数理解析研究所講究録
112巻 1971年 134-162

境界条件をもった確率微分方程式

京大理　　渡辺信三

§1. 序

1次元の拡散過程については，Feller 及び Ito-McKean の研究によってほゞ完全なことがわかっている([6])。一方多次元の拡散過程に関しても多くの研究がなされているが1次元のときのような完全な結果をうることは困難である。今日では多次元拡散過程の研究は色々な立場から(それぞれやゝ異なった問題意識のもとに)多面的になされている。

多次元拡散過程の研究において基本的なものは，まず"一般の多次元拡散過程はどれだけあり，それを特徴づける量は何か"という問題 及び"それらの量をあたえたとき多次元拡散過程が実際に存在することを示しその性質を研究すること"である。前者については，Kolmogorov，Feller らの研究と Wentzell [16] の研究により，大ざっぱにいって，適当な正則条件の

もとで，境界をもつ n 次元$\overbrace{\text{多様体}}^{\overline{D}=D\cup\partial D}$上の拡散過程は次にのべる (A, L, ρ) で決定されることがわかっている。ここで A は $\overline{D}$ 上の2階楕円型（degenerate するかもしれない）微分作用素；すなわち manifold $\overline{D}$ の local coordinate を座標近傍 U で

$$x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)\in D\cap U \iff x^1>0$$

$$x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)\in \partial D\cap U \iff x^1=0$$

なるようにえらぶとき，

$$Au(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+c(x)u, \quad x\in\overline{D}$$

とあらわされるもの，（但し $a^{ij}(x)$; non-negative definite, $c(x)\leq 0$）

L は $\overline{D}$ で定義された(滑らかな)函数を ∂D で定義された函数にうつす作用素で

$$Lu(x)=\sum_{i,j=2}^{n}\alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=2}^{n}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+\gamma(x)\cdot u+\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}$$
$$+\int_{\overline{D}\setminus\{x\}}\Big[u(y)-u(x)-I_U(y)\cdot\sum_{i=2}^{n}(y^i-x^i)\frac{\partial u}{\partial x^i}(x)\Big]n_x(dy), \quad x\in\partial D$$

とあらわされるもの（$\alpha^{ij}(x)$; non-negative definite, $\gamma(x)\leq 0$, $\mu(x)\geq 0$）

又，ρ は境界上で定義された non-negative な函数；$\rho(x)\geq 0$, $x\in\partial D$,

(A, L, ρ) できまるという意味は拡散過程(に対応する半群)の生成作用素が differential operator A with domain

$$\mathcal{D}(A)=\{u\in C^2(\overline{D});\quad Lu=\rho\cdot Au \text{ on } \partial D\}$$

の extension になっているということである。条件 $Lu=\rho\cdot Au$

をWentzellの境界条件という。そこで後者の問題は(A, L, ρ)をあたえたときその生成作用素が上の$A, \mathcal{D}(A)$の拡張になっているような拡散過程が一意的に存在するかということになる。この問題はSato-Ueno [10]によってその解決の基本的な筋道があたえられ，いくつかの場合に具体的に拡散過程が構成せられた。さらにBony-Courrège-Priouret [1]は，種々の解析の結果を援用することにより(Schauder estimate, compact perturbationの理論)，かなり一般的な(A, L, ρ)のクラスに対しSato-Uenoの理論が実際に適用可能で，したがって拡散過程が構成できることを示した。(Sato-Uenoの理論については[9]によくまとめられている。)

一方このような拡散過程の構成において「確率論的方法」が知られており，その代表的なものに伊藤清の確率微分方程式の理論([3])，DynkinやIto-McKeanなどによる確率過程の変換理論がある。これは，まず半群を構成しそれからMarkov過程を構成するというわゆる解析的方法と異なり，Wiener測度やPoisson測度などのよく知られた(函数空間上の)測度から出発してそれに種々の変換を加えて求める拡散過程の軌跡の測度(分布)を得ようというものである。伊藤の理論においては(本質的には同じことであるが)軌跡の測度を求めるというより軌跡(= path)そのものを作るというニュアンスが強い。最近のStroock Varadhan [12] [13]はpath - spaceの測度を求めるという立場のより強い問

題の定式化を行なった、その定式化にしたがうと今の(A, L, ρ)に対応する拡散過程を求める問題は次のようになる；

$\mathbb{D}_{\bar D}[0,\infty) =$ {: $[0,\infty)$ 上で定義され $\bar D\cup\{\Delta\}$ の値をとる右連続かつ左極限をもつ函数の w の全体} とする,

「$\mathbb{D}_{\bar D}[0,\infty)$ 上の確率測度の系 $\{P_x\}_{x\in\bar D}$ で

$P_x\{w : w(0)=x\} = 1$ かつ 任意の $f\in C^2(\bar D)$ に対し

($f(\Delta)=0$ として $\bar D\cup\{\Delta\}$ へ拡張し)

$$f(w(t)) - f(w(0)) = \text{a martingale} + \int_0^t I_D(w(s))Af(w(s))ds + \int_0^t Lf(w(s))d\varphi_s$$

と分解されるようなものを求めその一意性を示すこと, 但し

φ_t は P_x-a.s. に t の連続, 非減少函数で

$$\int_0^t I_{\partial D}(w(s))d\varphi_s = \varphi_t, \qquad \int_0^t I_{\partial D}(w(s))ds = \int_0^t \rho(w(s))d\varphi_s$$

となるもの.」

この Strook - Varadhan の formulation は一般的である場合に便利なことが多い、しかし伊藤による確率微分方程式による定式化がもし可能ならば,この方が多くの点で優れていることは十分認めうることである、事実伊藤の formulation にみられた path のよりデリケートな分析が Strook - Varadhan の formulation では消えてしまっている（もちろん一般論よりそのギャップをうめることはそう困難ではないが）、そこで我々は,より伊藤に近い立場でこの構成を確率微分方程式を用いて論じたい。この立場の研究には Ikeda [2] があり、2次元における Wentzell の境界条

件をみたす拡散過程の構成が確率微分方程式を用いてなされている。ただ残念なことにこの Ikeda の優れた研究は $n \geq 3$ 次元に拡張できないので，ここでは Ikeda の idea にいくつかの別の idea（そのうちの一つの重要なものは，Skorohod [11] による反射壁拡散過程の確率微分方程式の考え方）をつけ加えて一般次元の拡散過程の構成を論じたい。

