F}_S$ は S 上では $\mathcal{F}$ と等しい茎をもち、その外のところでは 0 を茎とする層をあらわす。

われわれに興味があるのは S が閉集合の場合である。

定理（佐藤、Grothendieck）. S が閉集合ならば、任意の台族 Φ に対し、次のようなスペクトル系列が存在する。

$$(24)\qquad E_2^{pq} = H_\Phi^p(X, \mathcal{H}_S^q(\mathcal{F})) \Rightarrow G(H_{\Phi|S}^{p+q}(X, \mathcal{F})).$$

系. S が次の条件

$$(25)\qquad \mathcal{H}_S^q(\mathcal{F}) = 0 \quad , \quad 0 \leq q \leq m-1$$

をみたす閉集合ならば、任意の開集合 $U \subset X$ に対して

$$(26)\qquad \Gamma(U, \mathcal{H}_S^m(\mathcal{F})) = H_{S \cap U}^m(U, \mathcal{F}).$$

すなわち、前層 $H_{S\cap U}^m(U, \mathcal{F})$ は層である。

系. S が $\mathcal{F}$ に関して純粋 m 余次元、すなわち

$$(27)\qquad \mathcal{H}_S^q(\mathcal{F}) = 0 \quad , \quad q \neq m$$

が成立する場合はさらに

(28) $$H^n(U, \mathcal{H}_S^m(\mathcal{F})) = H_{S\cap U}^{m+n}(U, \mathcal{F}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

佐藤の超函数論の基本定理の一つは次の定理である。

<u>定理</u> 実空間 $\mathbb{R}^n$ は複素空間 $\mathbb{C}^n$ の中で正則函数の層 $\mathcal{O}$ に関して純 n 余次元である。

この定理を用いて、$\mathbb{R}^n$ の上の hyperfunction の層 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^n(\mathcal{O})|\mathbb{R}^n$ と定義する。

なお、上の定理で述べたスペクトル系列は $\mathcal{H}_S^q(\mathcal{F})$ を X のある部分空間に制限した場合にもなりたつ。

また、写像錐のコホモロジー群に伴う導来層 $\mathcal{H}^p(X \leftarrow Y, \mathcal{F} \to \mathcal{G})$ も同様に定義される。これは導来層 $\mathcal{H}_X^p(M_h)|X$ に等しいから、上と同様のスペクトル系列がなりたつ。

次の定理はこれから容易に導かれる。

<u>定理</u> $f: Y \longrightarrow X$ を連続写像、$h: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ を f-準同型、さらに m を正の整数とする。このとき、任意の $x \in X$ に対して、

i) $h: \mathcal{F}_x \longrightarrow \varinjlim_{U \ni x} H^0(f^{-1}(U), \mathcal{G})$ が同型

ii) $\varinjlim_{U \ni x} H^p(f^{-1}(U), \mathcal{G}) = 0, \quad 0 < p < m$

がなりたつことと、任意の開集合 $U \subset X$ に対して、

i)' $h: H^p(U, \mathcal{F}) \approx H^p(f^{-1}(U), \mathcal{G}), \quad 0 \leq p < m$

ii)' $h: H^m(U, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^m(f^{-1}(U), \mathcal{G})$

がなりたつことは同等である。

証明. 完全系列 (18) によれば、 i)′, ii)′ と

iii)′ $\quad H^p(U \leftarrow f^{-1}(U), \mathcal{F} \to \mathcal{G}) = 0, \quad 0 \leq p \leq m$

は同等である。また、佐藤-grothendieck の定理の系によれば、 $H^p(U \leftarrow f^{-1}(U), \mathcal{F} \to \mathcal{G}) = 0$, $0 \leq p < m$, の条件の下で $H^m(U \leftarrow f^{-1}(U), \mathcal{F} \to \mathcal{G})$ は層をなす。従って、すべての開集合 U に対し、 iii)′ がなりたつことと、各 $x \in X$ に対し

iii) $\quad \mathcal{H}^p(X \leftarrow Y, \mathcal{F} \to \mathcal{G})_x = 0, \quad 0 \leq p \leq m$

がなりたつことは同等である。 (18) を局所化すれば、完全系列

$$
\begin{aligned}
0 &\to \mathcal{H}^0(X \leftarrow Y, \mathcal{F} \to \mathcal{G})_x \to \mathcal{F}_x \to \varinjlim_{U \ni x} H^0(f^{-1}(U), \mathcal{G}) \\
&\to \mathcal{H}^1(X \leftarrow Y, \mathcal{F} \to \mathcal{G})_x \to 0 \to \varinjlim_{U \ni x} H^1(f^{-1}(U), \mathcal{G}) \\
&\to \mathcal{H}^2(X \leftarrow Y, \mathcal{F} \to \mathcal{G})_x \to 0 \to \cdots
\end{aligned}
$$

を得る。故に、 i), ii) と iii) は同等である。

i), 即ち $p = 0$ に対する i)′ は $\mathcal{F}$ が f による $\mathcal{G}$ の順像 $f_* \mathcal{G}$ に等しいことを意味する。また、 f が閉写像かつ各 $x \in X$ に対して $f^{-1}(x)$ が Y の中で条件 (11) をみたすとすると、容易にたしかめられるように

(29) $\qquad \varinjlim_{U \ni x} H^p(f^{-1}(U), \mathcal{G}) = H^p(f^{-1}(x), \mathcal{G})$

がなりたつ。さらに、$f^{-1}(x)$ が常に連結ならば、$f_* f^{-1}\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}$ は同型である。以上により次の定理が得られる。

<u>定理</u>(Vietoris-Begle). $f: Y \to X$ を連続閉写像、$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ を X および Y 上の層、かつ各 $x \in X$ に対し、$f^{-1}(x)$ は Y の中で条件(11)をみたすとする。m を正の整数とし、

