

$H^1(U^n)$ についての2,3の話

東北大 理 教田公三

§1. 序

Unit Polydisc U^n 上の Hardy class の研究は、主として A. Zygmund によって、境界附近の挙動に着いて行われた。その後 W. Rudin は一次元の時の色々な事実が $n=2$ の時もそのまま成立つかを組織的に調べ、その結果をレフチャートとしてまとめている [3]。この小論においては彼のやや残したうちの $H^1(U^n)$ の extreme points と extremum problems について調べてみる。そのためには定義をいくつか列挙する。

- U^n ; open unit polydisc $\{z = (z_1, \dots, z_n); |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1\}$
- T^n ; U^n の distinguished boundary $\{w; |w_1| = \dots = |w_n| = 1\}$
- m_n ; T^n 上の正規化された Haar measure
- $H(U^n)$; U^n 上の正則函数の全体
- $N(U^n)$; $\{f \in H(U^n); \sup_{0 < r < 1} \int_{T^n} \log^+ |f(rw)| dm_n(w) < +\infty\}$
- $N_*(U^n)$; $\{f \in N(U^n); (\log^+ |f(rw)|; 0 < r < 1)\}$ が一様可積分な族を作子

- $H^p(U^n)$; $\{f \in N_*(U^n); \int_{T^n} |f(rw)|^p dm_n(w) < +\infty\}$ ($0 < p \leq \infty$)
- $f^*(w)$; U^n 上の函数 $f(z)$ に対して $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(rw)$ ($w \in T^n$) が存在するとき, f の radial limit を $f^*(w)$, $f^*(w)$ と書く。
- $P[f]$; f の Poisson 積分
- $u[f]$; $f \in N(U^n)$ で $f \neq 0$ のとき, $\log|f|$ の最小の n -harmonic majorant のことを $u[f]$ と書く。
- $f \in H(U^n)$ が outer であるとは, $f \in N_*(U^n)$ で $\log|f(0)| = \int_{T^n} \log|f^*(w)| dm_n(w)$ が成り立つことをいふ。
- $f \in H(U^n)$ が inner であるとは $f \in H^0(U^n)$ で $|f^*|=1$ a.e. on T^n のことをいふ)。

§ 2. $N_*(U^n)$ の基本的な Lemma

Lemma 1. a) $f \in N(U^n), f \neq 0$ ならば

f^* は殆んど全ての T^n 上の点に対して存在し, $\log|f^*| \in L^1(T^n)$ であり, 又, 次のように singular measure σ_f が存在する,
 $u[f] = P[\log|f^*| + d\sigma_f]$ 。

b) 次の 3) の命題は同値である。($f \in N(U^n)$ の下に)

(1) $f \in N_*(U^n)$

(2) $u[f] \leq P[\log|f^*|]$, i.e. $\sigma_f \leq 0$

(3) $\log|f| \leq P[\log|f^*|]$. ((3) p. 47)

Lemma 2. $f \in N_*(U^n)$ のとき $|f|^p \in L^1(T^n)$ ($0 < p \leq \infty$)

$$f \in H^p(U^n) \iff |f|^p \in L^1(T^n). \quad (\{3\}, p. 51)$$

Lemma 3.

$$f: \text{outer} \iff f \in N_*(U^n), \quad \nexists f' \in N_*(U^n).$$

§ 3. $H'(U^n)$ ($n \geq 2$) の extreme point & outer function の関係。

まず、一次元の時のものが平行に成立する定理を述べる。

[Th. 1] outer function (norm 1) は $H'(U^n)$ の単位球 S の extreme point である。

[Th. 2] $f = gh$; g : inner, $h \in H'(U^n)$ と分解できるならば f は S の extreme point ではない。

Th. 1, 2 の証明は de Leeuw-Rudin [1] をたどればよい。
norm 1 の outer functions の closure (絶対値相の) に関するには、

[Th. 3] $f \in H'(U^n)$ の norm 1 の outer functions 全体の
norm-closure に属するための必要十分条件は
 $\|f\|=1, \quad f(z) \neq 0 \quad (z \in U^n)$ である。

Th. 4. $f \in H'(U^n)$ が norm 1 の outer functions 全体の weak*-closure に属するための必要十分条件は
 $\|f\| \leq 1$ で $f(z) \neq 0 (z \in U^n)$ のときは $f \equiv 0$ である。

