

1次元反射壁 Markov 過程の 確率微分方程式による構成

東大 理 田 中 洋

§1. 序.

$R_+ = [0, \infty)$ 上の反射壁 Brown 運動の構成法としては、例之は、(1)折返し (R^1 上の Brown 運動の絶対値をとる操作) によるもの、(2) infimum process を用いるもの、(3) Skorohod の確率微分方程式によるもの、等とあげることが出来る。一方、paths が不連続な Markov 過程、例之は安定過程の場合には、渡辺信三氏 [5]、Elliott [2] の研究があり、これらの研究からわかることであるが、一般に paths が不連続の場合は R_+ での反射壁過程の構成として (1) の方法は通用しない。実際、[5] にあって R_+ での反射壁安定過程の paths は (2) の方法によって構成されている。このノートでは、不連続な Markov 過程でとくに確率微分方程式の解として与えられる場合について、(3) の Skorohod の方法の拡張を与える。この方法は、最初に与えられる確率微分方程式が定数係数の場合、すなわち、Lévy 過程の場合には、(2) の方法に他存するにことがわかる。

多次元で不連続 paths の場合でも, この「1」の方法の拡張として, 境界条件をもつ Markov 過程を確率微分方程式を用いて構成することがある程度可能と思われるが, これについては後述する. 境界以外で paths が連続な場合のこのような研究については, 池田氏 [1] および最近の渡辺信三氏 [6] の結果がある.

§2. 不連続 paths の場合の Skorohod's equation.

Skorohod の確率微分方程式 ([4] [3] ~~等~~) は paths が連続な場合である. これを paths が不連続な場合に拡張する.

$R_+ \times R^1$ の Borel 集合 A に対して, $\lambda(A) = \int_A |u|^{-2} dt du$ とおく. (Ω, \mathcal{B}, P) を適当な確率空間とし, λ の上で定義された 1 次元 Brown 運動 $\beta(t)$ ($\beta(0) = 0$ とおく) および測度 λ に対応する Poisson 加法系 $\{p(A)\}$ を考へる. さて, Brown 運動 $\beta(t)$ と Poisson 加法系 $\{p(A)\}$ とは独立であると仮定する. $\lambda(A) < \infty$ であるような A に対し $g(A) = p(A) - \lambda(A)$ とおく. さて $t \in R_+$ に対し $\mathcal{B}_t = \sigma\{\beta(s), p(A) : 0 \leq s \leq t, A \in [0, t] \times R^1\}$ とおく.

一般に, $\alpha(t)$ を R_+ の中へ値をもつ確率過程とし, paths が右連続かつ右極限をもつものとするとき, 次の条件を満たす $\varphi(t)$ を $\alpha(t)$ に対応する increasing functional と呼ぶことができる.

(i) $\varphi(t)$ は右連続, 単調非減少, $\varphi(0) = 0$.

(ii) $x(t) > 0$ かつ $x(t-) > 0$ であるような時刻 $t > 0$ においては, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\varphi(t-\varepsilon) = \varphi(t+\varepsilon)$.

(iii) $x(t) > 0$ であるような時刻 t においては $\varphi(\cdot)$ は連続.

今, R_+ において定義された実数値 Boel 函数 $a(x)$, $b(x)$, および $R_+ \times R^1$ において定義された実数値 Boel 函数 $c(x, u)$ が与えられたとして, 次のような確率微分方程式を考える.

$$(I) \quad \begin{aligned} x(t) = & x + \int_0^t a(x(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x(s)) ds \\ & + \int_0^t \int_{|u| \leq 1} c(x(s), u) f(ds du) + \int_0^t \int_{|u| > 1} c(x(s-), u) p(ds du) + \varphi(t) \end{aligned}$$

ただし, $x(t)$ と共に $\varphi(t)$ を未知とする 2 次の条件をみたすものとする:

- $$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad x(t) \text{ は右連続, 左極限をもち, } x(t) \geq 0. \text{ かつ任意の } t \\ \text{ に対して } x(t) \text{ は } \mathcal{B}_t\text{-可測である.} \\ (b) \quad \varphi(t) \text{ は } x(t) \text{ に対応する increasing functional である.} \end{array} \right.$$

方程式 (I) の解の存在と一意性を示すために, 係数 a , b , c に対して次のような仮定をおく.