(i) 各 $x \in X$ に対し、$H^p(f^{-1}(x), \mathcal{G}) = 0$, $0 < p < m$ がなりたつならば、

(31) $$H^p(X, f_*\mathcal{G}) \approx H^p(Y, \mathcal{G}), \quad 0 \leq p < m$$

(32) $$H^m(X, f_*\mathcal{G}) \hookrightarrow H^m(Y, \mathcal{G}).$$

(ii) 各 $x \in X$ に対し、$f^{-1}(x)$ が連結であって

(33) $$H^p(f^{-1}(x), \mathcal{F}_x) = 0, \quad 0 < p < m$$

がなりたつならば、

(34) $$H^p(X, \mathcal{F}) \approx H^p(Y, f^{-1}\mathcal{F}), \quad 0 \leq p < m$$

(35) $$H^m(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^m(Y, f^{-1}\mathcal{F}).$$

5. 被覆の相対コホモロジー群.

(相対)コホモロジー群を具体的に表示し、計算するためには、§2の定義のままでは扱いにくいことが多い。具体的表示として最もよく用いられるのは被覆の(相対)コホモロジー群である。

Y を X の開集合、$\mathcal{V}=\{V_i\,;\,i\in I\}$, $\mathcal{V}'=\{V_i\,;\,i\in I'\}$ を (X,Y) の開被覆、すなわち、V_i は開集合、$I'\subset I$ であって、$X=\bigcup_{i\in I}V_i$, $Y=\bigcup_{i\in I'}V_i$ がなりたつとする。

$\mathcal{F}$ が X 上の層のとき、

$$(36)\qquad C^p(\mathcal{V},\mathcal{V}',\mathcal{F})=\bigoplus_{i_0\cdots i_p}{}' \mathcal{F}(V_{i_0\cdots i_p})$$

とおく。ここで $V_{i_0\cdots i_p}=V_{i_0}\cap\cdots\cap V_{i_p}$ を表わし、右辺は $\bigoplus\mathcal{F}(V_{i_0\cdots i_p})$ の元 $(\varphi_{i_0\cdots i_p})$ のうち、添字 $i_0,\cdots,i_p$ に関して反対称かつ $\{i_0,\cdots,i_p\}\subset I'$ に対し、$\varphi_{i_0\cdots i_p}=0$ がなりたつもののなす部分群を表わす。

余境界作用素 $\delta: C^p(\mathcal{V},\mathcal{V}',\mathcal{F})\to C^{p+1}(\mathcal{V},\mathcal{V}',\mathcal{F})$ を通常のように

$$(37)\qquad (\delta\varphi)_{i_0\cdots i_{p+1}}=\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\varphi_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{p+1}}$$

によって定義すれば、$C^*(\mathcal{V},\mathcal{V}',\mathcal{F})$ は複体をなす。この複体の p 次コホモロジー群を $H^p(\mathcal{V},\mathcal{V}',\mathcal{F})$ とかく。常に

$$(38)\qquad H^0(\mathcal{V},\mathcal{V}',\mathcal{F})\approx H^0(X,Y,\mathcal{F})$$

$$(39)\qquad H^1(\mathcal{V},\mathcal{V}',\mathcal{F})\hookrightarrow H^1(X,Y,\mathcal{F})$$

とみなされる。

<u>定理</u>(Leray). すべての $V_{i_0\cdots i_p}$ および $q\geq 1$ に対して

$$(40)\qquad H^q(V_{i_0\cdots i_p},\mathcal{F})=0$$

がなりたつならば、

$$(41) \qquad H^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{F}) \approx H^p(X, Y, \mathcal{F}), \quad p \geqq 0.$$

(41) の同型は Weil にならって次のようにとる。

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d} \cdots$$

を $\mathcal{F}$ の軟弱分解、$H^p(X, Y, \mathcal{F})$ をこれに伴うコホモロジー群とする。$\varphi = (\varphi_{i_0 \cdots i_p}) \in C^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{F})$, $\delta\varphi = 0$ とすると、$\varphi \in C^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{L}^0)$ とみなして $\delta\varphi^{(1)} = \varphi$ となる $\varphi^{(1)} \in C^{p-1}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{L}^0)$ を見出すことができる。次に $\delta d \varphi^{(1)} = d\delta\varphi^{(1)} = 0$ より、$d\varphi^{(1)} = \delta\varphi^{(2)}$ となる $\varphi^{(2)} \in C^{p-2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{L}^1)$ が存在する。$d\varphi^{(j-1)} = \delta\varphi^{(j)}$ となる $\varphi^{(j)} \in C^{p-j}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{L}^{j-1})$ をとると、$\psi = d\varphi^{(p)} \in C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{L}^p)$ は $\delta d \varphi^{(p)} = 0$ により、実は $H^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{L}^p) = \Gamma(X, Y, \mathcal{L}^p)$ に属している。このとき、φ のコホモロジー類 $\in H^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{F})$ と ψ のコホモロジー類 $\in H^p(X, Y, \mathcal{F})$ を対応させることにより、(41) の同型が得られる。

次に、$X \supset Y \supset Z$ を ($Z = \phi$ を許して) X の開集合、$(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}'')$ を (X, Y, Z) の開被覆とする。このとき、自然な包含関係と制限により

$$(42) \quad 0 \to C^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{F}) \to C^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'', \mathcal{F}) \to C^p(\mathfrak{V}', \mathfrak{V}'', \mathcal{F}) \to 0$$

は δ と可換な完全系列をなす。従ってこれから生ずる連結準同型 $\delta: H^p(\mathfrak{V}', \mathfrak{V}'', \mathcal{F}) \to H^{p+1}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathcal{F})$ がある。

<u>定理.</u> (X, Y, Z) の開被覆 $(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{U}'')$ が層 $\mathcal{F}$ に関し、Leray の定理の仮定をみたすとき、

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & H^{p-1}(\mathcal{U}', \mathcal{U}'', \mathcal{F}) & \xrightarrow{(-1)^p\delta} & H^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{F}) & \to & H^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}'', \mathcal{F}) & \to \cdots \\
(43) & l \wr & & l \wr & & l \wr & \\
\cdots \to & H^{p-1}(Y, Z, \mathcal{F}) & \xrightarrow{d} & H^p(X, Y, \mathcal{F}) & \to & H^p(X, Z, \mathcal{F}) & \to \cdots
\end{array}
$$

は可換な図形をなす。ただし、l は Leray の定理で得られる同型とする。

6. 多面体のホモロジー群.

