数理解析研究所講究録
112 巻 1971 年 163-173

マルコフ過程の Filtering process の漸近的安定性

名大 理 国田 寛

§1. 定義と基本的な結果

マルコフ過程の Filtering の問題，特に Filtering process のみたす確率微分方程式をみちびくことは，通信や統計の問題とも関連してくわしく調べられている．(例えば [1], [7])
この報告では Filtering process の性質，特にマルコフ過程としての側面及びその漸近的安定性についてのべたい．

$(x_t), t \geq 0$ をコンパクトな状態空間 S 上の Feller マルコフ過程，$(w_t), t \geq 0$ は (x_t) と独立な N-次元ブラウン運動とする．与えられた $S \longrightarrow R^N$ の連続写像 h を用いて新しい N-次元過程 y_t を

(1) $$y_t = \eta + \int_0^t h(x_s)ds + w_t, \quad \eta \text{ は定数}$$

によって定義する．通常 x_t は random な信号，dw_t は

white noise, y_t は観測過程と呼ばれる．すなわち，信号 x_t は雑音 w_t によって擾動されて受信されるのである．
さて $f(x_t)$ の観測データ $\{y_s, s\le t\}$ による filtering を $\sigma\{y_s, s\le t\}$ 可測な L^2-函数による最良近似，すなわち条件付平均値 $E[f(x_t)|\sigma\{y_s, s\le t\}]$ で定義しよう．

以下では，(x_t, w_t) の定義されている空間 Ω は函数空間 $C([0,\infty)\to S)\times C([0,\infty)\to R^N)$，$\mathcal{O}_t$ は cylinder set から生成される σ-field とする．又次の記号を使う．

$$\mathcal{F}_t=\sigma\{y_s,\ s\le t\},\quad \pi_t(f)=E[f(x_t)|\mathcal{F}_t].$$

注意 1　(x_t) と (w_t) が独立であることから，(x_t, w_t) 及び $z_t=(x_t, y_t)$ は強マルコフ過程である．z_t の初期分布を特に強調するときは，P を P^ν で表わす．ただし $\nu(E)=P(z_0\in E)$．

注意 2．Filtering の同時分布は一意である．すなわち別の空間 $(\Omega', \mathcal{O}', P')$ 上に (x_t) と同じ法則をもつ (x_t') と，それに独立なブラウン運動 (w_t') が与えられているとき，この (x_t') と (w_t') を使って (1) により新しい y_t' を定義すれば，その filtering (π_t') は (π_t) と同じ法則をもつ．このことはほとんど自明だが，次節の filtering のマルコフ性の証明のときに大切である．

定理1.

i) $\nu_t \equiv y_t - \int_0^t \pi_s(h)\,ds$ は $(\mathcal{F}_t, P)$-ブラウン運動である.
ただし $\pi_s(h) = (\pi_s(h^1), \cdots, \pi_s(h^N))$.

ii) X_t が可分かつ二乗可積分な $(\mathcal{F}_t, P)$-martingale ならば
それは連続かつ次の表現をもつ.

(2) $$X_t - X_0 = \int_0^t (\Phi_s, d\nu_s) \equiv \sum_{j=1}^N \int_0^t \Phi_s^j \, d\nu_s^j.$$

ただし, $\Phi_s = (\Phi_s^1, \cdots, \Phi_s^N)$ は両可測かつ $\mathcal{F}_s$-可測な $L^2([0,t]\times P)$
-函数.

iii) π_t は次の確率微分方程式をみたす.

(3) $$\pi_t(f) - \pi_0(f) = \int_0^t \pi_s(Af)\,ds + \int_0^t (\pi_s(fh) - \pi_s(f)\pi_s(h), d\nu_s)$$

ただし A は (x_t) の生成作用素である.

証明は省略する.([4] を参照)

§2. Filtering process のマルコフ性.

$\mathcal{M}(S)$ を S 上の確率分布の全体とすれば, π_t は $\mathcal{M}(S)$ 上の値をとる確率過程とみなせる.

定理2. $(\pi_t, \mathcal{F}_t, P)$ は強マルコフ過程である.

証明には regular conditional distribution が必要なのでその定義を Stroock-Varadhan [5] にしたがって述べよう. σ を $(\mathcal{F}_t)$-Markov time, $\mathcal{F}_\sigma = \{A \in \mathcal{C} ; A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}$ とする.