仮定 A (i) ある定数 K が存在して

$$\begin{aligned} & |a(x) - a(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 \\ & + \int_{|u| \leq 1} |c(x, u) - c(y, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} \leq K^2 |x - y|^2 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \int_{|u| \leq 1} |c(x, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} < \infty$$

(iii) $c(x, u)$ は $[0, \infty) \times [-1, 1]$ の各コンパクト集合の上で有界.

定理 I. 仮定 A のもとでは, 任意の $x \in R_+$ に対して, 方程式 (I) の解は存在して一意である.

証明はすべて §4 で与えるが, 次の特別な場合を先ず証明するので, それを定理と見做すべく. 方程式 (I) の代りに

$$(I_0) \quad x(t) = x + \int_0^t a(x(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x(s)) ds \\ + \int_0^t \int_{R^1} c(x(s), u) g(ds du) + \varphi(t)$$

を考へ, 仮定 A の代りに

仮定 A₀. (i) ある定数 K があつて

$$|a(x) - a(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 \\ + \int_{R^1} |c(x, u) - c(y, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} \leq K^2 |x - y|^2$$

(ii) $c(x, u)$ は有界, $\int_{R^1} |c(x, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} < \infty$.

定理 I₀. 仮定 A₀ のもとで, 任意の $x \in R_+$ に対して, (I₀) の解が存在して一意である. $x(t)$ は初期値 x に対応する (I₀) の解, $y(t)$ は初期値 y に対応する (I₀) の解とすると

$$E\{|x(t) - y(t)|^2\} \leq |x - y|^2 e^{(K^2 + 1)t}.$$

§3. 基本的な補題.

この節では, 前節の定理の証明の基礎となる補題をあげる.

補題 $f(t) \in R_+$ で定義された実数値函数で、右連続、左極限をもつ、かつ $f(0) \geq 0$ であるとする。 $x(t) \in R_+$ で定義され R_+ の中に値をもつ函数で、右連続、左極限をもつものとし、 $\varphi(t) \in x(t)$ に対応する increasing functional とする。このとき、もし

$$(3.1) \quad x(t) = f(t) + \varphi(t)$$

であれば、

$$(3.2) \quad x(t) = \begin{cases} f(t) & t < 0 \text{ のとき} \\ f(t) - \inf_{\sigma \leq s \leq t} f(s) & t \geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ のとき} \\ -\inf_{\sigma \leq s \leq t} f(s) & t \geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし $\sigma = \inf \{ t \geq 0 : f(t) < 0 \}$ 。

証明. (3.2) (3.3) で与えられる $x(t)$, $\varphi(t)$ が補題でのべた性質をもつ、かつ (3.1) をみたすことは容易にわかる。ゆえに、補題の中でのべた性質をもつ (3.1) の解が一意であることと証明すれば十分である。

$(x(t), \varphi(t))$, $(y(t), \hat{\varphi}(t))$ を共に (3.1) の解で、補題でのべた性質をもつものとする。 $\psi(t) = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$ とおき、 $\psi(t)$ の連続部分を $\psi_0(t)$ 、不連続部分を $\psi_1(t)$ とする。すると、

$$\psi_1(t) = \sum_{0 \leq \tau \leq t} \{ \psi(\tau) - \psi(\tau-) \}, \quad \psi_0(t) = \psi(t) - \psi_1(t).$$

$x(t), y(t)$ が (3.1) の解であることは

$$\begin{aligned} (x(t) - y(t))^2 &= \psi(t)^2 = \int_0^t \int_0^t \psi(dt_1) \psi(dt_2) \\ &= \iint_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t} \psi(dt_1) \psi(dt_2) + \iint_{0 \leq t_2 \leq t_1 \leq t} \psi(dt_1) \psi(dt_2) \\ &\quad - \sum_{0 \leq \tau \leq t} (\psi(\tau) - \psi(\tau-))^2 \leq 2 \int_0^t \psi(s) \psi(ds) \\ &= 2 \int_0^t \psi(s) \psi_0(ds) + 2 \sum_{0 \leq s \leq t} \psi(s) \{\psi(s) - \psi(s-)\}. \end{aligned}$$

