

安定過程の drift による振動

東工大理 土岩正明

§ 1. 序

ここで報告するとは、operator $A = \sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + B$ (但し、 B は d 次元対称安定過程の generator) が Markov process を生成するか? という問題を解くときに出て来る確率積分方程式の解の一意性についてである。

このことについて、[8], [9], [10], [12] 等の結果があるので紹介する。なお関連して [5] の結果も紹介する。

上の問題を考える一つの動機は、Markov process の境界問題において、Ventzel [11], Sato-Ueno [7], Motoo [4] 等がなされた解決への理論的枠組の中で、具体的な場合について出来るだけ詳しく調べるということである。即ち、 D を R^2 の円板又は上半平面 (後者の場合は次元を一般にして、半空間で考えても以後の議論は同様である)、 ∂D を D の境界とする (後者では必要の場合一桌コンパクト化する)。

= 9 7 5

(1): D の内部で Brown 運動をし, ∂D で oblique reflection をする diffusion を定めるといふ問題

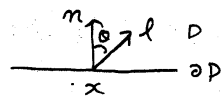
$$(1)' \begin{cases} (\alpha - \frac{1}{2}\Delta)u = f & \text{in } D \quad (\alpha > 0, f: \text{given}) \\ \frac{\partial u}{\partial l} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

を解く (解の存在と一意性を $f \in C(\bar{D})$ に対して示す) = 7 7
 同様にあり, 但し $l = l(x), (x \in \partial D)$ は non-tangential inward direction on the boundary ∂D .

= 2. $l = l(x)$ が十分小さければ, 解析的な方法 (cf. Sato [6]) とも確率論的な方法 (cf. Ikeda [2]) とも解ける。
 我々は, $l = l(x)$ の十分小ささについて制限を加えずに (1) を解きたい。十分小さくないで取扱う = 7 7 出来る様に完結化するため, まず l が十分小さくない場合に 7 7 考察する。

$n = n(x)$: inward normal direction on the boundary

$$a(x) = \tan \theta(x) \quad \text{とおく.}$$



$\theta = \theta(x)$ は $n(x)$ と $l(x)$ のなす角.

= 2. 仮定として, $a(x)$ は有界とする。 7 7 7 7 7 (1)' は次の (1)'' と同値になる:

$$(1)'' \begin{cases} (\alpha - \frac{1}{2}\Delta)u = f & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

よく知られているように (cf. Sato [6], Sato-Ueno [7]) (1) の diffusion の resolvent を $\{G_\alpha\}$ とおくと

$$G_\alpha = G_\alpha^0 + H_\alpha K^{(\alpha)} \overline{L G_\alpha^0} \quad (\alpha > 0)$$

と分解される。但し、 $\{G_\alpha^0\}$ は minimal process の resolvent

$\{H_\alpha\}$ は Dirichlet operator, $K^{(\alpha)} = (-\overline{L H_\alpha})^{-1}$,

$L = \frac{\partial}{\partial n} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$ である。又、次のことを分ることにする:

(1) と (2) の (1)'' は同値である。(cf. Sato [6])

(1)''': $\overline{L H_\alpha}$ は \mathbb{R}^n 上の M -semigroup を生成する。(α > 0)

簡単のため D を上半平面とすると

$$\overline{L H_0} \varphi(x) = a(x) \varphi'(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi(x+u) - \varphi(x) - \frac{u}{1+u^2} \varphi(x) \right\} \frac{du}{\pi u^2}$$

$$\equiv A \varphi(x), \quad \varphi \in C_K^2(\mathbb{R}^1)$$

と分る。上の式の右辺の右 = 項は 1次元 symmetric Cauchy process の generator を φ に作用させた形である。

上の議論で $\frac{1}{2}\Delta$ 及 $u'' \frac{\partial u}{\partial n}$ の代りに

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{(1+2a)}{y} \frac{d}{dy}, \quad S_y u(x,0) \equiv \lim_{y \downarrow 0} \left[y^{1+2a} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \right]$$

を考へれば symmetric Cauchy process の generator の λ には $-2a$ 位の symmetric stable process の generator が出てくる。(但し, $-1 < a < 0$). (cf. S.A. Molčanov - E. Ostrovsky [3], S. Watanabe [12])

従つて, $l=l(x)$; non-tangential inward direction に対し, $+x$ 方向への制限なしに (1) を解くには, まず A に対応する Markov process を定めなくては必要になる.

そのためには, 次の確率積分方程式

$$(2) \quad x(t) = x + \int_0^t a(x(s)) ds + l(t), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0.$$

(但し, $(\Omega, l(t), P)$: symmetric stable process, $l(0)=0$) の解の存在及び一意性を示せばよい. $\lambda < 0$ による一意性から云へば, 解の Markov 性及び, A に対応する Markov process の一意性を云へる.

§2. 結果

(2) の解の存在については, Skorohod の方法及び, それを拡張した Krylov の方法が使えて, 比較的容易に示せるので主として, 一意性についての結果を述べる. 又以下の結果もある部分は, 円周上の場合や多次元でも成立するが, 一次元空間の場合が, 比較的により易いのでこの場合のみ

11の結果を示す。

$(\Omega, l(t), \mathcal{B}_t, P)$ を time homogeneous Lévy process とする。
 $l(0) = 0$. $E[e^{iz l(t)}] = e^{t\psi(z)}$ とする。
 $l(t) - l(s) \perp \mathcal{B}_s$ ($s < t$). $l(t)$ は (\mathcal{B}_t) -well adapted.

$$(2) \quad x(t) = x + \int_0^t a(x(s)) ds + l(t), \quad x \in \mathbb{R}^1, t \geq 0.$$

Def: $x(t) = x(t, x)$ は (\mathcal{B}_t) -well adapted, right conti.