尚，我々が以下であつかうのは上の (A, L, ρ) で $c(x) \equiv 0$，$\gamma(x) \equiv 0$，$n_x(dy) \equiv 0$，$\mu(x) > 0$ の場合，すなわち完全に jump がなく（killing も Δ への jump と考えられる），いたるところで反射のある場合である。境界から境界への jump も同様にあつかえるが記号が面倒になるので論じない。又 Strook－Varadhan [13] ではこの仮定以外にさらに $\alpha^{ij}(x) \equiv 0$ として（上の彼等の定式化にしたがって）この問題を論じている。彼等の場合は係数の正則性の条件が非常によわめられているのが重要なポイントの一つであるが，他方 a^{ij} が degenerate してよいという点では以下の我々の仮定の方がずっとよわめられていることを注意しておきたい。

§2 確率微分方程式による定式化。

確率微分方程式の理論においてよく知られている様に，manifold 上での diffusion の path を構成するには，local に

各座標近傍において path を構成しそれをつないでいけばよい，（例えば McKean [8] 参照）、座標近傍が全く内部にあるときは通常の伊藤の理論で間に合うので結局境界の近傍での path の構成が問題である、したがって我々は始めから n 次元空間の上半空間 $R^n_+ = \{x=(x^1, x^2, \dots, x^n) ; x^1>0\}$ を考えこれを D とする、したがって $\bar{D} = \{x=(x^1, \dots, x^n) ; x^1 \geq 0\}$,

$\partial\bar{D} = \{x=(0, x_2, \dots, x_n)\}$ $(0, x_2, \dots, x_n)$ と $(x_2, \dots, x_n)$ とを同一視することがしばしばある、又 $x=(x^1, x^2, \dots, x^n)$ に対し $\tilde{x} = (x^2, x^3, \dots, x^n)$ の記号を用いる；$x = (x^1, \tilde{x})$.

次の $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ があたえられたとする，

(i) $\sigma = (\sigma^i_k)^n_{i,k=1} : \bar{D} \longrightarrow R^n \otimes R^n$ (= $n \times n$ - real matrix の全体)

有界かつ Borel measurable

$b = (b^i)^n_{i=1} ; \bar{D} \longrightarrow R^n$

有界かつ Borel measurable

(ii) $\tau = (\tau^i_k)^n_{i,k=2} : \partial D \longrightarrow R^{n-1} \otimes R^{n-1}$

有界かつ Borel measurable

$\beta = (\beta^i)^n_{i=2} ; \partial D \longrightarrow R^{n-1}$

有界かつ Borel measurable

(iii) ρ ; $\partial D \longrightarrow [0, \infty)$

有界かつ Borel-measurable

（正規化して $\mu(\tilde{x}) \equiv 1$ としてよい，そのように定義を与える）

まず $\rho\equiv 0$ (non-sticky case) の確率微分方程式を次のように与える;

$$
(1)\quad \begin{cases} dx_t^1 = \sigma^1(x_t)dB_t + b^1(x_t)dt + \varphi_t \\ dx_t^i = \sigma^i(x_t)dB_t + b^i(x_t)dt + \tau^i(\tilde{x}_t)dM_t + \beta^i(\tilde{x}_t)d\varphi_t, \\ \qquad\qquad i=2,3,\dots,n, \end{cases}
$$

ここで $x_t=(x_t^1,x_t^2,\dots,x_t^n)$, $\tilde{x}_t=(x_t^2,\dots,x_t^n)$ ($\sim(0,x_t^2,x_t^3,\dots,x_t^n)$ と同一視する), $B_t=(B_t^1,B_t^2,\dots,B_t^n)$, $M_t=(M_t^2,M_t^3,\dots,M_t^n)$.

又 $\sigma^i(x_t)dB_t=\sum_{k=1}^n\sigma_k^i(x_t)dB_t^k$, $\tau^i(\tilde{x}_t)dM_t=\sum_{k=2}^n\tau_k^i(\tilde{x}_t)dM_t^k$

$i=1,2,\dots,n$ とする。

(1) の直観的意味は次のとおりである; φ_t は x_t の $\partial D=\{x^1=0\}$ における local time で (すなわち $x_t\in\partial D$ のときにのみ増加する continuous process) これが x_t の ∂D での反射をひきおこす。B_t は n-次元 Brown 運動, M_t は $x_t\in\partial D$ のときにのみ変化する境界上の $(n-1)$ 次元 Brown 運動であるがその時間は local time φ_t によって計っている。$\tau^i(\tilde{x}_t)dM_t+\beta^i(\tilde{x}_t)d\varphi_t$ が境界上の random motion を与える。

さて (1) の明確な定義をあたえよう。以下で $(\Omega,\mathcal{F},P;\mathcal{F}_t)$ とかくのは次のような四つ組のことである;

(i) $(\Omega,\mathcal{F},P)$ はある確率空間,

(ii) $\mathcal{F}_t$ は $\mathcal{F}$ の sub σ-fields の系で $(t\in[0,\infty))$, 右連続かつ increasing, i.e., $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$ $(t<s)$ かつ $\mathcal{F}_{t+0}\equiv\bigcap_{n=1}^\infty\mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$ が $\mathcal{F}_t$ と $(\forall t\geq 0)$ で一致する。

<u>Definition 1</u>　確率微分方程式 (1) の solution（又は $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対応する solution）とは，ある $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上で与えられた stochastic processes の family $\mathfrak{X} = (x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n),\ B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n),\ M_t = (M_t^2, \dots, M_t^n),\ \varphi_t)$ であって次の性質をもつもののことである，

(i) P-a.s. に，

x_t, B_t, M_t, φ_t, は continuous in $t \in [0, \infty)$

$B_0 = M_0 = \varphi_0 = 0$

かつこれらはすべて $\mathcal{F}_t$ に adapted（i.e. 各 t に対し $\mathcal{F}_t$-可測）

(ii) P-a.s. に，

$x_t \in \bar{D}$,　φ_t は non-decreasing かつ increases only when $x_t \in \partial \bar{D}$,　i.e., $\int_0^t I_{\partial D}(x_t) d\varphi_s = \varphi_t$,

(iii) (B_t, M_t) ; a system of $\mathcal{F}_t$-martingales such that

$\langle B_t^i, B_t^j \rangle = \delta_{ij} t$,　$\langle B_t^i, M_t^j \rangle = 0$,　$\langle M_t^i, M_t^j \rangle = \delta_{ij} \cdot \varphi_t$