定義. $Q_\omega(A)$; $\Omega \times \mathcal{C} \to R^1$ が次の4つの条件をみたすとき regular conditional distribution と言う.

i) $\forall A \in \mathcal{C}$ に対し $Q_\omega(A)$ は $\mathcal{F}_\sigma$-可測

ii) $\forall \omega$ に対し $Q_\omega(A)$ は $(\Omega, \mathcal{C})$ 上の確率測度

iii) $\exists N \in \mathcal{F}_\sigma$ $P(N) = 0$ で $\forall \omega \notin N$ で

$$Q_\omega(\{y_t = y_t(\omega),\ 0 \le t \le \sigma\}) = 1$$

iv) $\forall A \in \mathcal{C}$ と $\forall B \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し

$$P(A \cap B) = \int_B Q_\omega(A) P(d\omega)$$

regular conditional distribution は存在し, a.e. ω で一意である 以下次の記号を使う.

$$\tilde{x}_t = x_{t+\sigma}, \quad \tilde{w}_t = w_{t+\sigma(\omega)}\, w_t, \quad \tilde{y}_t = y_{t+\sigma(\omega)}, \quad \tilde{z}_t = (\tilde{x}_t, \tilde{y}_t)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_t = \mathcal{C}_{t+\sigma}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+\sigma}, \quad \tilde{\pi}_t = \pi_{t+\sigma}$$

Lemma 1. a.e. ω に対し

i) $(\tilde{x}_t)$ と $(\tilde{w}_t)$ は Q_ω に関し独立である

ii) $(\tilde{z}_t, \tilde{\mathcal{O}}_t, Q_w)$ は初期分布 $(\delta_{y_\sigma(w)}, \pi_{\sigma(w)})$ をもつ $(z_t, \mathcal{O}_t, P)$ と同じ推移確率をもつマルコフ過程である。

証明 i). $\mathcal{B}_1 = \sigma\{\tilde{x}_s, s \geq 0\}$, $\mathcal{B}_2 = \sigma\{\tilde{w}_s, s \geq 0\}$ とおく。$\forall A \in \mathcal{B}_1$, $\forall B \in \mathcal{B}_2$ が Q_w に関し独立，すなわち

(4) $$P[A \cap B \mid \mathcal{F}_\sigma] = P(A \mid \mathcal{F}_\sigma) P(B \mid \mathcal{F}_\sigma) \quad \text{a.s.}$$

が言えればよい。ところが (4) は

(5) $$P[B \mid \mathcal{F}_\sigma] = P[B \mid \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{B}_1] \quad \text{a.s.} \quad \forall B \in \mathcal{B}_2$$

と同値である (Meyer [6] p30)。一方 (x_t) と (w_t) の P-独立性から (5) の両辺共に $P(B)$ に等しい。ゆえに i) が言えた。

ii) の証明。初期分布は

(6) $$E_w[f(x_0)g(y_0)] = E[f(x_\sigma)g(y_\sigma) \mid \mathcal{F}_\sigma] = g(y_\sigma)\pi_\sigma(f)(w) \quad \text{a.s.}$$

から明らか。(z_t, P) の半群を T_t とする。$\mathcal{O}_\sigma \supset \mathcal{F}_\sigma$ に注意して，$(z_t, \mathcal{O}_t, P)$ の強Markov性を使えば，$A \in \mathcal{O}_{t+\sigma}$ に対し

(7) $$E_w[f(\tilde{z}_{t+s}) : A] = E_w[E[f(z_{\sigma+t+s}) \mid \mathcal{O}_{t+\sigma}] ; A]$$
$$= E_w[T_s f(\tilde{z}_t) ; A] \qquad \text{Q.E.D.}$$

Lemma 2. a.s. ω で $\tilde{\pi}_t$ は $(\tilde{x}_t, \tilde{w}_t, \tilde{y}_t, Q_\omega)$ の filtering である. すなわち a.s. ω で $(\tilde{\pi}_t, Q_\omega)$ の法則は, $(x_t, w_t, y_t, P^{(\delta_{y_\sigma(\omega)}, \pi_\sigma(\omega))})$ の filtering の法則と一致する.

