数理解析研究所講究録
111巻 1971年 35-46



# 表現環の構造について

東京教育大学大学院　岩田恵司

Gを有限群とし　Rを Dedekind domain とする。以後 RG-加群については　R-加群として　有限生成, torsion free なものだけを扱う。RG-加群 M, N について, $M\otimes_R N$ は Gの作用を $g(m\otimes n)=gm\otimes gn$, $g\in G$, $m\in M$, $n\in N$ とすることにより RG-加群になる, これを $M\otimes N$ と書く。RG-加群の同型類を [ ] を付して表わす。いま RG-加群の同型類を生成系とし, 基本関係 $\{[M]=[M']+[M''] \mid M\cong M'\oplus M''\}$ で定義されるアーベル群は　更に　$[M][N]=[M\otimes N]$ と定義することにより環の構造をもつ, これを群Gの（R上の）表現環といい $a(RG)$ で表わす。$\mathbb{C}$-algebra $\mathbb{C}\otimes a(RG)$ を $A(RG)$ で表わす。表現環の構造については Lam, Green, Conlon, 等によりいくつかの結果が得られているが, それらの概略をここに紹介する。

§1

本節を通して，$R$はcomplete discrete valuation ringとし，$\mathfrak{p}$をその極大イデアル，$\bar{R}=R/\mathfrak{p}$，$p=\mathrm{char}\,\bar{R}$，とする。$G$の部分群$H, K$について，もし$x^{-1}Kx \subseteq H$ ($\exists x \in G$)ならば このとき$K \leq H$と表わす。$RH$-加群$L$に対して$RG$-加群$RG \otimes_{RH} L$を$L^G$で表わすことにする。

<u>定義.</u> $G$の部分群$D$について，$M \mid L^G$，$\exists L$: $RD$-module，なる様な$[M]$で生成される$a(RG)$の加法的部分群は，更に$a(RG)$のイデアルになる，これを$a_D(RG)$で表わし，環$a_D(RG)/\sum_{H<D} a_H(RG)$を$w_D(RG)$で表わす。又それらを複素数体まで係数拡大したものをそれぞれ$A_D(RG)$, $W_D(RG)$とする。

<u>定理[1]</u> (Green [2])

$$W_D(RG) \cong W_D(RN(D)) \quad : \text{ring isomorphic}$$

(ここに $N(D)$ は $D$ の $G$ における正規化群)

証明は省略するが ここでの同型対応は $t([M]) = [M^G]$ で定義される transfer map $t: A(R\cdot N(D)) \longrightarrow A(R\cdot G)$ から自然に誘導された対応で与えられる。

注意. $D$が$p$-部分群でない場合は $w_D(RG)=0$

補題 [2]

$F([M])=[\bar{R}G\otimes_{RG}M]$ によって定義される自然な準同型 $F: A(RG)\longrightarrow A(\bar{R}G)$ を考える。$\{[X]-[X']-[X''] \mid \exists\, 0\to X'\to X\to X''\to 0$ $\bar{R}G$-exact sequence$\}$ で生成される $A(\bar{R}G)$ のイデアルを $A'(\bar{R}G)$ とし、$A'(RG)=F^{-1}(A'(\bar{R}G))$ とするとき

$$A(RG)=A_{(1)}(RG)\oplus A^{(1)}(RG)$$

とイデアル分解される。

証明 作り方より $A_{(1)}(\bar{R}G)A^{(1)}(\bar{R}G)=0$ 又 $A(RG)/A^{(1)}(RG)\approx G_0(\bar{R}G)\approx A_{(1)}(\bar{R}G)\approx A_{(1)}(RG)$。これより $A_{(1)}(RG)A^{(1)}(RG)=0$。準同型 $F^*: A(RG)\xrightarrow{F}A(\bar{R}G)\xrightarrow{\varphi}G_0(\bar{R}G)$ が $A_{(1)}(RG)$ の上で同型であることに注意すれば、$\exists J_G\in A_{(1)}(RG)$ s.th. $F^*(J_G)=F^*(1_G)$，ここに $1_G$ は $A(RG)$ の単位元，について $1_G=J_G+(1_G-J_G)$ と直交冪等元への分解が得られる。 (Q.E.D)