かつ left limit を持つ ($\forall t > 0$). さらに (2) を P -a.s. 1 =
 み出すとき $x(t)$ を (2) の解と"いう。

Def: (2) の解が (pathwise) unique とは $x(t, x)$,
 $y(t, x)$ が (2) の任意の 2 つの解 となるとき。

$$P(x(t, x) = y(t, x) \quad \forall t \geq 0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

かつ成立する = ことを言う。

Theorem 1 - 一意性 (cf. [9], [10], [12])

$$(1^\circ) \quad \frac{1}{\operatorname{Re} \psi(z)} = o\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

ならば、任意の实数値有界連続函数 $a(x)$ に対し、(2) の解は
 unique である。

$$(2^\circ) \quad \frac{1}{\operatorname{Re} \psi(z)} \nrightarrow o\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

ならば、任意の実数値有界可測函数 $a(x)$ に対し、(2)の解は unique である。

(注) 1. symmetric Cauchy process が $l(t)$ の場合は (1°) の条件を代へたが、 $l(t)$ が、 $1 < \alpha \leq 2$ なる α 位の symmetric stable process ならば、(2°) の条件を代へたが。

(注) 2. Blumenthal - Gettoor [1] の定義 (すなわち $l(t)$ の lower index α'' を用いければ)、(2°) の条件は $\alpha'' > 1$ と同じになる。但し、 $\alpha'' = \sup \{ \beta \geq 0 ; |z|^{-\beta} \operatorname{Re} \psi(z) \rightarrow 0 \text{ as } |z| \rightarrow \infty \}$

(注) 3. (1)の問題は $a(x)$ が有界連続ならば解ける。(同様に、 $\frac{1}{2}\Delta$ と $\frac{\partial}{\partial x} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$ を代へ $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{(1+2a)}{y} \frac{d}{dy}$ と $\delta_y + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$ であるか否かによる場合も同様に解ける)

Theorem 2 (S. Watanabe (12))

$l(t)$ の index $\alpha < 1$ ならば、ある有界連続函数 $a(x)$ に対し、(2)の解は unique である。但し

$$\alpha = \inf \left\{ \beta > 0 ; \int_{|u| < 1} |u|^\beta \nu(du) < \infty \right\}$$

$\nu(du)$ は $l(t)$ の Lévy measure.

(注) 4. 一般に $\alpha'' \leq \alpha$. $l(t)$ が α 位の symmetric

stable process ならば $\alpha = \alpha' = \delta$. よって, $l(t)$ が symmetric stable process の場合について, α の有界連続函数 $a(x)$ に対し (2) の解が一意的に存在する. $a(x)$ が Lipschitz 連続であれば, 常に解は unique である. $\alpha < 1$ のときは, $a(x)$ が Hölder 連続のときは, 面白い事情が生じる. α が予想される. α のときは後述する. (cf §3. II)

Theorem 1 の略証.

多次元の場合に全く同様であるが, 新しく (一意的性の概念を定義する. (Stroock - Varadhan ~~の~~ [13] に従って)

$$W = D([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1) \equiv \{ \omega; \omega \text{ は } [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ mapping} \}$$

右連続, 左極限をもつ, $\omega(t) = x(t, \omega) = x(t)$ とおく.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(x(s); s \leq t) \equiv x(s), s \leq t \text{ を可測にする最小の } \sigma\text{-}$$

algebra. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$

$$A = a(x) \frac{d}{dx} + l(t) \text{ の generator}$$

Def. (W, \mathcal{F}) 上の確率測度 P が A に付する $x \in \mathbb{R}^1$ を出発する stochastic equation の解 とは, P が

$$P(x(0) = x) = 1 \quad \text{かつ}$$

$$E \left[e^{iZ(\xi(t) - \xi(s))} \mid \mathcal{F}_s \right] = e^{(t-s)A(Z)} \quad (t > s)$$

をみたすときは云う。但し、 E は P による平均で、 $\xi(t)$ は

$$\xi(t) = x(t) - x - \int_0^t a(x(s)) ds$$

で定義される process. 上の定義は、

$$X_\theta(t) = \exp \left\{ i\theta(x(t) - x(0)) - i\theta \int_0^t a(x(s)) ds - t\psi(\theta) \right\} \quad \left(\begin{array}{l} t \geq 0 \\ \theta \in R^1 \end{array} \right)$$

とおいたとき、 P は $P(x(0) = x) = 1$ かつ $(X_\theta(t), \mathcal{F}_t, P)$ が、 $\forall \theta \in R^1$ に対し、martingale になるという = と同値である。

⑤. 上の定義は、 $a = a(t, x)$ ($t \geq 0, x \in R^d$) のように、時間 t に依存している場合にも同様に定義できる、即ち、

$\mathcal{F}_\beta^\alpha \equiv \sigma(x(s); \alpha \leq s \leq \beta)$, $\mathcal{F}_\beta \equiv \mathcal{F}_\beta^0$, $\mathcal{F}^\alpha \equiv \mathcal{F}_\infty^\alpha$ とおくとき、 (Ω, \mathcal{F}^s) 上の probability measure P が

