数理解析研究所講究録
112巻 1971年 187-192

安定過程と Dirichlet 空間 (II)

阪大理　　岡部 靖憲

§1. 序

空間 D を $\mathbb{R}^n$ の有界領域で、その境界 ∂D は充分に滑らかとする。

福島正俊氏が、L^2-Dirichlet space の理論を用いて、反射壁ブラウン運動（さらに、一般に、symmetric Brownian resolvent）を構成したことは (I) で説明したが、実は、J. Elliott も、Beurling-Deny の意味の Dirichlet space の理論を用いて、D が convex のときに、反射壁安定過程を構成していた。

そこで、私は次のことを考えた。

(A) "反射壁安定過程" そのものの正当化に重点をおき、吸収壁安定過程につけ加えうるすべての境界条件をもとめるのに、L^2-Dirichlet space の枠組の中で行えないか？　行えるとすれば、"反射壁安定過程" とは、"函数空間が一番大きく、norm が一番小さい" という意味において正当化される

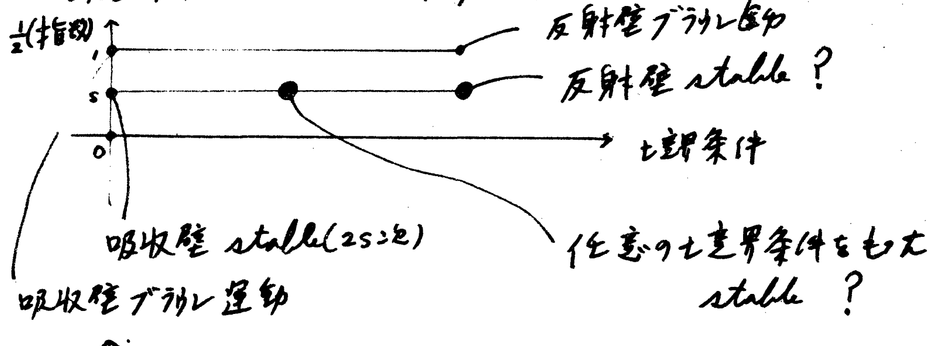
のではないか？

(B) 全空間上の安定過程は、ブラウン運動をsubordinationすることに得られることに注意して、(I)で考えた"任意の境界条件をもったブラウン運動"をsubordinationすることによって、(A)で考えた"ある境界条件をもった安定過程"が構成されないか？

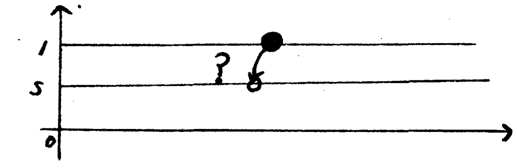
(C) 逆に、(A)で考えた"任意の境界条件をもった安定過程"は、(I)で考えた"ある境界条件をもったブラウン運動"をsubordinationすることに得られないのか？

以上のことを図示すると、

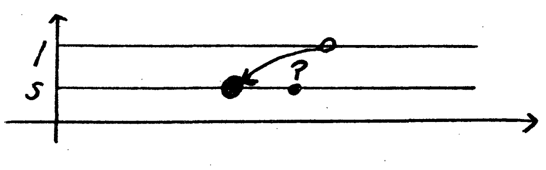
(A)



(B)



(C)



このshort communicationでは、問題(A)における"反射壁安定過程"を構成するのに、J. Elliottが用いたDirichlet spaceを述べるにとどめ、問題(B),(C)に対しては、まだ完成していないので省くが、藤原大輔氏が、Δの分数巾の定義域を具体的に決定した仕事をL^2–Dirichlet spaceの枠組で解釈することは重要であると思われる。

§2. 反射壁安定過程

$n \geq 2$とし、Dはconvexする。

$$(2.1) \qquad n(x,\xi) \equiv -\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n+2s-2}}\right), \quad x \in D,\ \xi \in \partial D$$