（ここで一般に $\mathcal{F}_t$-martingales X, Y に対し $\langle X, Y \rangle$ は $X_t \cdot Y_t$ を martingale + process of bounded variation と Meyer 分割したときの process of bounded variation の部分をあらわす．くわしくは Kunita-Watanabe [7] を見よ）

(iv) P-a.s. に

$$(1)' \quad \begin{cases} x_t^1 = x_0^1 + \int_0^t \sigma^1(x_s) dB_s + \int_0^t b^1(x_s) ds + \varphi_t \\ x_t^i = x_0^i + \int_0^t \sigma^i(x_s) dB_s + \int_0^t b^i(x_s) ds + \int_0^t \tau^i(\tilde{x}_s) dM_s + \int_0^t \beta^i(\tilde{x}_s) d\varphi_s \\ \qquad i = 2, 3, \dots, n , \end{cases}$$

がなりたつ, ここで $\tilde{x}_t=(x_t^2,\dots,x_t^n)$ かつ $\int dB$, $\int dM$ は martingale に関する stochastic integral (Itô の stochastic integral の一般の martingale への拡張については [7] を見よ) である.

注意.1. 上の(iii)より, $(B_t, \mathcal{F}_t)$ は n 次元 Brown 運動 ($\mathcal{F}_t$ をかいたのは, $B_t - B_s$ と $\mathcal{F}_s$ が independent であることを強調するため, $t>s$) である. 又 $M_{\varphi_t^{-1}}$ も $(n-1)$ 次元 Brown 運動である. (例えば [7] を見よ.)

次に一般に ρ が 0 でない場合 (sticky case) の確率微分方程式を考えよう. これを次のように与える;

$$
(2)\quad \begin{cases}
dx_t^1 = \sigma^1(x_t)I_D(x_t)dB_t + b^1(x_t)I_D(x_t)dt + \varphi_t \\
dx_t^i = \sigma^i(x_t)I_D(x_t)dB_t + b^i(x_t)I_D(x_t)dt + \tau^i(\tilde{x}_t)dM_t \\
\qquad\qquad + \beta^i(\tilde{x}_t)d\varphi_t, \\
\qquad\qquad i=2,3,\dots,n, \\
I_{\partial D}(\tilde{x}_t)dt = \rho(\tilde{x}_t)d\varphi_t
\end{cases}
$$

<u>Definition 2</u> 確率微分方程式(2)の solution (又は $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ に対応する solution) とは, ある $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上で与えられた stochastic processes の family $\mathcal{X}=(x_t=(x_t^1,\dots,x_t^n),\ B_t=(B_t^1,\dots,B_t^n),\ M_t=(M_t^2,\dots,M_t^n),\ \varphi_t)$ であって次の性質をもつもののことである.

(i)
(ii)
(iii)
} Def. 1 と同じ

(iv) P-a.s. に,

$$
(2)' \begin{cases}
x_t^1 = x_0^1 + \int_0^t \sigma^1(x_s) I_D(x_s)\, dB_s + \int_0^t b^1(x_s) I_D(x_s)\, ds + \varphi_t \\
x_t^i = x_0^i + \int_0^t \sigma^i(x_s) I_D(x_s)\, dB_s + \int_0^t b^i(x_s) I_D(x_s)\, ds + \int_0^t \tau^i(\tilde{x}_s)\, dM_s \\
\qquad\qquad + \int_0^t \beta^i(\tilde{x}_s)\, d\varphi_s, \\
\qquad\qquad i = 2, 3, \ldots, n \\
\int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s)\, ds = \int_0^t \rho(\tilde{x}_s)\, d\varphi_s
\end{cases}
$$

注意 2. Def. 2 で $\rho \equiv 0$ としたとき (2) の始めの 2 式において $I_D(x_t)$ をはぶいてよいから (1) と同じ方程式を与える. しかし付帯条件 $\int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s)\, ds = 0$ がつくので (1) と同値にはならない. すなわち (1) は (2) で $\rho \equiv 0$ とした特別な場合と考えることは出来ない. その為 (1) と (2) を区別して定義したのである. 結果的には (1) の場合には必ず $\int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s)\, ds = 0$ となり (2) の特別な場合になる.

注意 3 (1) のとき, $\forall f \in C^2(\bar{D})$ に対し確率積分の公式 (Ito の公式の一般化, [7] を参照) を用いると,

$$
f(x_t) - f(x_0) = \text{a martingale} + \int_0^t Af(x_s)\, ds + \int_0^t Lf(\tilde{x}_s)\, d\varphi_s
$$

ここで

$$Af(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$\left(a^{ij}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^i_k \sigma^j_k \right)$$

$$Lf(\tilde{x}) = \sum_{i,j=2}^{n} \alpha^{ij}(\tilde{x})\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=2}^{n} \beta^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

したがって x_t の path space 上の分布は，上の Strook-Varadhan の問題の解になっている。

(2) のときは，

$$\begin{aligned} f(x_t) - f(x_0) &= \text{a martingale} + \int_0^t Af(x_s) I_D(x_s)\,ds + \int_0^t Lf(\tilde{x}_s)\,d\varphi_s \\ &= \text{a martingale} + \int_0^t Af(x_s)\,ds + \int_0^t Lf(\tilde{x}_s)\,d\varphi_s - \int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s) Af(x_s)\,ds \\ &= \text{a martingale} + \int_0^t Af(x_s)\,ds + \int_0^t \big(Lf(\tilde{x}_s) - (P\cdot Af)(\tilde{x}_s)\big)\,d\varphi_s \end{aligned}$$

となる。

次に上で定義された解の"一意性"の概念を定義しよう。通常の"path ごとの一意性"を定義することは難かしく又あまり必要もないと思われるのでここでは普通の"分布の意味の一意性"を定義する。

Definition 3 (Uniqueness) (1) 又は (2) に対して uniqueness がなりたつというのは，任意の2つの solutions $\mathcal{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$, $\mathcal{X}' = (x'_t, B'_t, M'_t, \varphi'_t)$ (異なる確率空間上で定義されていてよ

ii) で，ある $x\in\bar{D}$ に対し　$x_0=x$ a.s.　$x_0'=x$ a.s とするものに対し，x_t と x_t' の $W,\mathcal{B}(W)$ 上の分布が等しいこと，ここで $\bar{W}=C_{\bar{D}}[0,\infty)$; $\bar{D}$ の値をとる $[0,\infty)$ 上の連続函数の全体に compact uniform topology を与えた Fréchet space. $\mathcal{B}(\bar{W})$ はその topological Borel field.