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + B$$

$$\left(\begin{array}{l} B \text{ は 時間的-様 Lévy process の generator} \\ a(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_d(t, x)), x = (x_1, \dots, x_d) \end{array} \right)$$

に付すとした、時刻 $s \geq 0$ で、 $x \in R^d$ を出発する martingale problem (stochastic equation) の解とは、 $P(x(s) = x) = 1$ かつ

$$X_0^s(t) = \exp \left\{ i \langle \theta, x(t) - x(s) \rangle - i \langle \theta, \int_s^t a(u, x(u)) du \rangle - (t-s) \psi(\theta) \right\} \\ (t \geq s, \theta \in \mathbb{R}^d)$$

と書いたとき, $(X_0^s(t), \mathcal{F}_t^s, P)_{t \geq s}$ $\gamma \mapsto \forall \theta \in \mathbb{R}^d$ に対し,

martingale になる = と定義する. 但し, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^d の内積

で, $\psi(\theta)$ は B に対応する d -次元 Lévy process $\xi(t)$ による

$$E[e^{i \langle \theta, \xi(1) \rangle}] = e^{\psi(\theta)} \quad \text{で定義された.}$$

定理 1 の略証は以下の通り. (1°) より 定数 $K > 0, C > 0$ が存在して

$$|e^{t\psi(z)}| \leq K e^{-\frac{t}{C}|z|^2} \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0$$

従って, $l(t)$ の推移確率 $P(t, dx)$ ($t > 0$) は 連続な density

$p(t, x)$ をもち, $p(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($\forall p \geq 1$) 従って

Plancherel の定理を使えば, $l(t)$ の semigroup を H_t とすれば,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |H_t f(x)| \leq \frac{K\sqrt{C}}{\sqrt{t}} \|f\|_2 \quad \text{for } \forall f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

又, (1°) より $\frac{d}{dx} G_\lambda$ は $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上の bounded operator を定義する. 但し, G_λ は $l(t)$ の resolvent.

従って, [10] と全く同様にして, 十分定数は "接近", 有界可測関数 $a(x)$ に対し, $A = a(x) \frac{d}{dx} + B$ に付する.

stochastic equation は $\forall x \in R^1$ に対し, x を出発する解を
 唯一持つことを示せる。

更に (2°) の仮定の下では, 任意の有界可測函数 $a(x)$ に対し
 $a(x) \frac{d}{dx} a(x)$ の L_2 -norm は 十分大きな λ に対しては 常に
 1 より小さくなる。従って, 任意の有界可測函数 $a(x)$ に
 対し, A に対する stochastic equation は, 任意の出発
 点 x に対して, 唯一の解を持つ。故に, 次の Proposition
 から定理は示せる。

Proposition 1

$a(t, x)$ ($t \geq 0, x \in R^1$) を有界可測函数とするとき, 方程式

$$\xi(t) = x + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds$$

の 2 つの解 $\xi(t), \eta(t)$ とするとき, $\xi(t) \wedge \eta(t), \xi(t) \vee \eta(t)$
 も解になる。 $a \wedge b = \min(a, b), a \vee b = \max(a, b)$ 。

~~(1°)~~ (1°) で $a(x)$ が有界連続のときは, 次の Proposition
 を使えばよい。

Proposition 2

$a(x)$ が有界連続ならば, (2) の最大解 $\bar{x}(t, x)$ と最小解
 $\underline{x}(t, x)$ が存在し, 共に $(\bar{x}(t, x), \mathcal{B}_t, P)$ $(\underline{x}(t, x), \mathcal{B}_t, P)$
 は Hunt process になる。

定理 2 の略証 (S. Watanabe [12])

$a(x)$ とし a bounded continuous increasing function と
 $x=0$ 以外で Lipschitz continuous と奇函数 と仮定して ϵ の
 を取る. そのとき (2) に対して 次の比較定理が成立する.

Proposition 3

$$Y(t) \leq x + l(t) + \int_0^t a(Y(s)) ds \quad t \in [0, t_0]$$

(\Rightarrow)

ならば

$$Y(t) \leq \bar{x}(t, x) \quad (\text{resp. } Y(t) \geq \underline{x}(t, x))$$

そこで 次の方程式

$$(3) \quad y(t) = \frac{1}{c} \int_0^t a(y(s)) ds \quad \left(\text{但し } c > 0, \int_{0+}^t \frac{d\xi}{a(\xi)} < \infty \text{ と} \right)$$

仮定しておく) の最大解 $\bar{y}_c(t) (> 0 \quad \forall t > 0)$, 最小解
 $\underline{y}_c(t) = -\bar{y}_c(t)$ と $\bar{x}(t, 0), \underline{x}(t, 0)$ を夫々比較する.

そして 次の Proposition を得る.