Th. 3.4 の証明 + de Leew-Rudin [1] を少し変更すれば容易にできる。さて Th. 1 の 逆 は一次元のときは真であるが、 $n \geq 2$ のときはどうかが問題になると思われる。しかし、それは次の例によつて否定される。

Th. 5. $\frac{\pi}{4}(z_1 + z_2)$ は $H'(U^n) (n \geq 2)$ の単位球 S の extreme point である。

この例は U^n の中で zero をもつが、勿論 outer ではない。この証明は § 5 で扱う。

§ 4. $H'(U^n)$ の extremum problem

$\phi \in L^\infty(T^n)$ のとき、 T_ϕ を次のよじに定義する。

$$T_\phi(f) = \int_{T^n} f^*(w) \phi(w) d\mu_n(w) \quad (f \in H'(U^n)).$$

すなはち $S_\phi = \{f \in S ; T_\phi(f) = \|T_\phi\| = \sup_{g \in S} |T_\phi(g)|\}$ とする。

S_ϕ が T_ϕ に対する extremum problem の解の集合である。

この時、一次元の時と同じよじに次の Lemma が成立する。

Lemma 4. $f, g \in S_\phi$

$$\Leftrightarrow \arg f^*(w) = \arg g^*(w) \quad \text{a.e. } w \in T^n \quad \text{かつ} \quad \|f\| = \|g\| = 1.$$

(Eが、 T を含む) $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$ がある S_f に属して、
では $S_f = S_{\partial U^n}$ と書ける。よし、 T のとき S^f と書く
とする。すると、次の事実がわかる。

[Th. 6] a) $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$, f : outer $\Rightarrow f^* \in L^1(T^n)$
ならば S^f は f の像である。
b). $t \in S^f$ の f のみであれば、 f は \mathbb{R}^n の extreme point
であり、かつ、すべての inner function $u(z)$ に対して
 $f(z)/(1-u(z))^2 \notin H^1(U^n)$ である。 (n≥1)

[Th. 7] $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$, f : outer $\Rightarrow f^* \in L^p(T^n)$
($\frac{1}{2} \leq p \leq 1$) ならば、 $S^f - \{f\}$ は $H^{\delta}(U^n)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{\delta} = 2$) の
元を含まない。 (n≥1)

又 Th. 6, 7 の証明の方法を用いて、次の Neurwirth-Newman
の定理 (多变量の n=2 への一般化) の証明を上げ得る。

[Th. 8] $f \in H^{1/2}(U^n)$ かつ $f^*(w) \geq 0$ a.e. on T^n ならば
 f は constant である。 (n≥1)

Th. 6(a) は Th. 7 の特別な場合である。又 Neurwirth-
Newman の定理が生産 (Th. 7 を証明する) にててまとまる

”、§3との関連も考えて、従事の法則を使わずに §6で Th.7 を示す。

§5. Th.5 の証明

簡単のため $n=2$ のときを示す。(他も全く同様) すなはち

Th.5 が正しくなるには、 $z_1 + z_2 = \frac{f_1(z_1, z_2) + f_2(z_1, z_2)}{2}$, $f_1, f_2 \in H'$ (\cup^*), $\|f_1\| = \|f_2\| = \|z_1 + z_2\| = \frac{4}{\pi}$ と τ_1, τ_2 と $\delta_1 = \delta_2 = z_1 + z_2$ が示せればよい。

上のことを仮定すると

$$(1) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| + |f_2^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{\delta}{\pi}$$

である、

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) + f_2^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| d\theta_1 = \frac{\delta}{\pi} \quad \text{a.e. } \theta_2 \in (0, 2\pi)$$

である。 $1 \leq \delta < 1$ の場合 E_1 があり、 $1 <$

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| + |f_2^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|) d\theta_1 = \frac{\delta}{\pi} \quad (\theta_2 \in E_1)$$

$\lambda - \delta < m(E_2) = 1$ の場合 E_2 があり、 $1 <$

$$\lim_{r_2 \rightarrow 1} f_j(z_1, r_2 e^{i\theta_2}) = f_j(z_1, e^{i\theta_2}) \in H^1(V) \quad (j=1, 2, \theta_2 \in \mathbb{R}_2)$$

$$\lim_{r_1 \rightarrow 1} f_j(r_1 e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = f_j^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \quad \text{a.e. } \theta_1 \in (0, 2\pi) \\ (\theta_2 \in \mathbb{R}_2, j=1, 2).$$

である (A. Zygmund [4] p. 32f).