<u>Proposition 1</u>. (1) (又は (21)) に対して任意の $\bar{D}$ 上の分布 μ に対し $P(x_0\in dx)=\mu(dx)$ となる solution が存在すると仮定する．又 Def. 3 の意味で solution の uniqueness がなりたつと仮定する．このとき，$\mu=\delta_x$ としたときの x_t の分布を P_x とかくと，

① $x \rightsquigarrow P_x(B)$, $(\forall B\in\mathcal{B}(W))$ は universally measurable

② $\{P_x\}$ は strong Markov

である．特に μ に対応する x_t の分布 Q は unique にきまり $Q(B)=\int_{\bar{D}}\mu(dx)P_x(B)$, $\forall B\in\mathcal{B}(W)$ で与えられる．

証明は，大筋において通常の確率微分方程式の場合（例えば [12]）と同様である；

今 $\mathfrak{X}$ を $(\Omega,\mathcal{F},P:\mathcal{F}_t)$ 上の solution とする．一般性を失うことなく $(\Omega,\mathcal{F})$ はいわゆる standard space（[5]）であるとしてよい．σ を $\mathcal{F}_t$ - stopping time, $\mathcal{F}_\sigma$ をいつものように定義し

$P_{\omega'}(\ ) \equiv P(\ \mid \mathcal{F}_\sigma)$ を $\mathcal{F}_\sigma$ を与えたときの regular conditional distribution とする．次に $\tilde{x}_t = x_{t+\sigma}$, $\tilde{B}_t = B_{t+\sigma} - B_\sigma$, $\tilde{M}_t = M_{t+\sigma} - M_\sigma$, $\tilde{\varphi}_t = \varphi_{t+\sigma} - \varphi_\sigma$, $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+\sigma}$ とおく．このとき a.a. ω' (P) に対し $P_{\omega'}(\tilde{x}_0(\omega) = x_\sigma(\omega')) = 1$ であり，又 $\tilde{\mathfrak{X}} = (\tilde{x}_t, \tilde{B}_t, \tilde{M}_t, \tilde{\varphi}_t)$ は solution on $(\Omega, \mathcal{F}, P_{\omega'}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ である．このことは regular conditional distribution の定義と Doob の optional sampling theorem (martingale の time change の理論) より容易に確めうることである．そうすると

$$P_{\omega'}(\tilde{x}_\cdot \in B) = P_{x_\sigma(\omega')}(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(W), \quad \text{a.a. } \omega' (P).$$

これは $\{P_x\}$ の強マルコフ性を意味する．

この Proposition により，任意の初期分布に対する (1) 又は (2) の解が構成できしかもその uniqueness を示すことができれば，$\bar{D}$ 上の (A, L, ρ) に対応する拡散過程が得られたことになる．

§3 存在と一意性

$[\sigma, b, \tau, \beta]$ に次の仮定をおく

<u>Assumption</u>. σ, b, τ, β は有界かつ Lipschitz 連続，かつ $|\sigma^1(x)| = \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^1(x)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \exists c > 0$ ．ρ は有界 Borel 可測．

このとき次の定理を示すことができる．

<u>Theorem</u>. $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ はこの assumption をみたすとする。このとき確率微分方程式 (1) 及び (2) は任意の $\bar{D}$ 上の Borel probability measure (これを単に $\bar{D}$ 上の分布と呼ぶ) μ に対し $P(x_0 \in dx) = \mu(dx)$ となる solution をもつ。又 Def. 3 の意味の uniqueness がなりたつ、

以下でこれを、次の順序で証明する

(1°) 方程式 (1) で $\sigma^1_1(x) \equiv 1$, $\sigma^1_k(x) \equiv 0$, $k = 2, 3, \ldots, n$, $b^1(x) \equiv 0$ のとき

(2°) 方程式 (1) の一般の場合.

(3°) 方程式 (2) の場合

(1°) 方程式 (1) において $\sigma^1_1(x) \equiv 1$, $\sigma^1_k(x) \equiv 0$, $k = 2, 3, \ldots, n$, $b^1(x) \equiv 0$ の場合、

まず存在について、

μ を $\bar{D}$ 上の任意の分布とし ある probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に $\{x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$, $B_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^n)$, $\hat{B}_t = (\hat{B}_t^2, \hat{B}_t^3, \ldots, \hat{B}_t^n)\}$ を次のように与える

1) x_0 は $\bar{D}$ の値をとる random variable でその分布は μ,

2) B_t は n-dimensional Brownian motion,

3) $\hat{B}_t$ は $(n-1)$-dimensional Brownian motion,

4) これらはすべて互いに独立,

次に φ_t, x_t^1 を次のように定義する；

(1.1) $$\varphi_t = \begin{cases} 0 & , t \le \sigma_0 \equiv \inf\{t ; B_t^1 + x_0^1 = 0\} \\ -\min\limits_{\sigma_0 \le s \le t} [B_s^1 + x_0^1] & , t > \sigma_0 \end{cases}$$

(1.2) $$x_t^1 = x_0^1 + B_t^1 + \varphi_t$$

この φ_t を用いて M_t を

(1.3) $$M_t = \hat{B}_{\varphi_t}$$

で定義し、又 $\mathcal{F}_t' = \overline{\sigma\{x_0, B_s, M_{s'}\ \ 0 \le s, s' \le t\}}^{P}$ とおき $\mathcal{F}_t$ を

(1.4) $$\mathcal{F}_t = \bigcap_n \mathcal{F}'_{t+\frac{1}{n}}$$

で定義する、容易にわかるように $\{B_t, M_t\}$ は $(\mathcal{F}_t, P)$-martingales の system で Def. 1 の (iii) をみたす. 又 φ_t は $x_t^1 = 0$ のときのみ増加する process である. あと $\hat{x}_t = (x_t^2, \dots, x_t^n)$ が定義できればよいが、そのために一般に $\mathcal{F}_t$ に adapt した continuous process $\tilde{y}_t = (y_t^2, y_t^3, \dots, y_t^n)$ に対し同様の process $\Phi\tilde{y}_t = (\Phi y_t^2, \ \ , \Phi y_t^n)$ を次のように定義する；

(1.5) $$(\Phi y)_t^i = x_0^i + \int_0^t \sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s)\,dB_s + \int_0^t b^i(x_s^1, \tilde{y}_s)\,ds + \int_0^t \tau^i(\tilde{y}_s)\,dM_s + \int_0^t \beta^i(\tilde{y}_s)\,d\varphi_s \quad , i = 2, 3, \dots, n.$$

今

(1.6) $$A_t = t + \varphi_t \quad ,$$

その逆函数を A_t^{-1} であらわすと

(1.7) $\qquad A_t^{-1} = \inf\{u : A_u > t\}$.