Proposition 4

$$P_c \equiv \inf \{ t ; |l(t)| > \bar{y}_c(t) \} \text{ とおくと}$$

$$P(P_c > 0) = 1 \text{ とする様な定数 } c \geq 2 \text{ が存在する}$$

ならば $\delta = \delta(\omega) > 0$ が存在して,

$$\bar{x}(t, 0) > \underline{x}(t, 0) \quad (0 < t \leq \delta)$$

$\alpha = 2$ 特ニ

$$a(x) = |x|^\beta \operatorname{sgn} x \quad (x=0 \text{ の近傍で}) \quad 0 < \beta < 1 - \alpha$$

ととる。 (3) の最大解 $y_c(t) = \{c(t-\beta)\}^{\frac{1}{1-\beta}} t^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (c \geq 2)$
 だから、次下述べる Khintchin の定理 (Prop 5 (i))
 を使って

$$P(P_c > 0) = 1 \quad (c \geq 2)$$

となり、Prop 4 より一意性がかわれて、定理 2 が示せた

Proposition 5 [Khintchin の定理] (cf [1])

$l(t)$ を特向的一様な Lévy process とし、 α をその index とすれば、

$$(i) \quad \beta > \alpha \text{ ならば} \quad P\left(\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\beta} l(t) = 0\right) = 1$$

$$(ii) \quad \beta < \alpha \text{ ならば} \quad P\left(\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} t^{-\beta} |l(t)| = +\infty\right) = 1$$

§ 3

まず、定理 1 を拡張、精密化した結果について述べる。しかし、まだ完全に満足すべき状態には到っていないように思う。次に方法は違つか、関連する問題として、本尾氏の結果を紹介する。

(I) 多次元への拡張

$l(t)$ を N 次元の spherically symmetric stable process
 として index $\alpha \geq 1$ とすると、 $2 \geq \alpha > 1$ ならば、

$a(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_N(t, x))$ として、各 $a_i(t, x)$ が有界
 可測ならば、(註) 5 で述べた martingale problem の解は
 唯一つ存在する。この時に必要な詳細 (cf. [10] の Prop 1.1, Lemma 2.2)
 は Motoo [5] でのやり方をすれば得られる (subordination を
 使う)。 $\alpha = 1$ のときは各 $a_i(t, x)$ が有界連続ならば、
 martingale problem の解は唯一つである。(cf. [10])

(II). $l(t)$ の index $\alpha < 1$ の場合 (S. Watanabe [12])

この場合は、定理 2 でみた様に、一般には一意性は成り立
 ちない。これは、どんな $a(x)$ に対しても、 $l(t)$ との関連の下に、一
 意性が成り立つのかという問題にたどり着く。S. Watanabe
 の結果を大略紹介すれば、次の様になる。

方程式 (2) において、 $l(t)$ を symmetric Lévy process として
 $a(x)$ は定理 2 の証明中の条件 (cf. p11) の上に更に、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(cx)}{a(x)} > 0 \quad \forall c > 0$$

をみたすと仮定する。

$\{y^n(t)\}$ を $y^0(t) \equiv 1$, $y^n(t) = \int_0^t a(y^{n-1}(s)) ds$
 として定義し、

$$\sigma_c^m = \inf \{t; |l(t)| > c y^{(m)}(t)\}$$

と仮定するとき.

Proposition 6

ある番号 n が存在して, 任意の $c > 0$ に対し

$$P(\sigma_c^m = 0) = 1 \quad \text{なるはず}$$

$$\bar{x}(t, x) \equiv \underline{x}(t, x) \quad \text{a.s. } P \quad \forall x$$

(説明)

出発点に関する比較定理 (例 えば $x \leq 0 \Rightarrow \bar{x}(t, x) \leq \underline{x}(t, 0)$)

と, $l(t)$ は $y^{(m)}(t)$ に比して "いくらでも早く 原点の両側に出る" と使えば, $\bar{x}(t, 0) = \underline{x}(t, 0)$ の場合, 原点以外から出発した解は 原点に着くまでには, 一意性から, $\bar{x}(t)$ と $\underline{x}(t)$ の強マルコフ性を使えば, Prop の結論を得る.

この結果を使うと, 例 えば, $a(x) = |x|^\beta \operatorname{sgn} x$ ($x=0$ の近傍)

$l(t)$ を α 位の symmetric stable process ($0 < \alpha < 1$)

とするとき, Khintchin の定理 (Prop 5 の (ii)) を使えば.

定理 2 の結果と並べて述べると

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1-\beta} \Rightarrow (2) \text{ の uniqueness は 成立する}$$

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{1-\beta} \Rightarrow (2) \text{ の uniqueness は 成立しない (Th. 2)}$$

が分る.

(Ⅲ) 定理 1 の (1°) の拡張 (H. Tanaka [8])

定理 1 (1°) で $a(x)$ が有界可測の場合に、一意性が成り立つかどうかというところが問題になる。証明中に述べた様に $a(x)$ が定数に充分近ければよいが、そこでこの場合にはついで H. Tanaka の結果の概要を紹介する。

$a(x)$ は有界かつ $x=0$ 以外で Lipschitz continuous 即ち $x, y > 0$ 又は $x, y < 0$ ならば

$$|a(x) - a(y)| \leq K|x - y|$$

が成り立つ定数 $K > 0$ が存在する。又 $a(0) = 0$ とする。

$$a_+ \equiv \lim_{x \downarrow 0} a(x), \quad a_- \equiv \lim_{x \uparrow 0} a(x) \quad \text{とある。}$$

$a_+ \neq a_-$ のときを考える。

Lévy process $l(t)$ に対し次の条件を考える。 $p > 0$ に対し

$$\sigma_+ = \inf \{ t > 0 ; l(t) + pt < 0 \}$$

$$\sigma_- = \inf \{ t > 0 ; l(t) - pt > 0 \}$$

とある。

$$(Q_+) \quad \forall p > 0 \text{ に対し, } P(\sigma_+ = 0) = 1$$

$$(Q_-) \quad \forall p > 0 \text{ に対し, } P(\sigma_- = 0) = 1$$

例えば, index $\alpha \geq 1$ なる symmetric stable process は (Q_+) , (Q_-) をみたしてゐる.