$E = E_1 \cap E_2$ とおく,

$$\|f_j(z_1, e^{i\theta_2})\|_1 = \alpha_j(\theta_2), \quad j=1, 2, \theta_2 \in E \text{ とおく}.$$

すると, (3) によると $\alpha_1(\theta_2) + \alpha_2(\theta_2) = \frac{4}{\pi}$ である。

$\chi = z_1, \theta_2 \in E$ と固定し, $\alpha_1(\theta_2) \leq \alpha_2(\theta_2)$ と仮定して,

$$g_1(z_1) = f_1(z_1, e^{i\theta_2}) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha_2} f_2(z_1, e^{i\theta_2})$$

$$g_2(z_1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_2} f_2(z_1, e^{i\theta_2})$$

とおく。すると $\|g_j(z_1)\|_1 \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{4}{\pi}$ ($j=1, 2$) である。

$\|z_1 + e^{i\theta_2}\|_1 = \frac{4}{\pi}$ で $z_1 + e^{i\theta_2}$ は outer function であり, $-z_1 - e^{i\theta_2}$

の $\pm i$ outer function は extreme point であることを証明する。

$$\text{すなはち, } \frac{g_1(z_1) + g_2(z_1)}{2} = \frac{f_1(z_1, e^{i\theta_2}) + f_2(z_1, e^{i\theta_2})}{2} = z_1 + e^{i\theta_2} \text{ である}.$$

これを見れば, $g_j(z_1) = z_1 + e^{i\theta_2}$ ($j=1, 2$) でないことはさう

ないことがわかる。したがって,

$$(4) \quad f_j(z_1, e^{i\theta_2}) = \frac{\pi}{4} \alpha_j(\theta_2) (z_1 + e^{i\theta_2}) \quad (j=1, 2)$$

である。この表現は明確である ($\alpha_1 > \alpha_2$ のとき成り立つ)。

1. $\tau_2 \in \mathbb{R}$, $r_1, r_2 > 0$ の $\alpha_1 \in E_1$ かつ (r_1, θ_1) が立つ。さて、
 $m_1 E_3 = 1$ となる β_2 のよどな可測集合 E_3 と $\alpha_2 \in (0, 2\pi)$ が存在す。

$$\begin{aligned} f_1(e^{i\theta_1}, z_2) &\in H^1(U) \\ \text{で } \lim_{r_1 \rightarrow 1} \lim_{r_2 \rightarrow 1} f_1(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) &= \lim_{r_2 \rightarrow 1} \lim_{r_1 \rightarrow 1} f_1(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \\ &= f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \quad \theta_2 \in E_3. \quad (\text{A.Zygmund, (4), p.328}) \end{aligned}$$

この事実と (4) を組合せば、 $\alpha_1(\theta_2)$ を U の中に正則に拡張でき。

$$f_1(e^{i\theta_1}, z_2) = \frac{\pi}{4} \alpha_1(z_2) (e^{i\theta_1} + z_2) \quad (z_2 \in U).$$

$z = r_1 e^{i\theta_1} + z_2$ は outer function であり、 $f_1(e^{i\theta_1}, z_2) \in H^1(U)$ たゞかし、 $\alpha_1(z_2) \in N_*(1)$ である。又 $0 \leq \alpha_1(\theta_2) \leq \frac{\pi}{4}$ であるから $\alpha_1(z_2) \in H^\infty(U)$ である (Lemma 2)。1. $\tau_2 \in \mathbb{R}$, $r_1, r_2 > 0$ の α_1, α_2 の定義を考慮に入れてれば $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ が得られる。これは $f_1 = f_2 = z_1 + z_2$ を示す。(証明終)。

§ 6. Th. 7 の証明

まず、de Leuw-Rudin (1) p.471 をよく見ると次の二点が分る。

Lemma 5. $f \in H^1(U)$ ($p \geq 1$) ならば、 $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ で $f \in H^\infty(U)$