私は以前佐藤の超函数に関する微分方程式の応用として、次の形の Alexander-Pontrjagin の双対定理を証明した。

<u>定理.</u> K が $\mathbb{R}^n$ に含まれるコンパクト集合ならば、

$$H^p(K, \mathbb{C}) \quad と \quad H^{n-p}_K(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \ p=0, 1, \cdots, n,$$

は互に他の強双対空間となるような線型位相空間となる。

ここでは、これまでに述べた相対コホモロジー論の応用として、多面体 K に関する次の形の Alexander-Pontrjagin 同型定理を直接に証明したい。

<u>定理.</u> K を $\mathbb{R}^n$ に含まれる（無限）多面体、G を任意のアーベル群とする。このとき

$$(44) \qquad H_p(K, G) \approx H^{n-p}_K(\mathbb{R}^n, G), \ p=0, 1, \cdots, n。$$

ただし、左辺は複体 $K \otimes G$ の（無限）ホモロジー群を、右辺は定数層 G を係数とする相対コホモロジー群を意味する。

右辺は明らかに位相不変量であるから、これから特に、K のホモロジー群が三角形分割によらないこと等がわかる。

まず周知の事実

$$(45) \qquad H^p(\mathbb{R}^n, G) = \begin{cases} G, & p=0 \\ 0, & p>0 \end{cases}$$

の証明からはじめる。$\mathbb{R}^n$ は 1 点とホモトピー同値であり、1 点のコホモロジー群は定義によって右辺に等しいから、一般にコホモロジー群のホモトピー不変性が証明できれば (45) は直ちに従う。

準備として次の事実が必要である。

__補題.__ $I = [0, 1]$ とするとき

$$(46) \qquad H^p(I, G) = \begin{cases} G, & p=0 \\ 0, & p>0. \end{cases}$$

__証明.__ I は連結故、$H^0(I, G) = G$ は明らか。

$p>0$ とし、$\alpha \in H^p(I, G)$ かつ $\alpha \neq 0$ とする。このとき、I の閉区間 F で、α を F に制限したものが 0 とならないもの全体 $\mathfrak{F} = \{F\}$ は、含まれる関係で帰納順序集合をなす。実際、$\{F_j\} \subset \mathfrak{F}$ を全順序部分集合としたとき、$F = \cap F_j$ とおくと、これは I の閉区間であって、また容易に示

されるように、$H^p(F, G) = \varinjlim H^p(F_j, G)$ ゆえ、αをFに制限したものは0と異なる。そこで、上の性質を持つ極小の閉区間を一つとり $F = [a, b]$ とする。$a = b$ ならば $H^p(F, G) = 0$ であるから、αをFに制限したものは当然0である。$a < b$ のときは、$a < c < b$ をとり、$F_1 = [a, c]$, $F_2 = [c, b]$ とする. Mayer-Vietoris の定理により、

$$\cdots \longrightarrow H^{p-1}(\{c\}, G) \longrightarrow H^p(F, G) \to H^p(F_1, G) \oplus H^p(F_2, G) \to H^p(\{c\}, G)$$

が完全系列をなす。$p > 1$ ならば、$H^{p-1}(\{c\}, G) = 0$。$p = 1$ でも、

$$0 \longrightarrow H^0(F, G) \longrightarrow H^0(F_1, G) \oplus H^0(F_2, G) \to H^0(\{c\}, G) \to 0$$

が完全であるから、上の系列で、第1項を0でおきかえたものが完全になる。これは、$\alpha|_F \neq 0$、$\alpha|_{F_1} = 0$, $\alpha|_{F_2} = 0$ に矛盾する。

<u>定理.</u> X, Y を位相空間、f_0, f_1 を連続写像の意味で互にホモトピックな連続写像：

$$f_0 \simeq f_1 : X \longrightarrow Y$$

とする。このとき、任意のアーベル群 G と p に対し

$$f_0^* = f_1^* : H^p(Y, G) \to H^p(X, G)。$$

<u>証明.</u> fをホモトピー、$i_t : X \longrightarrow X \times I$ を $i_t(x) = (x, t)$ で定義される写像：

$$X \underset{\pi}{\overset{i_t}{\rightleftarrows}} X \times I \xrightarrow{f} Y$$

とすると、$f_0 = f \circ i_0$、$f_1 = f \circ i_1$ であるから、$f_0^* = i_0^* \circ f^*$、$f_1^* = i_1^* \circ f^*$。従って、

$$i_t^* : H^p(X \times I, G) \longrightarrow H^p(X, G)$$

が、t に無関係な同型写像であることを示せば十分である。

$\pi : X \times I \longrightarrow X$ を射影とすると、$\pi \circ i_t = id$ より、$i_t^* \circ \pi^* = id : H^p(X, G) \longrightarrow H^p(X, G)$ を得る。次に、各 $x \in X$ に対し、$\pi^{-1}(x) = \{x\} \times I$ は必ずしも (11) の条件はみたさないが、(29) はみたすことに注意する。明らかに、π は閉写像であり、$G = \pi^{-1} G$ ゆえ、補題によって、Vietoris-Begle の定理 (ii) を適用することができて、

$$\pi^* : H^p(X, G) \longrightarrow H^p(X \times I, G)$$

が同型写像となる。以上によって、i_t^* は t に無関係で、π^{*-1} に等しいことがわかる。

<u>系.</u> X が 1 点に可縮な位相空間、特に $X = \mathbb{R}^n$ または円板 $\mathbb{D}^n$ ならば、

$$(47) \qquad H^p(X, G) = \begin{cases} G, & p = 0 \\ 0, & p > 0. \end{cases}$$

以上の証明は Bredon [1] によった。Godement の教科書 [3] では球面のコホモロジー群さえ計算できなかったのに較べて進歩といわなければならない。実際、