Proposition 7

$a(x)$ を奇函数とすると

(1°) $a_+ < a_-$ ならば symmetric Lévy process $l(t)$ に対し (2) の解は唯一存在する.

(2°) $a_+ > a_-$ ならば (Q_+) か又は (Q_-) をみたす symmetric Lévy process $l(t)$ に対し (2) の解は唯一存在する.

(説明)

原点での $a(x)$ の特異性を考慮して, 次の方程式

$$(4) \begin{cases} x(t) = x + \int_0^t a(x(s)) ds + \int_0^t \delta(s) ds + l(t) \\ a_- \leq \delta(s) \leq a_+ \quad \text{or} \quad a_+ \leq \delta(s) \leq a_- \\ x(s) \neq 0 \Rightarrow \delta(s) = 0 \end{cases}$$

を考える.

$a_+ < a_-$ のときは, 右連続, 左極限を持つ任意の函数 $l(t)$ に対し, 各出発点 x 毎に唯一解 $x(t)$ を持つ. $l(t)$ を Lévy process とすると定数 a_0 ($a_+ \leq a_0 \leq a_-$) が存在して, (4) の unique solution $x(t, x) = x(t)$ は次の方程式 (4') をみたす.

$$(4)' \quad x(t) = x + \int_0^t a(x(s)) ds + a_0 \int_0^t \chi(x(s)=0) ds + l(t) \quad (\text{a.s.P})$$

よって、特に $l(t)$ が symmetric で $a(x)$ が奇函数ならば
 $x=0$ のときを考慮して 解の一斉性から $a_0=0$ となり
 方程式 (4') は (2) になる。従って (1°) の主張が成り立つ。

$a_+ > a_-$ のときは、一般に (4) の解の uniqueness は云
 えないが、最大解 $\bar{x}(t, x)$ と最小解 $\underline{x}(t, x)$ が存在し、 $l(t)$
 が Lévy process のときは、定数 \bar{a}_0 ($a_- \leq \bar{a}_0 \leq a_+$)
 が存在して、 $\bar{x}(t) = \bar{x}(t, x)$ は

$$(4) \quad \bar{x}(t) = x + \int_0^t a(\bar{x}(s)) ds + \bar{a}_0 \int_0^t \chi(\bar{x}(s)=0) ds + l(t) \quad (\text{a.s.P})$$

をみたし、強マルコフ過程になる。 $\underline{x}(t)$ に対しても同様で
 ある。 $\xi = 2$ 、 (a_+) が成り立つと仮定すれば、 $\bar{x}(t, 0)$ は
 短い時間 $-t$ より左側に出る。 $\xi = 2$ (4) の解の出発点に
 関する比較定理を使って $\bar{x}(t, 0) = \underline{x}(t, 0)$ a.s.P が分
 る。原点以外から出た解は原点に着くまでは一斉だから
 $\bar{x}(t)$ と $\underline{x}(t)$ の強マルコフ性を使えば、

$$\bar{x}(t, x) = \underline{x}(t, x) \quad \text{a.s.P} \quad \forall x$$

従って $\bar{a}_0 = a_0$ となり、後は (1°) と同様に (2
 (2°) の主張を得る。

(IV) operator A の一般化 (M. Motoo [5])

拡散過程の境界上の process に対応するものを構成する立場からすれば, operator A の jump part をより一般に (つまり Markov process を生成する ω を示す ω が望まれる (cf. [6] p)

それには 11 の Motoo の結果を紹介する.

今迄の operator A の Levy measure の term を一般に (左次の operator A を考える.

$$Au(x) = \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \int_{|z| \leq 1} \{u(x+z) - u(x) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i\} p(x, dz)$$

$$\begin{aligned} p(x, dz) &= \omega_N \varphi(x, z) |z|^{-(N+\alpha)} dz & x \in \mathbb{R}^N \\ &= \varphi(x, z) r^{-(N+\alpha)} dr d\omega & dz \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^N \ni z = (r, \omega)$: 球面極座標 $r = |z|$, $\frac{1}{\omega_N}$: \mathbb{R}^N の単位球の表面積.

次の仮定をおく

(A) $1 \leq \alpha < 2$

(B) $a_i(x), \varphi(x, z)$: 可測函数

$$|a_i(x)| \leq M, \quad 0 < L_1 \leq \varphi(x, z) \leq L_2$$

ある定数 $M, L_1, L_2 > 0$ が存在する.

(C) $\alpha = 1$ のときは限り, 以下を仮定する.

$$|\varphi(x, z) - \varphi(x, 0)| \leq L_3 |z|^\alpha$$

ここで定数 $L_3, \alpha > 0$ が存在する。

② $\varphi(x, z) \equiv \text{constant}$ の場合が、今迄考えて来た case である。積分範囲を $|z| \leq 1$ と制限していいのは、最終的には不必要。

上の仮定の下で、次の問題を考える。

次の H.1 ~ H.4 を満たす $\{H_\lambda\}_{\lambda > 0}$ は、唯一つ存在するか？

H.1 $\{H_\lambda\}_{\lambda > 0}$ は $C_0(\mathbb{R}^N)$ 上の resolvent である

H.2 $0 \leq \lambda H_\lambda \leq 1$

H.3 $\lambda H_\lambda f \rightarrow f \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \text{in } C_0(\mathbb{R}^N)$