もし $\psi(s) > 0$ ならば, $x(s) > 0, s \geq \tau, \psi(s) - \psi(s-) \leq 0$.
 $(\tau = 0)$?

$$(x(t) - y(t))^2 \leq 2 \int_0^t \psi(s) \psi_0(ds).$$

今, $I^+ = [0, t] \cap \{s: \psi(s) > 0\}, I^- = [0, t] \cap \{s: \psi(s) < 0\}$

とあると

$$(3.4) \quad (x(t) - y(t))^2 \leq 2 \int_{I^+} \psi(s) \psi_0(ds) + 2 \int_{I^-} \psi(s) \psi_0(ds).$$

とすると

$$I_1^+ = I^+ \cap \{s: x(s) > 0, x(s-) > 0\}$$

$$I_2^+ = I^+ \cap \{s: x(s) > 0, x(s-) = 0\}$$

とあると, $I^+ = I_1^+ \cup I_2^+$ である。さき increasing functional の性質によつて, $\psi_0(\cdot)$ は I_1^+ のある近傍において, 単調非増大, I_2^+ は (高々) 可算集合であることがわかる。

$$よつて \quad \int_{I_1^+} \psi(s) \psi_0(ds) \leq 0, \quad \int_{I_2^+} \psi(s) \psi_0(ds) = 0.$$

ゆえに
$$\int_{\mathbb{I}^+} \psi(s) \psi_0(ds) \leq 0.$$

全く同様に
$$\int_{\mathbb{I}^-} \psi(s) \psi_0(ds) \leq 0.$$

(7) より, (3.4) より $(x(t) - y(t))^2 \leq 0$ を得る.

§4. 定理の証明.

補題. $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ は σ -fields の増大族とし, $M_1(t)$, $M_2(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ はどれも有界な確率過程で, $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合してあり, および paths は右連続, 左極限をもつものとする. さらに, $M_1(t)$, $M_2(t)$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ につき martingales であり, $A_1(t)$, $A_2(t)$ は有界変動過程であり, total variations も有界であるとする. $X_1(t)$, $X_2(t)$ は非負であるとして, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ はそれぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$ の increasing functionals であるとする. このとき, もし

$$X_1(t) = M_1(t) + A_1(t) + \varphi_1(t) \quad \text{a.s.}$$

$$X_2(t) = M_2(t) + A_2(t) + \varphi_2(t) \quad \text{a.s.}$$

であれば,

$$E\{|X_1(t) - X_2(t)|^2\} \leq E\{|M_1(t) - M_2(t)|^2\} + 2 E\left\{\int_0^t (X_1(s) - X_2(s))(A_1 - A_2)(ds)\right\}$$

が成立する.

証明.

$$X(t) = X_1(t) - X_2(t)$$

$$M(t) = M_1(t) - M_2(t)$$

$$A(t) = A_1(t) - A_2(t)$$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = A(t) + \varphi(t)$$

よおくと, $\tilde{\varphi}(t)^2 \leq 2 \int_0^t \tilde{\varphi}(s) \tilde{\varphi}(ds)$.

$$\begin{aligned} M(t) \tilde{\varphi}(t) &= \int_0^t M(t) \tilde{\varphi}(ds) \\ &= \int_0^t M(s) \tilde{\varphi}(ds) + \int_0^t \{M(t) - M(s)\} \tilde{\varphi}(ds). \end{aligned}$$

LTが、 $X(t)^2 = M(t)^2 + 2M(t) \tilde{\varphi}(t) + \tilde{\varphi}(t)^2$

$$\begin{aligned} &\leq M(t)^2 + 2 \int_0^t X(s) \tilde{\varphi}(ds) \\ &\quad + \int_0^t \{M(t) - M(s)\} \tilde{\varphi}(ds) \end{aligned}$$