定理. S^nを次元$n>1$の球面とすると、

(48) $$H^p(S^n, G)=\begin{cases} G, & p=0 \text{ または } n \\ 0 & \text{その他の場合。}\end{cases}$$

証明. S^nを南北両半球の和にわければ、Mayer-Vietorisの定理により、

$$\to H^p(S^n, G)\to H^p(D^n, G)\oplus H^p(D^n, G)\to H^p(S^{n-1}, G)\to\cdots$$

が完全である。$p>0$のときは、中間項が0となるから、

(49) $$H^p(S^{n-1}, G)\cong H^{p+1}(S^n, G), \quad p>0。$$

$n=1$の場合は、S^0が孤立した2点からなることにより、容易に(48)が導かれる。$n>1$の場合は(49)を用いて帰納的に証明される。

Alexander-Pontrjaginの同型定理のわれわれの証明は、次の定理に基ずいている。

定理. $m\leqq n$かつ、$\mathbb{R}^m$が$\mathbb{R}^n$の中に線型多様体として含まれているとする。このとき、

(50) $$H^p_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^n, G)=\begin{cases} G, & p=n-m \\ 0 & p\neq n-m。\end{cases}$$

証明. $\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^m$が$S^{n-m-1}$とホモトピー同値であること及び(10)を用いれば、これは上の定理からも容易に導くことができる。しかし、ここでは$H^{n-m}_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^n, G)$のコホモロジー類の具体的な表示を求める目的もかねて、被覆のコホ

モロジー群の方法で証明しよう。

まず、$m=n$ の場合は (45) に他ならない。

次に、$m<n$、$\mathbb{R}^m = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\}$ としよう。開集合 $V_0, V_{m+1}, \cdots, V_n$ を次のように定義する。

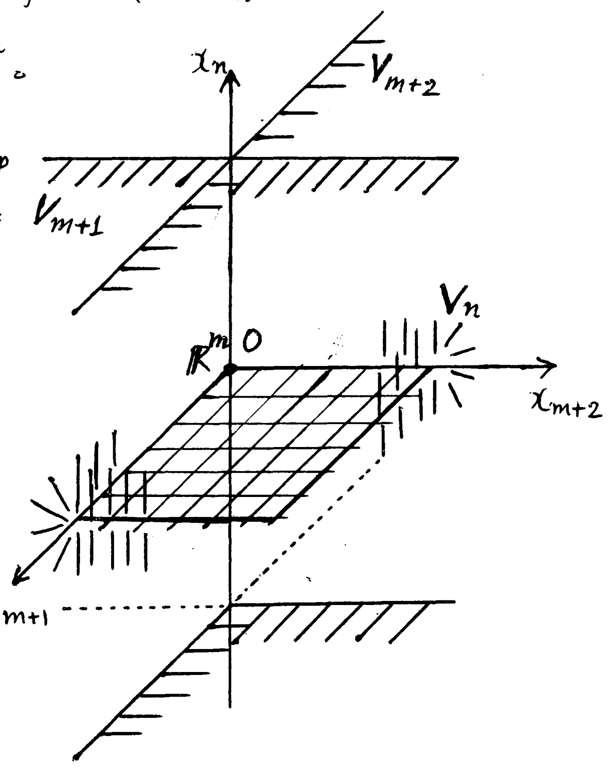
$$V_0 = \mathbb{R}^n ;$$

(51) $$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i > 0\}, \quad i = m+1, \cdots, n-1 ;$$

$$V_n = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i \geq 0, i = m+1, \cdots, n-1 \text{ かつ } x_n = 0\}。$$

V_n が m に依存することを明白にするときは V_n^m とかく。

明らかに $\bigcup_{i=m+1}^{n} V_i = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$。



$V = V_{i_0 \cdots i_p} = V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p}$ とする。$V = V_{0\, m+1 \cdots n}$ のときは、V は二つの連結成分を持ち、その他の場合は連結であり、いずれの場合も各連結成分は $\mathbb{R}^n$ と同相である。特に、

$$H^p(V, G) = 0, \quad p > 0$$

がなりたつ。故に、$\mathfrak{V} = \{V_0, V_{m+1}, \cdots, V_n\}$、$\mathfrak{V}' = \{V_{m+1}, \cdots, V_n\}$ とすれば、$(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}')$ は $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m)$

の開被覆であって、Lerayの定理の仮定をみたす。

$\mathfrak{V}$ は $(n-m+1)$ 個の開集合でできているから、明らかに、

$$(52) \qquad H^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', G) = 0, \quad p > n-m。$$

同じ理由で、$(n-m)$ 余鎖体はすべて余輪体であり、$V_{0,m+1,\cdots,n}$ が二つの連結成分をもつことから、余輪体群 Z^{n-m} は $G \oplus G$ と同型である。この同型の下で、余境界群 B^{n-m} は対角線 $\Delta = \{g \oplus g \ ; g \in G\}$ に対応する。実際、$\varphi \in Z^{n-m}$ が $V_{0m+1\cdots n}$ の二つの成分上同じ値 g をとるとすると、$\psi_{0m+2\cdots n} = -g$、他の成分は 0 として $\psi \in C^{n-m-1}$ を定めると明らかに $\delta\psi = \varphi$ がなりたつ。逆に、$\varphi = \delta\psi$ とすると、ψ の各成分は x_n の正負にかかわらず一定の値をもつから、φ も同様になる。以上により、

$$(53) \qquad H^{n-m}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', G) \approx G \oplus G/\Delta \approx G。$$