$H\triangleleft G$ とする。準同型 $G\longrightarrow G/H$ は自然に環準同型 $\tau: A(RG/H)\longrightarrow A(RG)$ を引き起こすが $\tau(A_{(1)}(RG/H))\subset A_H(RG)$ である。そこで $\tau(J_{G/H})$，($J_{G/H}$ は $A_{(1)}(RG/H)$ の idempotent generator)，を再び同じ記号 $J_{G/H}$ で表わすことにする。

補題 [3]

$J_{G/H}$ は $A_H(RG)$ の idempotent generator である。

証明 $\bar{R}$ は代数的に閉じている，と仮定してよい。

証明に入る前に少し準備をしておく。$\bar{R}$が代数的に閉じているから、$G$の representation group $\hat{G}$ が存在して、$G$の上のすべての twisted group algebra は $\bar{R}\hat{G}$ の両側イデアルとして実現される。そこでいまその分解を

$$\bar{R}\hat{G} = B_0 \oplus \cdots \oplus B_n, \qquad B_0 = \bar{R}G$$

とすると、これにより、$\mathbb{C}$-space への分解

$$A(\bar{R}\hat{G}) = A(B_0) \oplus \cdots \oplus A(B_n)$$

$$A_{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A_{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A_{(1)}(B_n)$$

$$A^{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A^{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A^{(1)}(B_n)$$

$$G_0(\bar{R}\hat{G}) = G_0(B_0) \oplus \cdots \oplus G_0(B_n)$$

が引き起される。又、$\bar{R}\hat{G}$ の Cartan matrix が non-singular であることより $\varphi_i : A_{(1)}(B_i) \xrightarrow{\sim} G_0(B_i)$ $\mathbb{C}$-isomorphic となる。$B_0$, $B_i$ ―加群 $M$, $N$ は自然に $\bar{R}\hat{G}$―加群とみれるが、$\bar{R}\hat{G}$―加群として $M \otimes N$ を考えると $M \otimes N$ は $B_i$―加群である。これによって $A(B_0)$, $A_{(1)}(B_0)$, $G_0(B_0)$ は各々 $A(\bar{R}\hat{G})$, $A_{(1)}(\bar{R}\hat{G})$, $G_0(\bar{R}\hat{G})$ の $\mathbb{C}$-subalgebra になることが分る。いま $A_{(1)}(\bar{R}G)$, $A_{(1)}(\bar{R}\hat{G})$ の idempotent generator をそれぞれ $J_G$, $J_{\hat{G}}$ とすると $J_{\hat{G}} = J_G \in A_{(1)}(B_0)$ なることが分る。これより $xJ_G = x$, $\forall x \in A_{(1)}(B_i)$ である。

absolutely indecomposable $RH$-加群 $L$ をとり

L の G における stabiliser を $S$，$\{[M] \in A(RG) \mid M \mid L^G\}$ で生成された $A_H(RG)$ の $\mathbb{C}$-subspace を $A(L^G)$ とすると，計算は省略するが，$S/H$ の $\bar{R}$ 上の twisted group algebra $B_L$ と $\mathbb{C}$-linear homomorphism $F_L : A_H(RG) = \oplus_L A(L^G) \longrightarrow A_{(1)}(B_L)$ が構成され，次の条件を満足する。

$$F_L : \quad A(L^G) \xrightarrow{\sim} A_{(1)}(B_L) \quad : \mathbb{C}\text{-isomorphic}.$$

$$F_L(xy) = F_L(x) F_{1_H}(y) \quad , {}^{\forall}x \in A_H(RG), \ {}^{\forall}y \in A_{(1)}(R^G/_H)$$