H.4 $H_\lambda(\lambda - A)f = f \quad \text{for } f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$

このことは、更に $a_i(x)$ と $\varphi(x, z)$ に連続性を仮定すれば、存在については真定的に解決される。しかし、以下の途中の評価においては必要ないが、存在のためと、途中の議論においても連続性を仮定すれば、たぶん簡単になるので、以下においてはすべて ~~連続~~ $a_i(x)$ と $\varphi(x, z)$ の連続性を仮定する。上の記号の意味を説明すると、 $C_0(\mathbb{R}^N)$ は \mathbb{R}^N 上の実数値連続関数で無限遠で 0 となるもの全体で、sup norm で

Banach space と考え、H.3 の収束もその意味である。

$C^2(\mathbb{R}^N)$ は 2 階迄の偏導函数がオハル $C_0(\mathbb{R}^N)$ に属する全体の体。

存在証明の方法は $1 \leq \eta < \delta < 2$ なる δ をとり

$$B u(x) = \int_{|z| \leq 1} \left\{ u(x+z) - u(x) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i \right\} \frac{\omega_N}{|z|^{N+\delta}} dz$$

$$A^\varepsilon = \varepsilon B + A$$

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(x, dz) &= (\varepsilon |z|^{-N+\delta} + \varphi(x, z) |z|^{-N+\eta}) \omega_N dz \\ &= (\varepsilon r^{-N+\delta} + \varphi(x, z) r^{-N+\eta}) dr d\omega \end{aligned}$$

とおく。 A^ε に対応する resolvent の存在を述べ、 $\varepsilon > 0$ とし $\{H_\lambda\}_{\lambda > 0}$ を定める。

そのため、 εB の resolvent の性質が「必要なので」以下に述べる。本質的には index δ の spherically symmetric stable process の resolvent を扱うわけだから、その性質を導き出す。証明には subordination を使えばよいから省略する。

Proposition 8

G_λ を index δ ($1 < \delta < 2$) の N -dim. spherically symmetric stable process の resolvent とするとき

1°) 定数 $C = C(\delta)$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda f(x) \right| \leq C \lambda^{\frac{1}{\delta}-1} \|f\|, \quad \forall f \in B(S)$$

2°) $0 < \delta' < \delta$ に対し δ' に対し 定数 $C = C(\delta, \delta')$ が存在する

$$2. \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda f(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda f(y) \right| \leq C |x-y|^{\delta'(1-\frac{1}{\delta})} \lambda^{-(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{\delta'}{\delta})} \|f\|$$

$\forall f \in B(S)$

3°) $f \in B(S)$ に対し

$$G_\lambda f(x) = 0 \quad \forall x \iff f(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \quad (\text{Lebesgue measure})$$

∴ $B(S)$ は \mathbb{R}^N 上の bounded measurable function 全体

$$\|f\| = \sup_x |f(x)|.$$

③ εB に対しある resolvent を G_λ^ε とするとき
 G_λ^ε に対しては上の 1°) ~ 3°) がすべて成立する。

Proposition 9

$H_\lambda^\varepsilon = G_\lambda^\varepsilon (I - A G_\lambda^\varepsilon)^{-1}$ とおくと $\{H_\lambda^\varepsilon\}_{\lambda > 0}$ は
 各 $\varepsilon > 0$ に対し H.1 ~ H.4 を満たす。

proof)

I は $C_0(\mathbb{R}^N)$ 上の恒等作用素である。Prop. 8 より、 $A G_\lambda^\varepsilon$
 は $C_0(\mathbb{R}^N)$ 上の linear operator で十分大きな λ_0 には

し, $\|A G_\lambda^\varepsilon\| < 1$ for $\forall \lambda \gg \lambda_0$

とあるから, H_λ^ε は $C_0(\mathbb{R}^N)$ 上の作用素として定義できる. しかも $\lambda \gg \lambda_0$ に対し H.1 ~ H.4 を満たすことは明らか. $\lambda < \lambda_0$ に対しても H.1 ~ H.4 を満たす様に拡張できよから, Prop. は示せた.

次に $\{H_\lambda^\varepsilon f\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ が $C_0(\mathbb{R}^N)$ の中で相対コンパクトになることを示すための幾つかの評価を準備する.

$\{H_\lambda^\varepsilon\}_{\lambda > 0}$ は対応する Hunt process を path space 上表現して $\{X_t, P_x^\varepsilon\}$ と表わす. 尚違ふおそれの無いときは以後 suffix ε は落す場合もある.

Lemma 1

$$0 < R \leq 1, \quad \sigma = \sigma_R = \inf\{t > 0; |X_t - X_0| \geq R\}$$

とあるとき, 定数 $0 < C_1 < C_2$ が存在して

$$\frac{C_1}{\varepsilon R^{-\delta} + R^{-\eta}} \leq E_a^\varepsilon(\sigma_R) \leq \frac{C_2}{\varepsilon R^{-\delta} + R^{-\eta}} \quad \left(\begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{R}^N \\ 0 < \varepsilon \leq 1 \end{array} \right)$$

が成立する. 但し $C_i = C_i(\mathcal{A})$ (仮定 (A) ~ (C) の中に出て来る定数 $\eta, \delta, M, L_1, L_2, N, \alpha$ 上依存する定数を $C = C(\mathcal{A})$ とかく = とにする.

(略証)

$\eta > 1$ のときは説明する.