最後に、$p < n-m$ とし、φ を p 余輪体とする。$V_{0i_1\cdots i_p}$ がすべて連結であることに注意して、$(p-1)$ 余鎖体 ψ^1 を、$\psi^1_{0i_1\cdots i_{p-1}} = (-1)^p \varphi_{0i_1\cdots i_{p-1}n}$ によって定義する。このとき、$\varphi - \delta\psi^1$ は $V_{0i_1\cdots i_{p-1}n}$ 上では 0、故に、これを $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ の開被覆 $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1')$ に関する p 余輪体とみなすことができる。但し、$\mathfrak{V}_1 = \{V_0, V_{m+1}, \cdots, V_{n-1}\}$, $\mathfrak{V}_1' = \{V_{m+1}, \cdots, V_{n-1}\}$、$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i \leqq 0, i = m+1, \cdots, n-1\}$ とする。$\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ は $\mathbb{R}^n$ と同相である

から、$H^p(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1', G) = H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Gamma, G) = 0$。従って $\varphi - \delta\psi^1 = \delta\psi^2$ となる $(p-1)$ 余鎖体 ψ^2 が存在する。これで定理は証明された。

$\varphi \in Z^{n-m}$ の $V_{0,m+1,\cdots,n}$ の二つの成分 $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_i > 0,\ i = m+1, \cdots, n\}$ および $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_i > 0,\ i = m+1, \cdots, n-1$ かつ $x_n < 0\}$ における値をそれぞれ g_+, g_- としたとき、(53) の同型としては今後、φ のコホモロジー類に対して、$g_+ - g_- \in G$ を対応させる同型写像をとることにする。

さて、$\mathfrak{V}_m = \{V_0, V_{m+1}, \cdots, V_n^m\}$, $\mathfrak{V}_m' = \{V_{m+1}, \cdots, V_n^m\}$ の他に、$\mathfrak{V}_m'' = \{V_{m+2}, \cdots, V_n^m\}$ とおくと、$(\mathfrak{V}_m, \mathfrak{V}_m', \mathfrak{V}_m'')$ は $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{R}_+^{m+1}})$ の開被覆となる。但し、$\overline{\mathbb{R}_+^{m+1}} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_{m+1} \geqq 0,\ x_{m+2} = \cdots = x_n = 0\}$ とする。更に、$\mathbb{R}_+^{m+1} = \overline{\mathbb{R}_+^{m+1}} \setminus \mathbb{R}^m = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_{m+1} > 0,\ x_{m+2} = \cdots = x_n = 0\}$ とおけば、切除定理により、

(54) $H^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{R}_+^{m+1}}, G) = H^p(V_{m+1}, V_{m+1} \setminus \mathbb{R}_+^{m+1}, G)$

であるが、$(V_{m+1}, V_{m+1} \setminus \mathbb{R}_+^{m+1})$ は $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{m+1})$ と同相であるから、右辺は更に $H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m, G)$ と同型である。

このとき、$\mathfrak{V}_m' \cap V_{m+1} = \{V_{m+1}, V_{m+2} \cap V_{m+1}, \cdots, V_n^m \cap V_{m+1}\}$ 等とすれば、被覆のコホモロジー群に関する切除写像

(55) $H^p(\mathfrak{V}_m', \mathfrak{V}_m'', G) \longrightarrow H^p(\mathfrak{V}_m' \cap V_{m+1}, \mathfrak{V}_m'' \cap V_{m+1}, G)$

および制限写像

(56) $H^p(\mathcal{V}_{m+1}, \mathcal{V}'_{m+1}, G) \to H^p(\mathcal{V}_{m+1} \cap V_{m+1}, \mathcal{V}'_{m+1}, V_{m+1}, G)$

が自然に定義される。また定義から明らかなように、(55)と(56)の右辺は相等しい。

<u>定理.</u> (55)および(56)は同型写像である。更に、これらの同型写像および(53)の同型写像によって、$H^{n-m-1}(\mathcal{V}'_m, \mathcal{V}''_m, G) = G$、$H^{n-m}(\mathcal{V}_m, \mathcal{V}'_m, G) = G$とみなしたとき、$(\mathcal{V}_m, \mathcal{V}'_m, \mathcal{V}''_m)$に関する長完全系列の自明でない部分として残る同型

$$0 \to H^{n-m-1}(\mathcal{V}'_m, \mathcal{V}''_m, G) \xrightarrow{\delta} H^{n-m}(\mathcal{V}_m, \mathcal{V}'_m, G) \to 0$$

は $id: G \to G$ を与える。

従って、Leray の定理により、$H^{n-m-1}_{\mathbb{R}^{m+1}_+}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m, G) = H^{n-m-1}(\mathcal{V}'_m, \mathcal{V}''_m, G) = G$, $H^{n-m}_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^n, G) = H^{n-m}(\mathcal{V}_m, \mathcal{V}'_m, G) = G$ とみなしたとき、同型

(57) $0 \to H^{n-m-1}_{\mathbb{R}^{m+1}_+}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m, G) \xrightarrow{d} H^{n-m}_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^n, G) \to 0$