従って ${}^{\forall}x \in A(L^G)$ について，

$$\begin{aligned} F_L(x J_{G/H}) &= F_L(x) F_{1_H}(J_{G/H}) \\ &= F_L(x) J_{S/H} \\ &= F_L(x) \end{aligned}$$

故に　$x J_{G/H} = x$　　　　　　(Q.E.D)

以上の結果にもとずいて次の定理が導かれる。

<u>定理 [4]</u> (Conlon [3])

G の部分群 D について

$$A_D(RG) \Leftarrow\!\!\oplus A(RG)$$

$$A_D(RG) = A'_D(RG) \oplus A''_D(RG), \quad A''_D(RG) \cong W_D(RG)$$

$$\text{ここに} \quad A'_D(RG) = \sum_{D' < D} A_{D'}(RG)$$

証明　$|D| = 1$ のときは証明されている。$|D|$ に関する帰納法で証明する。帰納法の仮定により $A'_D(RG) \Leftarrow\!\!\oplus A(RG)$ 従って補題 [3] により $D \trianglelefteq G$ の場合について証明すればよい

$N(D) \neq G$ より $A_D(R \cdot N(D))$ については定理は成立。従って

$$\begin{aligned} A_D(RG)/A'_D(RG) &= W_D(RG) \\ &= W_D(R \cdot N(D)) \\ &\cong A''_D(R \cdot N(D)) \oplus A(R \cdot N(D)) \end{aligned}$$

より $A_D(RG)/A'_D(RG)$ は identity element を持つ。

(Q. E. D)

## § 2

$R$ は §1 と同じく complete discrete valuation ring とする。ここでは $a(RG)$ の nilpotent element について調べる。

$D \triangleleft G$ とし、$H$ を $D$ を含む $G$ の部分群とする。

inclusion map $i_H$ $H \hookrightarrow G$ は

$$\begin{aligned} &\text{ring hom.} & i_H^* &: G_0(R\,G/D) \longrightarrow G_0(R\,H/D) \\ & & I_H^* &: a_D(RG) \longrightarrow a_D(RH) \\ &\text{add. hom.} & i_{*H} &: G_0(R \cdot H/D) \longrightarrow G_0(R \cdot G/D) \\ & & I_{*H} &: a_D(RH) \longrightarrow a_D(RG) \end{aligned}$$

を誘導する。$a_D(RH)$ は $[M] \cdot [S] = [M_H \otimes S]$,

$M$ : $R\,H/D$-加群, $S$ ; $D$-projective $RH$-加群, $M_H$ ; $M$ を $H \longrightarrow H/D$ を通して $RH$-加群としたもの, とすることによって $a(R\,H/D)$-加群となるが、更に $G^0(R \cdot H/D)$-加群でもあることが分る。

補題 [5]

$\Delta = \{ \text{subgroup } H \text{ of } G \mid H \supset D,\ H/D \text{ cyclic} \}$ とするとき。もし $\Delta \ni {}^{\forall}H$ に対して $a_D(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば、$a_D(RG)$ も持たない。

証明　$x^n = 0$, $x \in a_D(RG)$ とすると、${}^{\forall}H \in \Delta$ に対して $0 = I_H^*(x^n) = I_H^*(x)^n \in a_D(RH)$。従って $x \in \bigcap_{H \in \Delta} \mathrm{Ker}\, I_H^*$。さてここで

$$[G:D]^2 G_0(R\,G/D) \subset \sum_{H \in \Delta} \mathrm{image}\ i_{*H}$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
[G:D]^2 x &= [G:D]^2 \cdot 1_{G/D} \cdot x \quad , \quad 1_{G/D} : G_0(R\,G/D) \text{の単位元} \\
&= \sum_{H_j \in \Delta} a_j\, i_{*H_j}(y_j) x \\
&\qquad {}^{\exists}H_j \in \Delta,\ {}^{\exists}y_j \in G_0(R \cdot H_j/D) \\
&\qquad {}^{\exists}a_j : \text{integer} \\
&= \sum a_j I_{*H_j}(y_j I_{H_j}^*(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