$R \leq p < \delta$ とし,

$$u(x) = \begin{cases} |x-a|^2 & \text{if } |x-a| \leq p \\ \delta^2 & \text{if } |x-a| \geq \delta \end{cases} \quad u \in C^2(\mathbb{R}^N)$$

u をとる。なお、 u は $|x-a|$ の函数として単調増加になるようにして置く。

$|x-a| \leq R$ なる B

$$\left| \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq 2M \sqrt{N} R^{2-\gamma}$$

$$\int_{|z| \leq 1} \left\{ u(x+z) - u(x) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i \right\} P_\varepsilon(x, dz)$$

$$\leq \int_{\substack{|z+x-a| \leq p \\ |z| \leq 1}} |z|^2 P_\varepsilon(x, dz) + \int_{\substack{|z+x-a| \geq p \\ |z| \leq 1}} \left\{ u(x+z) - u(x) \right\} P_\varepsilon(x, dz) + \int_{\substack{|z+x-a| \geq p \\ |z| \leq 1}} \left| \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i \right| P_\varepsilon(x, dz)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$\varepsilon \frac{(p-R)^{2-\delta}}{2-\delta} + L_1 \frac{(p-R)^{2-\gamma}}{2-\gamma} \leq I_1 \leq \varepsilon \frac{(p+R)^{2-\delta}}{2-\delta} + L_2 \frac{(p+R)^{2-\gamma}}{2-\gamma}$$

$$0 \leq I_2 \leq \delta^2 \left(\frac{\varepsilon}{\delta(p-R)^\delta} + \frac{L_2}{\gamma(p-R)^\gamma} \right)$$

$$I_3 \leq 2\sqrt{N}R \left(\frac{\varepsilon}{(\delta-1)(p-R)^{\delta-1}} + \frac{L_2}{(\gamma-1)(p-R)^{\gamma-1}} \right)$$

従って $p = (c+1)R$ $c > 0$ とおくと

$$A^\varepsilon u(x) \geq \varepsilon \frac{C^{2-\delta} R^{2-\delta}}{2-\delta} + L_1 \frac{C^{2-\eta} R^{2-\eta}}{2-\eta} - \frac{2\sqrt{N}\varepsilon}{\delta-1} C^{1-\delta} R^{2-\delta} \\ - \frac{2\sqrt{N}L_2 C^{1-\eta} R^{2-\eta}}{\eta-1} - 2M\sqrt{N} R^{2-\eta}$$

$\therefore \exists c > 0$ なる

$$\left\{ \begin{array}{l} c > 2 \frac{2-\delta}{\delta-1} 2\sqrt{N} \\ c > 3 \cdot \frac{2-\eta}{L_1} \frac{2\sqrt{N}L_2}{\eta-1} \\ c^{2-\eta} > 3 \cdot \frac{2-\eta}{L_1} 2M\sqrt{N} \end{array} \right.$$

を十分条件として定めると、次の様な定数 C_1 が定まる。

$$A^\varepsilon u(x) \geq C_1 (\varepsilon R^{2-\delta} + R^{2-\eta})$$

同様に $c_1 = \delta R$, $\delta = (c+2)R$ とおくと定数 C_2 が定まる。

$$A^\varepsilon u(x) \leq C_2 (\varepsilon R^{2-\delta} + R^{2-\eta})$$

$$R^2 \leq E_a^\varepsilon(u(x_0)) = E_a^\varepsilon\left(\int_0^\delta A^\varepsilon u(x_t) dt\right)$$

$$\delta^2 \geq E_a^\varepsilon(u(x_0))$$

より 証明出来た。

$\eta = 1$ のときは I_3 の評価で 仮定 (C) を適用すれば、大体上と同様である。

$$u(x) = u^\varepsilon(x) = H_\lambda^\varepsilon f(x) = E_x^\varepsilon \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t) dt \right) \quad (\lambda > 0)$$

$$\Omega = \Omega(a, R) = \{y; |y-a| \leq R\}$$

$$u_R(x) = u_R^\varepsilon(x) = E_x^\varepsilon (u(x_\sigma)) \quad \sigma = \sigma_R = \inf \{t > 0; |x_t - x_0| > R\}$$

$$M(R) \equiv M^\varepsilon(a, R) \equiv \sup_{x \in \Omega(a, R)} u(x)$$

$$m(R) \equiv m^\varepsilon(a, R) \equiv \inf_{x \in \Omega(a, R)} u(x)$$

とある。次の Lemma は $u^\varepsilon(x) = H_\lambda^\varepsilon f(x)$ の同程度連続性を示すのに「必要」である。

Lemma 2

1°) 定数 $C_3 = C_3(A, \lambda, \|f\|)$ が存在して

$$\sup_{x \in \Omega(a, R)} |u(x) - u_R(x)| \leq C_3 R \quad (\leq C_3 \sqrt{R}) \quad (R \leq 1)$$

2°) 次の何れかが成立する。

定数 $C_4 = C_4(A) > 0$ と $C_5 = C_5(A, \lambda, \|f\|) > 0$ が存在して, $\varepsilon < R \leq 2^{-6}$ ならば

$$i) \quad M(R) \leq M(\sqrt{R}) + C_5 \sqrt{R} - C_4 \frac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2}$$