は $(-1)^{n-m} id: G \to G$ に等しい。

証明は定義に従って計算することにより容易に得られる。

これで準備ができたので、Alexander-Pontrjagin の定理の証明に入ろう。一般に次の定理が成立する。

<u>定理.</u> Gをアーベル群、Mをn次元多様体、かつKを次の条件をみたすMの閉集合とする:

i) K^m を閉集合として、

$$K = K^n \supset K^{n-1} \supset \cdots \supset K^0 \supset K^{-1} = \phi。$$

ii) $C^m = K^m \setminus K^{m-1}$ は交わりのない和集合 $C^m = \bigcup_{\alpha \in A_m} D^m_\alpha$ に分解される。

iii) 各 m に対して、互に交わりのない開集合の族 $V^m_\alpha \subset M \setminus K^{m-1}$, $\alpha \in A_m$, が存在し、$V^m_\alpha \supset D^m_\alpha$ かつ (V^m_α, D^m_α) は $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ と同相である。

このとき、$C_m = C^G_m$ によって G の直積（直和ではない）G^{A_m} を表わせば、G-準同型

$$\partial_m = \partial^G_m : C^G_m \longrightarrow C^G_{m-1}$$

が存在し、C^G_* :

$$0 \to C^G_n \xrightarrow{\partial} C^G_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C^G_0 \to 0$$

は複体をなし、そのホモロジー群について

(58) $$H_m(C^G_*) = H^{n-m}_K(M, G)$$

がなりたつ。

<u>証明.</u> $H^p_{K^j}(M, G)$, $H^p_{C^j}(M \setminus K^{j-1}, G)$ 等を簡単のため $H^p[K^j]$, $H^p[C^j]$ 等で表わし、三つ組 $(M, M \setminus K^m, M \setminus K^{m-1})$ に伴う長完全系列を書けば次のようになる。

$$0 \to H^0[K^{m-1}] \to H^0[K^m] \to H^0[C^m]$$
$$\to H^1[K^{m-1}] \to \cdots$$

$$\cdots \to H^{n-m-1}[C^m]$$

$$
\begin{aligned}
(59)\quad &\to H^{n-m}[K^{m-1}] \to H^{n-m}[K^m] \to H^{n-m}[C^m] \\
&\to H^{n-m+1}[K^{m-1}] \to H^{n-m+1}[K^m] \to H^{n-m+1}[C^m] \\
&\to \cdots \\
&\to H^{n}[K^{m-1}] \to H^{n}[K^m] \to H^{n}[C^m] \text{。}
\end{aligned}
$$

切除定理によって、

$$
\begin{aligned}
H^p[C^m] &= H^p_{C^m}(M\setminus K^{m-1}, G) = H^p_{C^m}(\cup V^m_\alpha, G) \\
&= \prod_{\alpha\in A_m} H^p_{D^m_\alpha}(V^m_\alpha, G)
\end{aligned}
$$

を得る。従って、(50)により、(59)の最後の列は $H^{n-m}[C^m]$ を除いて全部0に等しく、

(60) $$H^{n-m}[C^m] = G^{A_m} = C^G_m \text{。}$$

また、$H^p[K^{-1}] = 0$, $p \geq 0$, ゆえ、mに関する帰納法によって

(61) $$H^p[K^m] = 0, \quad p = 0, 1, \dots, n-m-1$$

を得る。同様に $n-m$ に関する帰納法によって、

(62) $$H^p[K^m] = H^p[K], \quad p = n-m+1, \dots, n$$

がわかる。結局、(59)のうち自明でないものは

(63) $$0 \to H^{n-m}[K^m] \xrightarrow{h^{n-m}} C^G_m \xrightarrow{d^{n-m}} H^{n-m+1}[K^{m-1}] \to H^{n-m+1}[K] \to 0$$

だけになる。$\partial^G_m : C^G_m \to C^G_{m-1}$ を

(64) $$\partial^G_m = h^{n-m+1} \circ d^{n-m}$$

で定義すれば、$\partial^2 = h(dh)d = 0$ ゆえ、(C^G_*, ∂) は複体をなし、そのホモロジー群は、(63) から明らかなように、(58) によって与えられる。(森本の楔刃定理の証明を参照)

K が R^n に含まれる多面体の場合は、K を三角形分割し、m 次元の各単体を(あるいは K を凸胞体に分割し、m 次元の各胞体を) D^m_α、D^m_α の適当な凸近傍を V^m_α とすれば、定理の仮定がみたされることは明らかである。この場合、K^m は K の m 次元の骨組になっている。

従って、Alexander-Pontrjagin の定理を証明するには、上で構成した鎖体複体 (C^G_*, ∂) が、K の三角形分割による単体複体から得られる鎖体複体 $(K \otimes G, \partial_K \otimes 1_G)$ と(符号を除いて)一致することを示せばよい。

そのために、完全系列 (63) をもう少し詳しく調べる。

<u>定理.</u> 上の定理の仮定の下で

(65) $$\mathcal{H}^q_{K^m}(G) = 0, \quad q = 0, 1, \cdots, n-m-1.$$

更に、M の任意の開集合を U としたとき、層 $\mathcal{H}^{n-m}_{K^m}(G) = \mathcal{H}^{n-m}_{K^m}$ および G が、空間の三つ組 $(U, U \setminus K^{m-1}, U \setminus K^m)$ に関して作る長完全系列の間には次の関係がある:

(66)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(U, \mathcal{H}^{n-m}_{K^m}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & H^0(U \setminus K^{m-1}, \mathcal{H}^{n-m}_{K^m}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & H^1_{K^{m-1}}(U, \mathcal{H}^{n-m}_{K^m}) \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & H^{n-m}_{K^m}(U, G) \arrow[r, "h"] & H^{n-m}_{C^m \cap U}(U \setminus K^{m-1}, G) \arrow[r] & H^{n-m+1}_{K^{m-1}}(U, G) \arrow[r] \arrow[u, hook, "i"] & 0
\end{tikzcd}$$