Lemma $\quad \forall T>0,\ \exists K=K(T)>0$ such that

$$E\{|\Phi\tilde{y}-\Phi\tilde{y}'|^2(A_t^{-1})\} \le K\int_0^t E\{|\tilde{y}-\tilde{y}'|^2(A_s^{-1})\}\,ds$$

Proof. $\quad \Phi\tilde{y}-\Phi\tilde{y}' \equiv Z=(Z_t^2, Z_t^3, \dots, Z_t^n)$ とおく。

$$Z_t^i = \int_0^t [\sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - \sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s')]\,dB_s$$

$$+\int_0^t [b^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - b^i(x_s^1, \tilde{y}_s')]\,ds$$

$$+\int_0^t [\tau^i(\tilde{y}_s) - \tau^i(\tilde{y}_s')]\,dM_s$$

$$+\int_0^t [\beta^i(\tilde{y}_s) - \beta^i(\tilde{y}_s')]\,d\varphi_s$$

$$\equiv I_1^i(t) + I_2^i(t) + I_3^i(t) + I_4^i(t)$$

とおく。$I_1^i(t)+I_3^i(t)$ は martingale であるから任意の有界な $\mathcal{F}_t$-stopping time σ に対し、

$$E\{|Z_\sigma^i - I_2^i(\sigma) - I_4^i(\sigma)|^2\}$$

$$= E\{|I_1^i(\sigma) - I_3^i(\sigma)|^2\}$$

$$= E\left\{\int_0^\sigma |\sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - \sigma^i(x_s^1, \tilde{y}_s')|^2 ds\right\}$$

$$+ E\left\{\int_0^\sigma |\tau^i(x_s^1, \tilde{y}_s) - \tau^i(x_s^1, \tilde{y}_s')|^2 d\varphi_s\right\}$$

σ, τ の Lipschitz 連続性より定数 K_1 が存在して この式は

$$\leq K_1 \ E\left\{\int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 ds + \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 d\varphi_s\right\}$$

$$= K_1 \ E\left\{\int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s\right\}$$

と評価できる。

又 b, β の Lischitz 連続性と Schwarz の不等式より容易にある定数 K_2, K_3 に対して

$$E\{|I_2^i(\sigma)|^2\} \leq K_2 \ E\{\sigma \cdot \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 ds\}$$

$$E\{|I_4^i(\sigma)|^2\} \leq K_3 \ E\{\varphi_\sigma \cdot \int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 d\varphi_s\}$$

と評価できる。故に

$$E\{|z_\sigma^i|^2\} \leq K_4 \ E\{(1+A_\sigma)\int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s\}.$$

ここで K_4 は y, $\tilde{y}$ や σ に無関係な定数である。故に定数 K_5 が存在して、

$$E\{|\Phi\tilde{y} - \Phi\tilde{y}'|^2(\sigma)\} \leq K_5 \ E\{(1+A_\sigma)\int_0^\sigma |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s\},$$

そこで $T>0$ を fix し、$\sigma = A_t^{-1}$, $t \in [0, T]$ とおく。容易にわかるように σ は $\mathcal{F}_t$ - stopping time で

$$\sigma \leq t \leq T, \qquad \varphi_\sigma \leq t \leq T$$

であるので、結局 $K = K(T)$ が存在し

$$E\{|\Phi\tilde{y} - \Phi\tilde{y}'|^2(A_t^{-1})\} \leq K \ E\{\int_0^{A_t^{-1}} |\tilde{y}_s - \tilde{y}'_s|^2 dA_s\}$$

$$= K \ E\{\int_0^t |\tilde{y} - \tilde{y}'|^2(A_s^{-1}) ds\}$$

$$= K \int_0^t E\{|\tilde{y} - \tilde{y}'|^2(A_s^{-1})\} ds$$

(Lemma 証了)

そこで $\tilde{x}_k(t)$, $k=0,1,2,\cdots$,

を

$$\begin{cases} \tilde{x}_0(t) \equiv \tilde{x}_0 = (x_0^2, x_0^3, \cdots, x_0^n), \\ \tilde{x}_k(t) = (\Phi \tilde{x}_{k-1})(t) \qquad k=1,2,\cdots \end{cases}$$

で定義する。 Lemma により

$$E\{|\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}|^2(A_t^{-1})\} \leq K \int_0^t E\{|\tilde{x}_{k-1} - \tilde{x}_{k-2}|^2(A_s^{-1})\} ds$$

であり，この評価を用いると通常の確率微分方程式と全く同様の議論（例えば 伊藤 [3]）によって

$$\tilde{x}(t) = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k(t)$$

が a.s. に存在しこの収束が t について各有界区間上で一様になることが結論される。

$$x(t) = (x^1(t), \tilde{x}(t))$$

とおくとき $\mathfrak{X} = (x(t), B(t), M(t), \varphi_t)$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の solution になることは見易い。しかも構成のしかたから

$$F(x, w_1, w_2) \ : \ (x, w_1, w_2) \in \bar{D} \times C_{R^n}[0,\infty) \times C_{R^{n-1}}[0,\infty)$$

$$\rightsquigarrow F \in C_{\bar{D}}[0,\infty)$$

なる函数があって

$$x_\cdot = F(x_0, B_\cdot, M_\cdot) \qquad \text{a.s.}$$

なることもあきらかである。

次に一意性を示す。

そのために $\mathfrak{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を与えられた solution と

