数理解析研究所講究録
110巻 1971年 9-13

White noise
—metrical automorphisms の一クラスについて—

名大教養　野本　久夫

1. White noise

$E \subset H \cong H^* \subset E^*$ を rigged Hilbert space : H は（可分な）実ヒルベルト空間，E は H で dense な nuclear space とする．H^*, E^* はそれぞれの conjugate spaces をあらわすものとする．E 上の関数 $C(\xi)$ が，連続，positive-definite かつ $C(0)=1$ をみたせば Bochner-Minlos の定理により，$(E^*, \mathcal{L})$ 上に唯一つの確率測度 μ が存在して，$C(\xi)$ はそのフーリエ変換となっている．

(1) $$C(\xi) = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi\rangle} d\mu(x)$$

こゝに，$\mathcal{L}$ は E^* の cylinder sets の生成する σ-algebra，$\langle x, \xi\rangle$ は $E^* \times E$ 上の canonical な bilinear form である．とくにつぎの C

(2) $C(\xi)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right\}$, $\|\xi\|=\xi$ の H-norm

に対応する測度 μ を Gauss 測度, white noise 等と呼ぶ。

以下では white noise の空間 $(E^*, \mathcal{L}, \mu)$ 上に H の直交変換が induce する metrical automorphism に関した考察を行なう.

2. 直交群 O(H) と metrical automorphisms.

$L^2 = L^2(E^*, \mu)$

$O(H)=\{g:\ g$ は H の直交変換$\}$

$O(E)=\{g:\ g\in O(H),\ g: E\longrightarrow E$ なる homeomorphism$\}$

$O(E^*)=\{g^*:\ \langle g^*x, \xi\rangle=\langle x, g^{-1}\xi\rangle,\ g\in O(E)\}$

$\mathfrak{A}(E^*)=\{T;\ T$ は E^* 上の metrical automorphism$\}$

とおく. (2) より $C(g\xi)=C(\xi)$ だから $O(E^*)\subset\mathfrak{A}(E^*)$ であるが, $O(H)\subset\mathfrak{A}(E^*)$ であることも次のようにしてわかる.

1°) map $\gamma:\ E\ni\xi\longrightarrow\langle\cdot,\xi\rangle\in L^2$

は linear, isometric で H 上まで拡張できる. $\gamma(f)\ (f\in H)$ を $\langle\cdot, f\rangle$ とかくことにする. $\langle\cdot, f\rangle$ は確率変数で, その分布は平均 0, 分散 $\|f\|^2$ の正規分布 $N(0, \|f\|^2)$ である.

2°) M を $e^{i\langle x, f\rangle}$, $f\in H$ の 1 次結合の全体とすると L^2 で dense なことが知られている. このとき, M の元

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{i\langle x, f_k\rangle}$$

に対して,

$$(3) \quad U_g\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{i\langle x, gf_k\rangle}, \qquad g \in O(H)$$

は well-defined で, M の内積を保つ変換となっている. したがって U_g は L^2 の unitary 変換に拡張できる. 定義から容易に,

$$(4) \quad U_{g_1g_2} = U_{g_1}U_{g_2}, \qquad g_\nu \to g \ (\text{strong}) \Longrightarrow U_{g_\nu} \to U_g \ (\text{strong})$$

このとき, つぎの定理が成り立つ.

定理 $O(H)$ から $\mathfrak{A}(E^*)$ への変換 T で

(i) $U_g\varphi(x) = \varphi(T_g^{-1}x)$, $T_g = T\cdot g$, $\varphi \in L^2$

(ii) $T_{g_1g_2} = T_{g_1}\cdot T_{g_2}$ (mod 0)

をみたすものが存在し, $g \in O(E^*)$ に対しては $T_g = g^*$ がなりたつ.

証明は各 U_g が有界可測関数 φ, ψ に対して multiplicative, $U_g(\varphi\psi) = U_g\varphi \cdot U_g\psi$ なることと (E^*, μ) が Lebesgue space なることから得られる.

3° Brown 運動の射影不変性

P. Lévy の Brown 運動に関する射影不変性についての [2] の

アプローチでは $O(E^*)$ を利用している。そのためには E のえらび方に工夫が必要となるが、$O(H) \subset \mathcal{O}(E^*)$ を用いるとそれをさけることができる。以下でそのことを簡単に述べよう。

$$E = \text{Schwartz の } \mathcal{S}, \qquad H = L^2(\mathbb{R}, dx)$$

ととる。nonsingular な map $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$(5) \quad g_\varphi : H \ni f(u) \longrightarrow f(\varphi u)\sqrt{\frac{d\varphi u}{du}}$$

とおけば、$g_\varphi \in O(H)$ である。今、φ は $[a, b] \longrightarrow [c, d]$, $\varphi(a) = c$ なる射影変換とする。

$$(6) \quad \varphi : u \longrightarrow \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$$

例に

$$X(t, x) = \sqrt{\frac{b-t}{t-a}}\ \langle x, \chi_{[a,t]}(u) \rangle \sqrt{\frac{b-a}{b-u}}$$

$$Y(t, x) = \sqrt{\frac{d-t}{t-c}}\ \langle x, \chi_{[c,t]}(u) \rangle \sqrt{\frac{d-c}{d-u}},$$

χ_A は $A \subset \mathbb{R}$ の indicator

なる確率過程を考える。これらは Brown 運動 $\langle x, \chi_{[a,t]}(u) \rangle$ $\langle x, \chi_{[c,t]} \rangle$ から夫々の linear interpolation として得られている (cf [1])。さて、(6)の φ に対しては、少し計算すれば、

$$Y(t, T_\varphi^{-1} x) = X(\varphi^{-1}(t), x), \qquad c < t < d,$$

$$T_\varphi = T_{g_\varphi}$$

なることがわかる。これは $X(t)$ の time change $X(\varphi^{-1}(t))$ が $Y(t,$

$T_{\varphi}' x)$ と，したがって T_{φ} は metrical automorphism であるから $Y(t, x)$ と equivalent な process であることを示す．

引用文献

[1] T. Hida; Stationary stochastic process, Lecture note in Princeton University, (1969).

[2] T. Hida, I. Kubo, H. Nomoto and H. Yoshizawa; On projective invariance of Brownian motion, Publ. RIMS, Vol 4, No. 3, (1969), 595-609.