従って $x = 0$　(Q.E.D)

定理 [6]　(Lam [5])

次の条件を満足する $G$ の部分群 $H$ のすべてから成る集合を $\Phi$ とする。　$H^{(p)} \triangleleft H$ , $H/H^{(p)}$ : cyclic

ここに $H^{(p)}$ : p-Sylow subgroup of $H$

もし 亜∋$^\forall H$ に対して $a(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば，$a(RG)$ も non-zero nil. el. を持たない。

証明　$|G|=1$ のときは明らか。$|G|$ に関する帰納法で証明する。$D$ を $G$ の任意の $p$-部分群とする。もし $D \ntriangleleft G$ なら帰納法の仮定により $a(R\cdot N(D))$ は non-zero nil. ele. を持たない，従って $\omega_D(RG)$ $(\simeq \omega_D(R\cdot N(D)))$ も non-zero nil. ele. をもたない。$D \triangleleft G$ の場合は $^\forall H \in \Delta$ とすると，$D \subset H^{(p)} \subset H$，$H/D$ cyclic，従って $H \in$ 亜 となり $a(RH)$ は non-zero nil. el. をもたない。従って補題により，$a_D(RG)$ 故に $\omega_D(RG)$ も non-zero nil. el. を持たない。従って定理[4] により示された。　(Q.E.D)

§3

本節では Burnside algebra の分解から誘導された，表現環のイデアル分解を紹介する。

定義.　RG-加群の category を $\mathbb{M}(RG)$ とし $\mathbb{L} = \bigcup_{D\leq G} \mathbb{M}(RD)$ とする。$M$ が $RD$-加群であることを $T_M = D$ と書くことにする。$\mathbb{L} \ni M, M'$ について $M \cong {}^xM'$ $^\exists x \in G$ のとき $M \sim M'$ と書き，関係 $\sim$ による $M$ の class を $\langle M \rangle$ で表わす。$\langle M \rangle$; $M \in \mathbb{L}$ で生成された free abelian group は生成元の間の積を

$$\langle M\rangle\langle N\rangle = \sum_x \langle M_{T_M \cap {}^xT_N} \otimes {}^xN_{T_M\cap T_N}\rangle$$

$x$ は $G$ の $(T_M, T_N)$－両側剰余類の代表系を動く

と定義することにより環になる，これを Burnside ring といい $b(RG)$ で表わす。 $B(RG) = \mathbb{C} \otimes b(RG)$ とする。

$G$ の部分群 $H$ について $\{\langle M\rangle \mid T_M \leq H\}$，$\{\langle M\rangle \mid T_M \lneq H\}$ で生成される $b(RG)$ の additive subgroup をそれぞれ $b_H(RG)$，$b'_H(RG)$ とすると，これらは $b(RG)$ のイデアルであることが分る。 $B_H(RG) = \mathbb{C} \otimes b_H(RG)$，$B'_H(RG) = \mathbb{C} \otimes b'_H(RG)$ とする。

<u>定理[7]</u> (Conlon[4])

$$b_D(RG)/b'_D(RG) \xrightarrow{\sim} b_D(R\cdot N(D))/b'_D(R\cdot N(D))$$

: ring isomorphic

証明 $b_D(RG) \longrightarrow b_D(R\cdot N(D))$ から誘導された additive hom. $r^*$ : $b_D(RG)/b'_D(RG) \longrightarrow b_D(R\cdot N(D))/b'_D(R\cdot N(D))$ について，$r^*$ は base を base に対応させているから additive isom. しかも $M, M' \in \mathbb{M}(R\cdot D)$ について

$$\langle M\rangle\langle M'\rangle = \sum_{D \cap {}^xD \subset G} \langle M' \otimes {}^xM\rangle$$

$$\equiv \sum_{D \cap {}^xD \subset N(D)} \langle M' \otimes {}^xM\rangle \mod b'_D(RG)$$