<u>証明.</u> mについての帰納法で証明する。$m=0$の場合、K^mは孤立点集合であるから、各点の近傍で(50)を適用することにより、(65)を得る。m以下については証明されたとして、mの場合を証明しよう。この場合は更にqについての帰納法を用いる。$p\leq n-m-1$とし、$q=0,\cdots,p-1$に対して(65)がなりたつと仮定する。このとき、スペクトル系列の理論([5]定理Ⅱ.3.18)によって、

$$
(67)\quad
\begin{array}{ccccccc}
0\to & H^0_{K^{m-1}}(U,\mathcal{H}^p_{K^m}) & \to & H^0(U,\mathcal{H}^p_{K^m}) & \to & H^0(U\setminus K^{m-1},\mathcal{H}^p_{K^m}) & \to \\
 & \| & & \| & & \| & \\
0\to & H^p_{K^{m-1}}(U,G) & \to & H^p_{K^m}(U,G) & \to & H^p_{C^m\cap U}(U\setminus K^{m-1},G) & \to
\end{array}
$$

とみなせる。(下の行の)第1項は帰納法の仮定により0。また、$U\setminus K^{m-1}$の各点の基本近傍系Vとして、$(V,V\setminus C^m)$が、$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$または$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^m)$と同相になるものがとれるから、(50)によって第3項も0に等しい。従って$\mathcal{H}^p_{K^m}=0$を得る。これで(65)は証明された。

(66)の左半分は(67)で$p=n-m$としたものである。このうち最初の項は$H^{n-m}_{K^{m-1}}(U,G)=H^0(U,\mathcal{H}^{n-m}_{K^{m-1}})=0$より0になる。また、スペクトル系列の理論で、${}'E_2^{1,n-m}=H^1_\Phi(U,\mathcal{H}^{n-m}_{K^m})={}'E_\infty^{1,n-m}\subset{}''E_\infty^{0,n-m+1}=H^{n-m+1}_{\Phi|K}(U,G)$となることより、(66)の右半分が得られる。

系. 境界作用素 $\partial_m^G : C_m^G \to C_{m-1}^G$ は、次のようなM上の層の準同型の結合:

$$f_*^{(m)} f^{(m)-1} \mathcal{H}_{K^m}^{n-m}(G) \xrightarrow{d} \mathcal{H}^1_{K^{m-1}}(\mathcal{H}^{n-m}_{K^m}(G))$$
$$\xrightarrow{i} \mathcal{H}^{n-m+1}_{K^{m-1}}(G) \xrightarrow{h} f_*^{(m-1)} f^{(m-1)-1}\mathcal{H}^{n-m+1}_{K^{m-1}}(G)$$

として与えられるM上の層の準同型

(68) $\partial = h\circ i\circ d : f_*^{(m)}\mathcal{H}^{n-m}_{C^m}(G|_{M\setminus K^{m-1}}) \to f_*^{(m-1)}\mathcal{H}^{n-m+1}_{C^{m-1}}(G|_{M\setminus K^{m-2}})$

からひきおこされるM上の断面加群の準同型に等しい。

但し、$f^{(m)}$ は埋蔵写像 $M\setminus K^m \hookrightarrow M$ とする。

ここまでくれば、Alexander-Pontrjaginの定理の証明は容易である。

C_m^G も $(K\otimes G)_m$ も共にGをKのm次元の単体の個数だけ並べたものであるから、両者の境界作用素 ∂^G および $\partial_K\otimes 1_G$ が一致することを示せばよい。そのため、m次元の一つの単体 D_α^m の上でだけ0と異なる値をもつ鎖体cの二つの境界作用素による像を比較する。$c\in C_m^G$ は $\overline{D_\alpha^m}$ を台とする $f_*^{(m)}\mathcal{H}^{n-m}_{C^m}(G|_{M\setminus K^{m-1}})$ の断面であるから、∂c の台も $\overline{D_\alpha^m}$ に含まれる。従って ∂c は $D_\beta^{m-1}\subset\overline{D_\alpha^m}$ となる$(m-1)$次元の単体 D_β^{m-1} の上でのみ0でない値をもつ$(m-1)$鎖体である。しかも、∂c の D_β^{m-1} 上の値は、局所的に計算することができる。ここまでは一般の多様体Mでも通用する議論である。

ここで K が $\mathbb{R}^n$ に含まれる多面体であることを用いて、$V_\alpha^m \supset D_\alpha^m$, $V_\beta^{m-1} \supset D_\beta^{m-1}$ を凸開集合に選んでおく。$V = V_\beta^{m-1}$ を十分に小さくとると、$(V, V \setminus D_\beta^{m-1}, V \setminus (D_\alpha^m \cup D_\beta^{m-1}))$ は $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{m-1}, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{R}_+^m})$ と同相であり、同相写像を適当に選べば、$V \cap V_\alpha^m$ は $\{x \in \mathbb{R}^n ; x_m > 0\}$ に対応する。従って、∂ の局所性を用いればわかるように、∂c の V への制限は、c を $V \cap V_\alpha^m$ に制限したものに、三つ組 $(V, V \setminus D_\beta^{m-1}, V \setminus (D_\alpha^m \cup D_\beta^{m-1})) \approx (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{m-1}, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{R}_+^m})$ に関する同型写像 (57) を施ほどこしたものに等しい。