とおくと、Dのconvexityより

$$(2.2) \qquad n(x,\xi) \geq 0$$

が成り立つ。

但し、$0<s<1$は固定されている。

次に、次のL^2–Dirichlet spaceを考える。

$$
(2.3)\begin{cases}
\mathcal{E}^{(\infty)}(u,u) \equiv \displaystyle\int_D \int_{\partial D} (u(x)-u(\xi))^2 m(x,\xi)\, dx\, dS_\xi + \\
\qquad + \dfrac{C_s}{2} \displaystyle\int_D \int_D \dfrac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s-2}}\, dx\, dy \\
C_s \equiv \quad 2s(n+2s-2) \\
\mathcal{F}^{(\infty)} \equiv \{ u \in L^2(\overline{D})\,;\ \mathcal{E}^{(\infty)}(u,u) < \infty \}
\end{cases}
$$

注意　D の convexity は bilinear form が positive であることに用いられている。

何故、この L^2-D-space $(\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)})$ が"反射壁安定過程"を構成していることになるのかを考えてみよう。

$$
(2.4) \qquad \int_{\partial D} m(x,\xi)\, dS_\xi = C_s \int_{D^c} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}\, dy \equiv m(x)
$$

に注意すると、$\forall u \in C_0^\infty(D)$ に対して、

$$
(2.5)\begin{cases}
C_0^\infty(D) \subset \mathcal{F}^{(\infty)} \\
\mathcal{E}^{(\infty)}(u,u) = \displaystyle\int_D u(x)^2 m(x)\, dx + \dfrac{C_s}{2} \int_D \int_D \dfrac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s-2}}\, dx\, dy
\end{cases}
$$

が成り立つ。　さらに、

$$(2.6)\qquad \int_D u(x)^2 m(x)\,dx + \frac{c_s}{2}\iint_D\int_D \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s-2}}\,dx\,dy$$

$$= d_s \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 |\xi|^{2s}\,d\xi \qquad (u \in C_0^\infty(D))$$

に注意すると、 $C_0^\infty(D)$ を この norm で 完備化して得られる L^2- Dirichlet space を $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)})$ とすると、これは、吸収壁安定過程(2s次)の作る L^2-Dirichlet space と一致する. 従って、(2.5)は (I)で述べた定理 2.1 に対応している。

次に、L^2- Dirichlet space $(\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)})$ に対応する L^2- resolvent を $\{G_\alpha^\infty ;\ \alpha>0\}$ とすると、

$$\forall f \in L^2(\bar{D}),\quad \forall \varphi \in \mathcal{F}^{(\infty)}$$

$$(2.7)\qquad \mathcal{E}_\alpha^{(\infty)}(G_\alpha^\infty f, \varphi) = (f, \varphi)_{\bar{D}}$$

が成り立つので、

$$(2.8)\qquad B_\alpha u \equiv \mathrm{div}_x \int_D \frac{\mathrm{grad}_y u(y)}{|x-y|^{n+2s-2}}\,dy = \Delta_x \int_D \frac{u(y)}{|x-y|^{n+2s-2}}\,dy + {} + \int_{\partial D} n(x,\xi)\, u(\xi)\, dS_\xi$$

と (2.5), (2-6) に注意すると、

$$u \equiv G_\alpha^\infty f$$ とおくとき、

$$\begin{cases} (\alpha - B_\alpha)u = f & \text{in } D \quad (2.9) \\ \int_D (u(x) - u(\xi)) m(x,\xi)\, dx = 0 & \text{in } \partial D \quad (2.10) \end{cases}$$

が成り立つ。

この最後の条件(2.10)が"反射壁"なる境界条件を表わしていると J. Elliott が主張しているのであるが、1次元の場合に、以前に J. Elliott が一般に S. Watanabe が構成した反射壁安定過程と比較することは必要であるが、このsymposiumにおける田中洋氏の講演の中にあるどの構成法((1)折返しによるもの(2) infimum process を用いるもの(3) Skorohod の確率微分方程式によるもの)にも入らない様に思える。更なる追求と問題(A),(B)(C)については次回にしたいと思う。

参考文献

Joanne Elliott; Dirichlet spaces associated with integro-differential operators, I, II, Illinois J. Math., **9** (1965), 87-98; **10** (1966), 66-89