前節の補題の証明と同様に

$$\int_0^t X(s) \varphi(ds) \leq 0$$

が示されるから

$$(4.1) \quad X(t) \leq M(t)^2 + 2 \int_0^t X(s) A(ds) + \int_0^t \{M(t) - M(s)\} \tilde{\varphi}(ds)$$

$M(t)$ は martingale であるから

$$E \left\{ \int_0^t (M(t) - M(s)) \tilde{\varphi}(ds) \right\} = 0,$$

LTが、(4.1) の両辺の平均をとると

$$E \{ X(t)^2 \} \leq E \{ M(t)^2 \} + 2 E \left\{ \int_0^t X(s) A(ds) \right\}.$$

定理 I. の証明 逐次近似法による.

$$x_0(t) \equiv x$$

とあき, 一般に $x_n(t)$ が定義されたとき, $x_{n+1}(t)$ は

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) = & x + \int_0^t a(x_n(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x_n(s)) ds \\ & + \int_0^t \int_{R^1} c(x_n(s), u) f(ds du) + \varphi_{n+1}(t) \end{aligned}$$

によ, φ_{n+1} を定義する. したがって $x_{n+1}(t) \geq 0$ とし, $\varphi_{n+1}(t)$ は $x_{n+1}(t)$ の increasing functional とする. 前節の補題によ, φ_{n+1} のような $x_{n+1}(t), \varphi_{n+1}(t)$ は一意に定まる.

$$Z_{n+1}(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$$

$$\begin{aligned} M_n(t) = & \int_0^t \{a(x_n(s)) - a(x_{n-1}(s))\} d\beta(s) \\ & + \int_0^t \int_{R^1} \{c(x_n(s), u) - c(x_{n-1}(s), u)\} f(ds du) \end{aligned}$$

とあくと, この節の補題によ, $(*)$

$$\begin{aligned} E\{|Z_{n+1}(t)|^2\} & \leq E\{M_n(t)^2\} + 2 \int_0^t E\{Z_{n+1}(s) \{b(x_n(s)) - b(x_{n-1}(s))\}\} ds \\ & \leq E\{M_n(t)^2\} + \int_0^t E\{|Z_{n+1}(s)|^2\} ds + \int_0^t E\{|b(x_n(s)) - b(x_{n-1}(s))|^2\} ds \end{aligned}$$

(*) 補題においては, x に出でくる確率過程が可なり有界であること; 先ず次のような truncation が必要である. stopping time T で, 今関係にある確率過程が可なり $[0, T]$ において有界となるものを取り, t, s の代わりに $t \wedge T, s \wedge T$ とあきかえて, 補題を適用し, 最後の式(次頁の (4.2)) において, $T \uparrow \infty$ とする.

$$\leq K^2 \int_0^t E\{|z_n(s)|^2\} + \int_0^t E\{|z_{n+1}(s)|^2\} ds$$

したがって

$$E\{|z_{n+1}(t)|^2\} \leq K^2 \int_0^t E\{|z_n(s)|^2\} ds \cdot e^t.$$

このより, $0 \leq t \leq t_0$ (t_0 は任意) なる t に対し

$$(4.2) \quad E\{|z_{n+1}(t)|^2\} \leq \frac{(K^2 e^t)^n \cdot t^{n+1}}{(n+1)!} \cdot K^2 x^2 e^{t_0}$$

よって

$$y_n(t) = \int_0^t a(x_n(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x_n(s)) ds \\ + \int_0^t \int_{R^1} c(x_n(s), u) \delta(ds du)$$

とあると, Chebyshev の不等式, submartingale に関する Doob の不等式を用いて

$$P\{y_n(t) \text{ converges uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1.$$

したがって

$$P\{x_n(t) \rightarrow x(t) \text{ uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1$$

$$P\{\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \text{ uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1$$