するとき $(x_0, B_\cdot, M_\cdot)$ の分布が x_0 の分布 μ から一意的に定まることをまず証明する。

最初に方程式 (1) の第1式は

$$d x_t^1 = dB_t^1 + d\varphi_t$$

であり Def. 1 の (ii) と合せて x_t^1, φ_t は (x_0^1, B_t^1) から一意的に定まりそれは (1.1) (1.2) で与えられることを注意する。これは Skorohod [11] の重要な結果の一つである (又は, McKean [8] 参照)。
次に, $(x_0, B_\cdot)$ と独立な $(n-1)$ 次元 Brownian motion $\hat{B}$ が存在して

$$M_t = \hat{B}_{\varphi_t}$$

とかけることをいう。これがいえれば $(x_0, B_\cdot, M_\cdot)$ の分布が x_0 の分布から一意的にきまることは明らか。

そのため φ_t は一次元反射壁 Brown 運動の 0 での local time であることより, $\lim_{t\to\infty} \varphi_t = \infty$ a.s. なることに注意して一般論より ([7]), $\exists \hat{B}$ $(n-1)$ 次元 Brown 運動, $M_t = \hat{B}_{\varphi_t}$ となるにまず注意する。次に $\mathcal{B} = \sigma\{x_0, B_t ; t\in[0,\infty)\}$ とし $P(\ |\mathcal{B})$ で $\mathcal{B}$ による regular conditional distribution をあらわす。このとき $\{\hat{B}_t, P(\cdot|\mathcal{B})\}$ が $(n-1)$ 次元 Brown 運動であることがわかれば $\hat{B}_t$ と $\mathcal{B}$ の独立性がいえたことになる。ところで

$$E\left((M_t^i - M_s^i) f(x_0) F_1(\omega) F_2(\omega)\right) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad t > s$$

が任意の $F_1(\omega)$; $\mathcal{L}(B) \equiv \sigma\{B_t : t \in [0,\infty)\}$ - measurable bounded,

$F_2(\omega)$; $\mathcal{L}(M_s) \equiv \sigma\{M_u ; u \in [0,s]\}$ - measurable, bounded,

$f(x)$; $\mathcal{B}(\bar{D})$ - measurable, bounded

に対しなりたつ．何故ならばまず $F_1(\omega)$ が

$$F_1(\omega) = c + \int_0^\infty \Phi_s(\omega)\, dB_s,$$

ここで $\Phi_s(\omega) = (\Phi_s^1, \cdots, \Phi_s^n)$ は $\mathcal{L}\{B_s\} \equiv \sigma\{B_u : u \in [0,s]\}$ に adapt した measurable process，とかけることに注意し（これは Ito [4] の一般論，又は Kunita-Watanabe [7] の結果からわかることである），

$$\langle M, B \rangle = 0 \quad \text{より}$$

$$E\left((M_t^i - M_s^i)\int_s^\infty \Phi_u(\omega)\, dB_u\ f(x_0)\, F_2(\omega)\right) = 0$$

がいえることと，M が $\mathcal{F}_t$ - martingale ということから

$$E\left((M_t^i - M_s^i)\left(c + \int_0^s \Phi_u(\omega)\, dB_u\right) f(x_0)\, F_2(\omega)\right) = 0$$

がいえることより明らかである．同様に

$$E\left(\{(M_t^i - M_s^i)(M_t^j - M_s^j) - \delta_{ij}(\varphi_t - \varphi_s)\}\, f(x_0)\, F_1(\omega)\, F_2(\omega)\right) = 0$$

がいえる；$\left[\ (M_t^i - M_s^i)(M_t^j - M_s^j) - \delta_{ij}(\varphi_t - \varphi_s) \equiv \int_s^t M_u^i\, dM_u^j + \int_s^t M_u^j\, dM_u^i\right.$ に注意せよ$\left.\right]$，

このことは $\{M_t, \mathcal{L}(M_t), P(\ |\mathcal{L})\}$ が martingale の system で $\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{ij}\varphi_t$ なることを示しており 故に

$\hat{B}_t = M_{\varphi_t^{-1}}$ は $P(\ |\mathcal{L})$ について $(n-1)$ 次元 Brown 運動である．

さて解の一意性をいう．$\underbrace{\mathfrak{X}}_{=\{x_t,\, B_t,\, M_t,\, \varphi\}}$ を任意の (1) の solution とする．

存在のところで定義された函数 $F(x, w_1, w_2)$ より

$$\bar{x}_\cdot = F(x_0, B_\cdot, M_\cdot)$$

によって定義される $\bar{x}_t$ に対し，$\bar{\mathfrak{X}} = (\bar{x}_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ とおくとき $\bar{\mathfrak{X}}$ も solution である．始めに注意したように

$$x_t = (x_t^1, \hat{x}_t) \qquad \bar{x}_t = (\bar{x}_t^1, \hat{\bar{x}}_t)$$

とするとき $x_t^1 = \bar{x}_t^1$ であり，上の lemma より直ちに

$$E(|\hat{x} - \hat{\bar{x}}|^2(A_t^{-1})) \leq K\int_0^t E(|\hat{x} - \hat{\bar{x}}|^2(A_s^{-1}))ds ,$$

これより $\hat{x}_t \equiv \hat{\bar{x}}_t$ ，すなわち $x_t \equiv \bar{x}_t$ ．したがって

x の分布は $\bar{x} = F(x_0, B_\cdot, M_\cdot)$ の分布に等しくこれは x_0 の分布 μ より一意的に定まる． (証了)

(2°) (1) の一般の場合

このため (1) の solution の変換についてまず論じる．

ⓐ Brown 運動の変換

今 $\mathfrak{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対応する solution とする、 又 $p(x)$ を $\bar{D} \longrightarrow O(n) \equiv n \times n$ orthogonal matrix の全体，で Borel measurable とする．

$$\tilde{B}_t = \int_0^t p(x_s)dB_s \qquad \left(\text{i.e } \tilde{B}_t^i = \int_0^t \sum_{k=1}^n p_k^i(x_s)dB_s^k\right)$$

とおくとよく知られたように $\tilde{B}_t$ は n 次元 Brown 運動で $\tilde{\mathfrak{X}} = (x_t, \tilde{B}_t, M_t, \varphi_t)$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\tilde{\sigma} \equiv \sigma \cdot p^{-1}, b, \tau, \beta]$ に対応する solution である．

このことを

$$\mathfrak{X} \xrightarrow[p]{ⓐ} \tilde{\mathfrak{X}}$$

とあらわすことにする、定義より直ちに

$$\mathfrak{X} \xrightarrow[p]{ⓐ} \tilde{\mathfrak{X}} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathfrak{X}} \xrightarrow[p^{-1}]{ⓐ} \mathfrak{X} \text{ 、}$$