が成立する。

$$i) \|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = \|f\|_1$$

$|T_{2\pi}, \tau, 2$

$$\arg(f^*(w) + g^*(w)) = \arg(f^*(w) - g^*(w)) = \arg f^*(w) \text{ a.e. } w \in T.$$

$$ii) f \pm g \text{ は outer.}$$

このを用いて基本的な次の Lemma を得る。

Lemma 6. $f \in H^p(U)$ ($\frac{1}{2} \leq p \leq 1$) が outer function であるとき、 $h \in H^q(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2)$ が $f^* h^* \geq 0$ a.e. on T のとき、 fh は constant である。

(証明) $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ のとき $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$ とする。 $1 \leq q \leq \infty$ である。

Lemma 5 に $f, h \in H^p(U)$; $h \pm g$ outer, $\arg(h^* \pm g^*) = \arg h^*$ a.e. T 。 $f \pm h \pm g$ は outer であるから、zero でない τ で $f \pm h \pm g$ は outer である。したがって $\sqrt{f} \in H^{2p}(U)$, $\sqrt{h \pm g} \in H^{2q}(U)$ である。 \therefore $\sqrt{f} \sqrt{h \pm g} \in H^1(U)$ 。したがって $f^* h^* \geq 0$, $\arg(h^* \pm g^*) = \arg h^*$ a.e. on T である。したがって $(\sqrt{f} \sqrt{h \pm g})^*$ が real a.e. on T である。したがって $H^1(U)$ の直和の構成法が real であるから $\sqrt{f} \sqrt{h \pm g}$ は 0 でない constant である。

しかも f は constant でなければならぬ。(経)).
(Th. 7 の證明).

f は outer であるから $\frac{1}{f} \in N_*(U^n)$ (だが) かつ $\frac{1}{f^*} \in L'(T')$ より $\frac{1}{f} \in H^1(U^n)$ である。これと, すべての $w \in T^n$ について $f_w(\lambda) = f(\lambda w) \in H^1(U)$ である, $\frac{1}{f_w(\lambda)} \in H^p(U)$ である。さて, $g \in S^f \cap H^\delta(U^n)$ とする。すると,
Lemma 4 によると, $\frac{g^*(e^{i\theta})}{f^*(e^{i\theta})} \geq 0$, a.e. on T である。
Lemma 3 より $\frac{1}{f_w(\lambda)}$ が outer であることに注意して, Lemma 6 を使ふと, すべての $\frac{g_w}{f_w}(\lambda)$ は constant である。
(すなはち, $-\lambda$ の軌道 $\{\lambda w; |w|<1\}$ は原点で交わさない)
 $\frac{g_w}{f_w}(\lambda) = \frac{g}{f}(0)$ a.e. $w \in T^n$ を得る。 $\frac{g}{f}$ は U^n で正則だから, 高次展開することによって, $\frac{g}{f} = \frac{g}{f}(0)$ を得る。
 $\|g\| = \|f\| = 1$ だから $\frac{g}{f} = 1$ で証明が終る(?)。 (経)).

(注) Th. 6 は de Leenw-Rudin [1] の Th. 8 の gap と少しあまりよろしくある。又 $\varphi = e^{-\alpha \pi i / p}$ とす。Th. 6, 2. $\frac{1}{f^*} \in L'(T')$ と $\frac{1}{f^*} \in L^p(0 < p < 1)$ が主なえどとはほぼ同じ。実際, $f = (1-z_1)^{\alpha} / \| (1-z_1)^{\alpha} \|_1$, ($1 < \alpha < \frac{1}{p}$) は S^f が少くとも 2 個の元を含むのである。(例: $z = (z_1, z_2, \dots, z_n), n \geq 1$)

参考文献

- [1]. K. de laenw and W.Rudin , Extreme points and extremum problems in H_1 , Pacific J. Math., 8 (1958), 463 - 485.
- [2]. J. Neuwirth and D.J. Newman , Positive $H^{\frac{1}{2}}$ functions are constants , Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967), 958.
- [3]. W.Rudin , Function Theory in Polydiscs , Benjamin 1969.
- [4] A. Zygmund , Trigonometrical series II. 1959.