証明. $(\tilde{x}_t)$ と $(\tilde{w}_t)$ は Q_ω−独立であり, $\tilde{y}_t$ は $(\tilde{x}_t, \tilde{w}_t, Q_\omega)$ の観測過程である. したがって, $\tilde{\pi}_t$ がこれに対する filtering であること, すなわち

$$(8) \qquad \tilde{\pi}_t(f)(\omega') = E^\omega[f(\tilde{x}_t) \mid \sigma\{\tilde{y}_s, s \le t\}](\omega') \qquad \text{a.s. } \omega'$$

を証明すればよい. $A \in \sigma\{\tilde{y}_s ; s \le t\}$, $B \in \mathcal{F}_\sigma$ とすると, 上式の右辺の P による平均は

$$(9) \qquad E[E^\omega[f(x_{t+\sigma}) \mid \sigma\{y_{s+\sigma} ; s \le t\}] : A \cap B]$$

$$= E[E^\omega[E^\omega[f(x_{t+\sigma}) \mid \sigma\{y_{r+\sigma} : r \le t\}] : A] : B]$$

$$= E[E^\omega[f(x_{t+\sigma}) : A] : B] = E[f(x_{t+\sigma}) : A \cap B].$$

上式から (8) を得る.

定理 2 の証明. Lemma 2 より

$$E[F(\pi_{t+\sigma}(f_1), \cdots, \pi_{t+\sigma}(f_n)) \mid \mathcal{F}_\sigma] = E^\omega[F(\tilde{\pi}_t(f_1), \cdots, \tilde{\pi}_t(f_n))]$$

$$= E^{(\delta_{y_\sigma}, \pi_\sigma)}[F(\pi_t(f_1), \cdots, \pi_t(f_n))]$$

一方 Filtering は, 観測過程の初期値に関係しないから, 上

式の最後の項は π_t のみの函数である．これで強 Markov 性が証明された．

次の $(\pi_t, \mathcal{F}_t, P)$ の生成作用素の形を求めよう．π_t の半群を $\widetilde{T}_t$ で表わす．

定義．$C(\mathcal{M}(S)\to R^1)$ のある linear subspace $\mathcal{D}(\widehat{A})$ を $C(\mathcal{M}(S)\to R^1)$ に移す線形作用素 $\widehat{A}$ が $\widetilde{T}_tF-F=\int_0^t \widetilde{T}_s\widehat{A}F\,ds$ $(\forall t)$ をみたすとき，$\widehat{A}$ を $\widetilde{T}_t$ の生成作用素，$\mathcal{D}(\widehat{A})$ をその定義域という．

定義．$F\in C(\mathcal{M}(S)\to R^1)$ が，各 $\nu\in\mathcal{M}(S)$ に対して，$\exists F_\nu'\in C(S)$ および線形作用素 $F_\nu'';\ C(S)^*\longrightarrow C(S)$ が存在して

(16) $$F(\nu+\varepsilon)-F(\nu)=\langle F_\nu',\varepsilon\rangle+\frac{1}{2}\langle F_\nu''\varepsilon,\varepsilon\rangle+o(\|\varepsilon\|^2)$$

をみたすとき，F は C^2-class であると呼ぶ．（$*$ は dual space，$\|\ \|$ は total variation の norm）以下では，F_ν' および F_ν'' の ν に関する弱連続性および，ノルムの ν に関する有界性を仮定する．

Lemma 3. F は C^2-class とする．もし各 ν で $F_\nu'\in\mathcal{D}(A)$ かつ AF_ν' が ν に関し弱連続ならば，次の公式が成立する．ただし $\pi_t^{h_i}$ は $\pi_t^{h_i}(f)=\pi_t(h_i f)$ で定義される測度である．

$$(11)\qquad F(\pi_t)-F(\pi_0)=\int_0^t \pi_s(AF'_{\pi_s})\,ds+\int_0^t(\pi_s(F'_{\pi_s}h)-\pi_s(h)\pi_s(F'_{\pi_s}),\,d\nu_s)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\langle F''_{\pi_s}(\pi_s^{h_i}-\pi_s(h_i)\pi_s),\ \pi_s^{h_i}-\pi_s(h_i)\pi_s\rangle\,ds$$

証明はItoの公式の証明と同じ方針で計算すればよい．
(11)をPで積分すれば次の結果を得る．

定理3．Fがlemma 3の条件をみたす函数とすれば，$F\in\mathcal{D}(\tilde{A})$かつ

$$(12)\qquad \tilde{A}F(\nu)=\langle AF'_\nu,\nu\rangle+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\langle F''_\nu(\nu^{h_i}-\nu(h_i)\nu),\ \nu^{h_i}-\nu(h_i)\nu\rangle.$$