ⓑ time change

$\mathfrak{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対応する solution とする、 $c(x)$ をある定数 $c_2 > c_1 > 0$ に対し $c_1 \leq c(x) \leq c_2$ なる Borel-measurable function とし、

$A(t) = \int_0^t c(x_s)\,ds$ 、その逆函数を A_t^{-1} とあらわす、

$\tilde{x}_t = x_{A_t^{-1}}$, $\tilde{B}_t = \int_0^t \sqrt{c}(\tilde{x}_s)\,dB_{A_s^{-1}}$, $\tilde{M}_t = M_{A_t^{-1}}$, $\tilde{\varphi}_t = \varphi_{A_t^{-1}}$,

$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{A_t^{-1}}$

とおくとき $\tilde{\mathfrak{X}} = (\tilde{x}_t, \tilde{B}_t, \tilde{M}_t, \tilde{\varphi}_t)$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ 上の $[\sqrt{c}^{-1}\sigma, c^{-1}b, \tau, \beta]$ に対応する solution である、このことは Doob の optional sampling theorem から容易にたしかめうることである、

このことを

$$\mathfrak{X} \xrightarrow[c]{ⓑ} \tilde{\mathfrak{X}}$$

とあらわすと、定義よりすぐわかるように

$$\mathfrak{X} \xrightarrow[c]{ⓑ} \tilde{\mathfrak{X}} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathfrak{X}} \xrightarrow[c^{-1}]{ⓑ} \mathfrak{X} \text{ .}$$

© drift の変換

$\mathfrak{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対応する solution とする、$d(x) = (d^1(x), \ldots, d^m(x))$ を $\bar{D} \longrightarrow R^m$ 有界 Borel 可測とする．$\tilde{P}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度で $\forall t > 0$ に対し，

$$\tilde{P}(B) = \int_B \exp\left[\int_0^t d(x_s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |d|^2(x_s) ds\right] P(d\omega) \quad , \forall B \in \mathcal{F}_t$$

となるものとする、

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t d(x_s) ds$$

とする．このとき $\tilde{\mathfrak{X}} = (x_t, \tilde{B}_t, M_t, \varphi_t)$ は $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P} ; \mathcal{F}_t)$ 上の $[\sigma, \tilde{b} = b + \sigma \cdot d, \tau, \beta]$ に対応する solution である、これは Girsanov の定理，又は Motoo，Dynkin の定理として知られている，(例えば 田中，長谷川 [14] を見よ)

このことを

$$\mathfrak{X} \xrightarrow[d]{©} \tilde{\mathfrak{X}}$$

とあらわすと，定義よりすぐわかるように

$$\mathfrak{X} \xrightarrow[d]{©} \tilde{\mathfrak{X}} \Longrightarrow \tilde{\mathfrak{X}} \xrightarrow[-d]{©} \mathfrak{X} ,$$

さて Theorem の条件をみたす $[\sigma, b, \tau, \beta]$ があたえられたとしよう、このとき Lipschitz 連続な $p(x) ; x \in \bar{D} \longrightarrow O(n)$ で

$$\sigma\cdot p^{-1} = \begin{pmatrix} a(x),\ 0, \cdots, 0 \\ * * * \end{pmatrix}$$

となるものが存在する。それは $p^1(x) \equiv \dfrac{\sigma^1(x)}{|\sigma^1(x)|} : x \in \bar{D} \longrightarrow S^{n-1}$

Lipschitz 連続であるので、あと同様な $p^i(x) : x \in \bar{D} \longrightarrow S^{n-1}$ を、

$[p^1, p^2, \cdots p^n]$ が O.N.S になるようにえらび

$$p(x) = \begin{pmatrix} p^1(x) \\ p^2(x) \\ \vdots \\ p^n(x) \end{pmatrix}$$

とすればよい。このことは2次元のときは trivial であるが一般にはそう trivial ではない。これは次のように考えれば fibre bundle における cross-section の存在に関する1例題である。

「

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{p}_1"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & O(n) \arrow[d, "\pi"] \\ \bar{D} \arrow[r, "p^1(x)"'] & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

π は $a \in O(n)$ に対し その第1行を対応させる projection; E は $p^1(x) : \bar{D} \longrightarrow S^{n-1}$ による induced bundle.

したがって cross section $f^* ; \bar{D} \longrightarrow E$ が求まれば $p \equiv \tilde{p}_1 \circ f^* : \bar{D} \longrightarrow O(n)$ が求めるもの」

このとき $a(x) = |\sigma^1(x)|$ となり 仮定より $\exists\, C_2 > C_1 > 0$; 定数

$C_2 \geqq a(x) \geqq C_1$.

$$C(x) = a^2(x)$$

とおく.

又

$$d(x) = \left(-\frac{b^1(x)}{a^2(x)},\ 0, \cdots, 0 \right)$$

とおく.

今 $[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対応する solution $\mathfrak{X}$ があったとする.

$\mathfrak{X}$ に次のような変換を順次行う

$$\mathfrak{X} \xrightarrow[p]{ⓐ} \mathfrak{X}^1 \xrightarrow[c]{ⓑ} \mathfrak{X}^2 \xrightarrow[d]{ⓒ} \mathfrak{X}^3$$

すると $\mathfrak{X}^3$ は $[\tilde{\sigma}, \tilde{b}, \tau, \beta]$ に対応する solution であきらかに $\tilde{\sigma}_1^1(x) \equiv 1$, $\tilde{\sigma}_k^1(x) \equiv 0$, $k = 2, 3, \ldots, n$; $\tilde{b}^1(x) \equiv 0$ すなわち (1°) の仮定をみたしている, (1°) で示したように $[\tilde{\sigma}, \tilde{b}, \tau, \beta]$ に対応する solution には uniqueness がなりたち

$$\mathfrak{X}^3 \xrightarrow[-d]{ⓒ} \mathfrak{X}^2 \xrightarrow[c^{-1}]{ⓑ} \mathfrak{X}^1 \xrightarrow[p^{-1}]{ⓐ} \mathfrak{X}$$

となるので $\mathfrak{X}$ の uniqueness も明らかである. 存在は $\mathfrak{X}^3$ の存在より上の変換で $\mathfrak{X}$ の存在がわかる (証了)

(3°) (2) の場合 ; i.e. general sticky case.