であるような $x(t)$, $\varphi(t)$ があり, このが方程式 (I₀) の解であることは容易にわかる。

一意性の証明: $(x(t), \varphi(t)), (y(t), \varphi(t))$ 共に (I₀) の解であるが, 存在証明の場合と同様の計算で

$$E\{|x(t) - y(t)|^2\} \leq (K^2 + 1) \int_0^t E\{|x(s) - y(s)|^2\} ds$$

このより

$$E\{|x(t) - y(t)|^2\} = 0.$$

定理 I₀ の後半の部分も今までと同様な計算で容易にわかる。

定理 I は定理 I₀ を用いて証明されるわけであるが、単なる技術的部分が多いので省略する。

§5. 方程式 (I) の解が定める Markov 過程

仮定 A のもとで方程式 (I) の解が一意的に存在する。初期値と添数とする解の族から R_+ と state space とする Markov 過程が定義される。この事情は通常の確率微分方程式の場合と全く同じである。この Markov 過程を方程式 (I) から定まる R_+ における反射壁 Markov 過程と呼ぶことにする。方程式 (I₀) に対し、同様なことをする。定理 I₀ の後半の評価式からわかるように、仮定 A₀ のもとで (I₀) から定まる反射壁 Markov 過程は Feller 過程である。

generator についておしえておく。以下 $a(x), b(x), c(x, u)$ は仮定 A₀ をみたし、かつ $a(x), b(x)$ は有界であるとする。このとき方程式 (I₀) が定める反射壁 Markov 過程を $X = \{x(t), P_x\}$ とし、この semigroup を T_t とする。 $C_0(R_+)$ を R_+ における連続で $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に tend するよう有界な関数全体のなる Banach 空間 (max ノルム) とすると、 T_t は $C_0(R_+)$ の上の強連続な semigroup に存在する。この Hille-Yosida の意味での generator を A とする。次に \mathcal{D}_0 を、コンパクト supports をもつ $C^2(R_+)$

の函数 f で $f'(0) = f''(0) = 0$ (右微分!) とみたすものの全体

とし, $f \in \mathcal{D}_0$ に対して $\bar{f}(x) = f(x \vee 0)$, $x \in \mathbb{R}^1$, とおく.

$a(x), b(x), c(x, u)$ を $x < 0$ に対して次のように拡張する:

$$\bar{a}(x) = a(x \vee 0), \quad \bar{b}(x) = b(x \vee 0), \quad \bar{c}(x, u) = c(x \vee 0, u).$$

そして

$$(I_0) \quad \bar{x}(t) = x + \int_0^t \bar{a}(\bar{x}(s)) d\beta(s) + \int_0^t \bar{b}(\bar{x}(s)) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^1} \bar{c}(\bar{x}(s), u) \xi(ds du), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

が定める \mathbb{R}^1 上の Markov 過程 $\bar{X} = \{\bar{x}(t), \bar{P}_x, x \in \mathbb{R}^1\}$ と

し, $\bar{\sigma} = \inf\{t > 0 : \bar{x}(t) \leq 0\}$ とおく.

$f \in \mathcal{D}_0$ ならば $\bar{f} \in C^2(\mathbb{R}^1)$ であるから, 確率積分の変換公式を用いる (= とし f), \bar{f} は \bar{X} の generator を与えることになり計算出来る,

$$(\bar{\mathcal{L}} \bar{f})(x) = \frac{1}{2} \bar{a}(x)^2 \bar{f}''(x) + \bar{b}(x) \bar{f}'(x) + \int_{\mathbb{R}^1} \{\bar{f}(x + \bar{c}(x, u)) - \bar{f}(x) - \bar{c}(x, u) \bar{f}'(x)\} \frac{du}{|u|^2}$$

と与えられる. ところで Dynkin の公式より, $x > 0$ に対して

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{E}_x \{\bar{f}(\bar{x}(\bar{\sigma} \wedge t))\} - \bar{f}(x)}{\bar{E}_x \{\bar{\sigma} \wedge t\}} = (\bar{\mathcal{L}} \bar{f})(x).$$

一方 $\sigma = \inf\{t > 0 : x(t) = 0\}$ とおくと, $x > 0$ に対して

$$\bar{E}_x \{\bar{\sigma} \wedge t\} = E_x \{\sigma \wedge t\}, \quad \bar{E}_x \{\bar{f}(\bar{x}(\bar{\sigma} \wedge t))\} = E_x \{f(x(\sigma \wedge t))\}$$