例1．$F(\nu)\equiv\langle f,\nu\rangle\equiv\nu(f)$のとき$F'_\nu=f$，$F''_\nu=0$．ゆえに$f\in\mathcal{D}(A)$なら$F\in\mathcal{D}(\tilde{A})$かつ$\tilde{A}F(\nu)=\nu(Af)$である．特に$Af=0$のとき$F(\nu)=\nu(f)$は$\tilde{A}F=0$をみたす．ゆえに

$$(13)\qquad \{F(\nu)\equiv\nu(f):\ f\in\mathcal{D}(A)\text{ かつ }Af=0\}\subset\{F\in\mathcal{D}(\tilde{A}):\ \tilde{A}F=0\}.$$

次節で述べる様に，(13)で等号が成立することと，漸近的安定性とは密接な関係がある．

§5 Filtering processの漸近的安定性

定義．S上のすべての連続函数fに対して

(14) $$\lim_{t\to\infty} E|f(x_t)-\pi_t(f)|^2 = 0$$

をみたすとき π_t は漸近的に安定であると呼ぶ.

定理 4. π_t が漸近的に安定であれば (13) において等号が成立する. $\exists x_\infty(\omega)=\lim_{t\to\infty} x_t(\omega)$ a.s. P かつ (13) で等号が成立すれば漸近的に安定である.

証明. 漸近的安定性を仮定する. $F\in\mathcal{D}(\bar{A})$ が $\bar{A}F=0$ をみたせば $\bar{T}_tF=F$ だから

$$F(\nu)= E^\nu(F(\pi_t)) = E^\nu(\lim_{t\to\infty} F(\pi_t)) = E^\nu(\lim_{t\to\infty} F(\delta_{x_t}))$$
$$= \int \nu(dx) E^x[\lim_{t\to\infty} F(\delta_{x_t})]$$

一方 $f(x)=E^x[\lim_{t\to\infty} F(\delta_{x_t})]$ とおくと $f(x)$ は T_t-不変 かつ $F(\nu)=\nu(f)$ がなりたつ. ゆえに定理の前半が証明された. 次に (13) で等号を仮定すると

(15) $$\lim_{t\to\infty} E^\nu[|\pi_t(f)-f(x_t)|^2] = \lim_{t\to\infty}\{-E^\nu[\pi_t(f)^2]+E^\nu[f(x_t)^2]\}$$
$$= -E^\nu[\pi_\infty(f)^2] + E^\nu[f(x_\infty)^2]$$

一方

$E^\nu[\pi_\infty(f)^2]$ = the least $\bar{T}_t$-invariant majorant of $\nu(f)^2$

$E^\nu[f(x_\infty)^2]$ = the least T_t-invariant majorant of $\nu(f)^2$

仮定より両者の右辺は一致するから(15)は0となる．証明終．

注意．上の定理でx_∞の存在を仮定することは，本質的にはprocessがtransientであることを仮定しているのである．実際

$$\Delta=\{x;\ T_t f(x)=f(x),\ \forall t>0,\ \forall f\in C(S)\}\quad (\text{traps の全体})$$

とおくと，ΔはSの閉部分集合であり，x_∞はa.s.にΔに集中していることがわかる．したがってΔは$S-\Delta$の境界とみてよいであろう．次の定理は上の条件の下ではほとんどの場合，漸近的安定性が成立することを示している．

定理5．x_∞の存在を仮定する．

(i) hがΔの二点を分離する(即ち$h|_\Delta$が1-1)ならば，π_tは漸近的に安定である．

(ii) 任意の初期分布をもつx_tに対しπ_tが漸近的に安定ならば，hはΔの二点を分離する．

証明は[4]にあるので省略する．

文献

[1]. A. N. Shiryaev : Stochastic equations of non linear filtering of Markovian jump process. Problemi Peredachi Informatsii 3 3–22. (1966)

[2] R.S. Liptzer and Shiryaev (1968): Non linear filtering of Markov diffusion processes. Trudy M.I.A.N. 135-180.

[3] G. Kallianpur, G. and C. Striebel (1969): Stochastic differential equations in stochastic estimation problems. Multivariate Analysis, 2, Academic Press

[4]. M. Fujisaki and H. Kunita : Non linear filtering problems in time-continuous stochastic processes, Preprint

[5] D. Stroock and R. Varadhan (1969), Diffusion processes with continuous coefficients, I, II. Comm. Pure. Appl. Math, 22, 345-400, 477-530.

[6] P A. Meyer (1966) : Probability and Potentials: Blaisdell Publ.