定理の条件をみたす $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ が与えられたとする.

$[\sigma, b, \tau, \beta]$ に対する (1) の solution $\mathfrak{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ を用意し, 又 $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ は適当に大きくとって $\mathfrak{X}$ と独立な n 次元 Brown 運動 $\bar{B}$ がその上に存在するようにしておく

今

$$A_t = t + \int_0^t \rho(x_s)\, d\varphi_s, \qquad その逆函数を\ A_t^{-1},$$

$$\tilde{x}_t = x_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{M}_t = M_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{\varphi}_t = \varphi_{A_t^{-1}}, \quad \tilde{B}_t = B_{A_t^{-1}} + \int_0^t I_D(\tilde{x}_s)\, d\bar{B}_s,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{A_t^{-1}}$$

とおく。 このとき

$\widetilde{\mathfrak{X}} = (\hat{x}_t, \widetilde{B}_t, \widetilde{M}_t, \widetilde{\varphi}_t)$ は $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ に対応する(2)

の solution である。このことは

$$\int_0^t I_D(x_s)\,dA_s = t, \qquad \int_0^t I_{\partial D}(x_s)\,dA_s = \int_0^t \rho(x_s)\,d\varphi_s$$

より $\quad A_t^{-1} = \int_0^t I_D(\tilde{x}_s)\,ds, \qquad \int_0^t I_{\partial D}(\tilde{x}_s)\,ds = \int_0^t \rho(\tilde{x}_s)\,d\tilde{\varphi}_s$

となり、あと Doob の optional sampling theorem をとれば容易にわかることである。

逆に $\quad \overline{\mathfrak{X}} = (\bar{x}_t, \bar{B}_t, \bar{M}_t, \bar{\varphi}_t)$ を $[\sigma, b, \tau, \beta, \rho]$ に対応する (2) の solution とする

$$\bar{A}_t = \int_0^t I_D(\bar{x}_s)\,ds$$

とおく。このとき、 $\bar{A}_t$ は strictly increasing in t, P-a.s. である。

実際もし有理数 $r_1 < r_2$ に対し

$$\bar{A}_{r_2} - \bar{A}_{r_1} = 0 \implies x_s \in \partial D \quad r_1 \le {}^{\forall}s \le r_2 \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} I_{\partial D}(\bar{x}_s)\,ds$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \rho(\bar{x}_s)\,d\bar{\varphi}_s$$

$$= r_2 - r_1 > 0$$

$\therefore, \quad \bar{\varphi}_{r_2} - \bar{\varphi}_{r_1} > 0$

一方 $\quad \int_{r_1}^{r_2} \sigma^1(\bar{x}_s) I_D(\bar{x}_s)\,d\bar{B}_s = 0, \quad \int_{r_1}^{r_2} b^1(\bar{x}_s) I_D(\bar{x}_s)\,ds = 0$ より

$$\bar{x}^1_{r_2} = \bar{x}^1_{r_1} + \bar{\varphi}_{r_2} - \bar{\varphi}_{r_1} > \bar{x}^1_{r_1} = 0$$

これは $x^1_{r_2} = 0$ と矛盾する。

したがって $\bar{A}_t^{-1}$ は continuous であり $\mathfrak{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$

を $\quad x_t = \bar{x}_{\bar{A}_t^{-1}}, \quad B_t = \int_0^{\bar{A}_t^{-1}} I_D(\bar{x}_s)\,d\bar{B}_s, \quad M_t = \bar{M}_{\bar{A}_t^{-1}}, \quad \varphi_t = \bar{\varphi}_{\bar{A}_t^{-1}}$

$\mathcal{F}_t = \bar{\mathcal{F}}_{\bar{A}_t^{-1}}$ とおくとき $\mathfrak{X} = (x_t, B_t, M_t, \varphi_t)$ は $[\sigma\ b, \tau, \beta]$ に対応する (1) の解である. しかも

$$t = \int_0^t I_D(\bar{x}_s)\,ds + \int_0^t I_{\partial D}(\bar{x}_s)\,ds = \bar{A}_t + \int_0^t \rho(\bar{x}_s)\,d\bar{\varphi}_s$$

より

$$\bar{A}_t^{-1} = t + \int_0^t \rho(x_s)\,d\varphi_s \equiv A_t$$

このことは $\bar{x}_t$ は x_t から $\bar{x}_t = x_{A_t^{-1}}$ として得られることを示している. すなわち任意の (2) の solution は (1) の solution からこのようにして得られたものに限られる. したがって (2) の solution の uniqueness が示された. 証了.

文献

[1] J. M. Bony, Ph. Courrege et P. Priouret, Séminaires Brelot - Choquet - Deny 1965/66 のいくつかの報告.

[2] N. Ikeda, On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems, Mem Coll. Sci Univ. Kyoto, Ser. A, 33 (1961), 367-427

[3] 伊藤清, 確率論 (現代数学14) 岩波書店 1953

[4] K. Itô, Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 157-167

[5] K. Itô, Canonical measurable random functions, Proc. International Conf. on Funct. Anal. Math. Soc. of Japan 1970

[6] K, Itô and H.P. McKean Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965

[7] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30 (1967) 209 − 245

[8] H. P. McKean Jr., Stochastic integrals, Academic press 1969

[9] K. Sato, Semigroups and Markov processes, Lecture note Univ. Minnesota 1968

[10] K. Sato and T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 4 529 − 605 (1965)

[11] A.V. Skorohod, Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region, Theory of Prob. and its Appl. 6 (1961) 264 − 274

[12] D.W. Stroock and S.S.R. Varadhan, Diffusion processes with continuous coefficients, I. II, Comm. Pure Appl. Math 12 (1969) 345 − 400 and 479 − 530

[13] D.W. Stroock and S.S.R. Varadhan, Diffusion processes with boundary conditions, in preprint (to appear)

[14] 田中洋 一 長谷川実, 確率微分方程式, Seminar on Prob. Vol. 19 (1964) 確率論セミナー

[15] S. Watanabe, On stochastic differential equations for multidimensional diffusion processes with boundary conditions

to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[16] A. D. Wentzell On lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes. Theory of Prob. and Its Appl. **4** (1959) 172-185

付記 (i) solution の定義における $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ は常に Itô [5] の意味で standard space としておいた方がよかったと思う。

(ii) 本文の内容の大部分は [15] で発表される予定です。