ところで、同型写像 $H_{D_\alpha^m}^{n-m}(V_\alpha^m, G) \approx G$, $H_{D_\beta^{m-1}}^{n-m+1}(V_\beta^{m-1}, G) \approx G$ は V_α^m, V_β^{m-1} の座標系のとり方に依存している。これを次のように定める。まず、(無限遠にあるものを含めて) K の頂点全体に番号をつける。D_α^m が $\{i_0, i_1, \cdots, i_m\}$, $i_0 < i_1 < \cdots < i_m$, に対応するとき、D_α^m の中の座標軸 $y_1, \cdots, y_m$ をベクトル $i_j - i_0$ のむきが y_j の正のむきになるようにとる。さらに $y_{m+1}, \cdots, y_n$ を、$(y_1, \cdots, y_n)$ の $\mathbb{R}^n$ のもともとの座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に関するヤコビアンが正になるようにとる。$m = n$ でこれが不可能のときは、y_n を $-y_n$ でおきかえ、$H_{D_\alpha^n}^0(V_\alpha^n, G) = G$ と G の同型写像を $(-1)\,id$ によって与える。このとき、(57) の符号を考えに入れると、∂ の $D_\beta^{m-1} = \{i_0, \cdots, \hat{i_j}, \cdots, i_m\}$

成分が $(-1)^{n-j+1}\mathrm{id}$ となることが容易に確められる。従って、

$$(69)\quad \partial\{i_0,\cdots,i_m\}=(-1)^{n+1}\sum_{\{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_m\}\subset C^{m-1}}(-1)^j\{i_0,\cdots,\hat{i}_j,\cdots i_m\}。$$

すなわち、

$$(70)\qquad \partial^G=(-1)^{n+1}\partial_K\otimes 1_G$$

が成立する。特に、空間の次元 n が奇数ならば両者は一致する。いずれにせよ、境界作用素の符号の差別はホモロジー群をかえないから、これで Alexander-Pontryagin の定理は証明された。

なお、(69) からもわかるように、K の三角形分割として、頂点が無限遠にあるものを許したときは、(44) の左辺のホモロジー群 $H_p(K,G)$ は単体複体 K のホモロジー群というより、K' を K の無限遠部分複体とする相対ホモロジー群 $H_p(K,K',G)$ になる。しかし、K をさらに細く三角形分割し、どの頂点も有限なところにあるようにしても、このホモロジー群は変らないのであるから、これを K のホモロジー群と呼ぶことも正当である。

K の通常のホモロジー群はコンパクト台をもつホモロジー群であるのに対し、われわれのホモロジー群は任意の台をもつホモロジー群である。そのため、K がコンパクトでないときは、われわれのホモロジー群はホモトピー不変でないなど、通常のホモロジー群と違ったふるまいをする。しかしながら、Jordan の定理などの応用のた

めには、このホモロジー群の方が都合がよい。実際、Jordanの定理は次の形で成立する。

<u>定理.</u> $K \subset \mathbb{R}^2$ を端点のない折れ線、すなわち、各点 $x \in K$ に対し、$(V, V \setminus K)$ が $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^1)$ と同相となるような開近傍 V をもつ閉集合とする。このとき、$\mathbb{R}^2 \setminus K$ は（Kの連結成分の個数 $+1$）個の連結成分をもつ。

<u>証明.</u> 例えば $G = \mathbb{C}$ とし、対 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \setminus K)$ に対する長完全系列をかけば次のようになる。

$$(71)\quad \begin{aligned} &0 \to H^0_K(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \to H^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \to H^0(\mathbb{R}^2 \setminus K, \mathbb{C}) \\ &\to H^1_K(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \to H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \to \cdots。\end{aligned}$$

明らかに、$H^0_K(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = 0$、(45) により、$H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = 0$。また、Alexander-Pontrjagin の定理（の証明）により、$H^1_K(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = H_1(K, \mathbb{C})$ がなりたつ。Kの連結成分の数を d としたとき、容易に $H_1(K, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^d$ となることが示される。一方定義から明らかなように、$H^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$、かつ、$\mathbb{R}^2 \setminus K$ の連結成分の数を c としたとき、$H^0(\mathbb{R}^2 \setminus K, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^c$ がなりたつ。以上によって

$$(72)\qquad 0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^c \longrightarrow \mathbb{C}^d \longrightarrow 0$$

が完全である。これから $c = 1 + d$ がわかる。

なお、われわれの Alexander-Pontrjagin の定理の証明をふ

りかえると、Kが$\mathbb{R}^n$に含まれる多面体であることは必ずしも本質的ではなく、Mが向きづけられた多様体で、Mのある三角形分割に関してKが部分複体をなす場合にも同じ証明で、Alexander-Pontrjaginの定理がなりたつことがわかる。さらに一般に次の定理を証明することができる。

定理. Mを(必ずしも向きづけられない)n次元多様体、KをMのある三角形分割に関して部分複体となる閉集合、$\mathcal{G}$をM上の局所的に定数の層とする。このとき、

$$H_p(K, \mathcal{G}) \approx H_K^{n-p}(M, \mathcal{G} \otimes \mathcal{T}), \quad p = 0, 1, \cdots, n. \tag{73}$$

但し、

$$\mathcal{T} = \pi_* \mathcal{H}^n_{\Delta_M}(M \times M, \mathbb{Z}) \tag{74}$$

はMの向きの層である。

特にK=Mのとき、これはPoincaréの双対定理となる。

(73)の両辺の定義に準備を要するので詳細は省略することにしたい。

参考文献

[1] G. E. Bredon, Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York, 1967.

[2] H. Cartan, Cohomologie des Groupes, Suite Spec-

tral, Faisceaux, Séminaire Cartan, 1950-51.

[3] R. Godement, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[4] 河合隆裕，本講究録および On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 近刊（多分1970年11月）.

[5] 小松彦三郎，佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式，東大数学教室セミナリー・ノート 22, 1968.

[6] A. Martineau, Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphiques, Proceedings of an international summer institute on the Theory of Distributions, Lisboa, 1964, pp. 195-326.

[7] 森本光生，本講究録および Sur la decomposition du faisceau de singularités d'hyperfonctions B/a, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 近刊（多分1970年9月）.

[8] 佐藤幹夫，本講究録および層Cについて将来発表される論文.