が成り立つから, $x > 0$ に対し

$$(5.1) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{E_x \{ f(x(\sigma_{\wedge t})) \} - f(x)}{E_x \{ \sigma_{\wedge t} \}} = (\overline{\sigma f})(x).$$

今 $\mathcal{D}_1 \ni C_0(\mathbb{R}^1)$ の函数 f で (5.1) の左辺の極限が任意の $x > 0$ に対し存在し, かつこの極限を $g(x)$ としたとき $g(x)$ が次の条件 (5.2) (5.3) をみたすような f の全体とする:

$$\left\{ \begin{array}{l} (5.2) \quad g(x) \text{ は } x=0 \text{ まで連続的に拡張出来, その拡張を } \sigma f \text{ とし } \sigma f \in C_0(\mathbb{R}_+), \\ (5.3) \quad f \text{ が } x \in \mathbb{R}_+ \text{ において最大値をとれば } (\sigma f)(x) \leq 0, \\ \text{かつ } -f \text{ が } y \in \mathbb{R}_+ \text{ で最大値をとれば } (\sigma f)(y) \geq 0. \end{array} \right.$$

このとき Dynkin の公式により $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}_1$, また (5.1) と $\overline{\sigma f}$ の形より $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1$ がわかる. 今 $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(A)$ を証明しよう. そのためには $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_1$ を示せば十分である.

$\alpha > 0$ とすると $\alpha - A$ は $\mathcal{D}(A)$ から $C_0(\mathbb{R}_+)$ の 上への 1-1 写像を与える. 一方 $\alpha - \sigma$ は $\alpha - A$ の拡張であり, (5.3) を用いると \mathcal{D}_1 から $C_0(\mathbb{R}_+)$ への 1-1 写像を与えることがわかる. したがって $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_1$ が成り立つことは存する.

$\mathcal{D}(A)$ を明確に定める問題はまた残っており, 以上の考察から $f \in \mathcal{D}_0$ に対し Af の形を与えることが出来る.

$$n(x, \Gamma) = \int_{\{u: x + c(x, u) \in \Gamma\}} \frac{du}{|u|^2}, \quad x > 0, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$$

とあく.

定理 II (*) $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(A)$ であらう, $f \in \mathcal{D}_0$ ならば, $x > 0$
に對して

$$\begin{aligned} (Af)(x) = & \frac{1}{2} a(x)^2 f''(x) + b(x) f'(x) \\ & + \int_{(0, \infty)} \{f(y) - f(x) - (y-x) f'(x)\} n(x, dy) \\ & + (f(0) - f(x)) n(x, (-\infty, 0]) + f'(x) \int_{(-\infty, 0]} (y-x) n(x, dy). \end{aligned}$$

引用文献

- [1] N. Ikeda: On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems. Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. 33(1961), 367-427.
- [2] J. Elliott: The boundary value problems and semigroups associated with certain integro-differential operators. Trans. Amer. Math. Soc., 76(1954), 300-331.
- [3] H. P. McKean: A Skorohod's integral equation for a reflecting barrier diffusion. J. Math. Kyoto Univ., 3(1963), 86-88.
- [4] A. V. Skorohod: Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region 1, 2. Teor. Veroyat. 6(1961), 249-274; 7(1962), 3-23.
- [5] S. Watanabe: On stable processes with boundary conditions. J. Math. Soc. Jap. 14(1962), 170-198.
- [6] S. Watanabe: On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions. (to appear)

(*) (追加) この定理は次の形に述べた方がよい.
 $C_0[-\infty, \infty)$ を R^1 において定義された実数値連続函数で, $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に tend し, $x \rightarrow -\infty$ のとき有限な極限値をもつもの全体のなる Banach 空間 (max ノルム) とする. X の semigroup T_t は $C_0[-\infty, \infty)$ 上の強連続半群に在る. $C_0[-\infty, \infty)$ における T_t の generator を A とする. R_+ において定義された函数 f が, $f \in \mathcal{D}(A)$ ならば, $f \in \mathcal{D}(A)$ であらう, $(Af)(x) = (A\bar{f})(x)$, $x \in R_+$.