従って $r^*$: ring isomorphism

(Q.E.D)

11

$M \in \mathbb{L}$ とするとき，$T_M = S$，$k_S = [N(S):S]$ とおくと，

$$\langle 1_S\rangle\langle M\rangle = \sum_{SxS\subset G} \langle 1_S \otimes {}^{x}M\rangle$$

$$\equiv \sum_{SxS\subset N(S)} \langle 1_S\otimes M\rangle \mod b'_D(RG)$$

$$\equiv k_S\langle M\rangle \mod b'_D(RG)$$

これに注意して $|D|$ に関する帰納法により次の定理が証明される。

<u>定理[8]</u> (Conlon[4])

$B_D(RG)$ は $B(RG)$ のイデアル因子である。

$$B_D(RG) = B'_D(RG)\oplus B''_D(RG), \quad {}^{\exists}B''_D(RG)\cong B_D(RG)/B'_D(RG)$$

特に Burnside alg は

$$B(RG) = \oplus_{D\le G} B''_D(RG), \quad B''_D(RG)\cong B_D(RG)/B'_D(RG)$$

とイデアル分解される。

(証明略)

いま自然に algebra epimorphism $\psi : B(RG) \longrightarrow A(RG)$, $\langle M\rangle \longmapsto [M^G]$ が構成されるが，そこで，

$A^*_D(RG) = \psi(B_D(RG))$，　$A^{*\prime}_D(RG) = \psi(B'_D(RG))$ とおく。

このとき次が成立する。

<u>定理[9]</u> (Conlon[4])

$$A^*_D(RG) = A^{*\prime}_D(RG)\oplus A^{*\prime\prime}_D(RG)$$

$$A^*_D(RG) \supset A^{*\prime\prime}_D(RG) \cong A^*_D(RG)/A^{*\prime}_D(RG) \cong A^*_D(R\cdot N(D))/A^{*\prime}_D(R\cdot N(D))$$

特に　$A(RG) = \oplus_{D\le G} A^{*\prime\prime}_D(RG)$

証明

$\langle M\rangle-\langle M'\rangle-\langle M''\rangle$ ; $T_M = T_{M'} = T_{M''}$, $M \cong M'\oplus M''$, $\langle N\rangle-\langle N^G\rangle$
で生成された $b(RG)$ の additive subgroup は ideal に
なる，これを $j(RG)$ で表わすと $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathbb{C}\otimes j(RG)$ で
あることが分る。$\mathbb{C}\otimes j(RG)\cap B_D(RG)$ の生成元を $\mathrm{mod}\, B'_D(RG)$
で考えると $\langle M\rangle-\langle M'\rangle-\langle M''\rangle$, $\langle N^P\rangle$，ここに，
$T_M = T_{M'} = T_{M''} = D$, $M \cong M'\oplus M''$, $T_N < D$, である。全
く同じ元が $\mathrm{mod}\, B'_D(R\cdot N(D))$ での $\mathbb{C}\otimes j(R\cdot N(D))\cap B_D(R\cdot N(D))$
の生成元である。従って定理[7][8]により示された。

(Q.E.D)

# 文献


[1] C. W. Curtis and I Reiner ; Representation theory of finite groups and associative algebras ( Interscience 1962 )

[2] J. A. Green ; A transfer theorem for modular representations ( J. of Alg 1 (1964) )

[3] S. B. Conlon ; Relative components of Representations ( J. Alg. 8 (1968) )

[4] S. B. Conlon ; Decompositions induced from the Burnside algebra ( J. Alg 10 (1968) )

[5] T. Y. Lam ; A theorem on Green's modular representation ( J Alg (1970) )