又は

$$ii) \quad m(R) \geq m(\sqrt{R}) - C_5 \sqrt{R} + C_4 \frac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2}$$

proof)

$$1^\circ) \text{ は } |u(x) - u_R(x)| \leq |u(x) - E_x(e^{-\lambda \sigma} u(x_0))| \\ + |E_x(e^{-\lambda \sigma} u(x_0)) - u_R(x)|$$

より、明らか。

2°) は、

$$u_R(x) = E_x(u(x_0); x_0 \in \Omega(3R)) \\ + E_x(u(x_0); x_0 \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R)) \\ + E_x(u(x_0); x_0 \in \Omega(\sqrt{R}) \setminus \Omega(4R)) \\ + E_x(u(x_0); x_0 \in \Omega(\sqrt{R})^c)$$

$$\text{但し } \Omega(r) = \Omega(a, r)$$

== 2° 次は ε を使う、一般に

$$\left[\begin{array}{l} \Omega(x, R)^c \supset A \text{ ならば} \\ E_x(g(x_0); x_0 \in A) = E_x\left(\int_0^\varepsilon dt \int_{x_t+z \in A} g(x_t+z) P_\varepsilon(x_t, dz)\right) \end{array} \right.$$

より、 $\varepsilon < R \leq 2^{-6}$, $|x-a| \leq R$ より、

$$x_t+z \in \Omega(\sqrt{R})^c \text{ ならば } |z| \geq \frac{3}{4}\sqrt{R}$$

従って、

$$P_x(x_0 \in \Omega(a, \sqrt{R})^c) \leq C\sqrt{R} \quad \forall x \in \Omega(a, R)$$

よって定数 C が存在する。 $C=C(R)$

従って、

$$A^+ = \left\{ x \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R) ; u(x) \geq \frac{M(\sqrt{R}) + m(\sqrt{R})}{2} \right\}$$

$$A^- = \left\{ x \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R) ; u(x) < \frac{M(\sqrt{R}) + m(\sqrt{R})}{2} \right\}$$

と書くことにする。

$$u_R(x) = E_x [u(x_0) ; x_0 \in \Omega(3R) \cup (\Omega(\sqrt{R}) \setminus \Omega(4R))]$$

$$+ E_x [u(x_0) ; x_0 \in \Omega(\sqrt{R})^c]$$

$$+ E_x [M(\sqrt{R}) ; x_0 \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R)]$$

$$\Rightarrow E_x [M(\sqrt{R}) - u(x_0) ; x_0 \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R)]$$

と書き直せば、 $R \leq 2^{-6}$ 、 $3R < 4R < \sqrt{R}$ により、

$$u_R(x) \leq M(\sqrt{R}) + C\sqrt{R}\|u\| - \frac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2} P_x(x_0 \in A^+)$$

同様に (2)

$$u_R(x) \geq m(\sqrt{R}) - C\sqrt{R}\|u\| + \frac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2} P_x(x_0 \in A^+)$$

を得る。 $|A^-| \geq \frac{1}{2} |\Omega(4R) \setminus \Omega(3R)|$ であり

$$|A^+| \geq \frac{1}{2} |\Omega(4R) \setminus \Omega(3R)| \quad (|A| \text{ は } A \text{ の Lebesgue 測度})$$

より、今 $|A^-| \geq \frac{1}{2} |\Omega(4R) \setminus \Omega(3R)|$ と仮定すると

$$P_x(x_0 \in A^-) = E_x \left(\int_0^\sigma dt \int_{x_t+z \in A^-} P_E(x_t, dz) \right)$$

$$x_t+z \in A^- \text{ ならば } 3R < |x_t+z-a| \leq 4R \text{ により}$$

$$R < |z| \leq 6R$$

続々 乙

$$\begin{aligned}
 \int_{x_t+z \in A^-} P_\varepsilon(x_t, dz) &\geq \int_{x_t+z \in A^-} (\varepsilon |z|^{-(1+\delta)} + L_1 |z|^{-(1+\beta)}) \omega_N |z|^{-(N-1)} dz \\
 &\geq \text{Const.} \frac{\varepsilon \bar{R}^{-\delta} + L_1 \bar{R}^{-\beta}}{R^N} \int_{x_t+z \in A^-} dz \\
 &= \text{Const.} \frac{\varepsilon \bar{R}^{-\delta} + L_1 \bar{R}^{-\beta}}{R^N} |A^-| \\
 &\geq \frac{\text{Const}}{2} \frac{\varepsilon \bar{R}^{-\delta} + L_1 \bar{R}^{-\beta}}{R^N} |\Omega(4R) - \Omega(3R)| \\
 &\geq \frac{5}{2} \text{Const.} \frac{\varepsilon \bar{R}^{-\delta} + L_1 \bar{R}^{-\beta}}{R^N} |\Omega(0,1)|
 \end{aligned}$$

故に Lemma 1 より 定数 $C_6 = C_6(\delta) > 0$ 存在して

$$P_x^\varepsilon(x_\sigma \in A^-) \geq C_6 \quad \forall x \in \Omega(a, R) \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

より 2. (1°) と合わせ (i) を得る.

また $|A^+| \geq \frac{1}{2} |\Omega(4R) - \Omega(3R)|$ なるより (ii) を得る.

Lemma 3

1°) $0 < p < 1$ なる定数 p 存在して (ε と x は independent)

$$E_x^\varepsilon(e^{-\lambda \sigma_N}) \leq p^N, \quad \text{且} \quad \sigma_N = \inf\{t > 0; |x_t - x_0| \geq N\}$$

2°) $f \in B(R^N)$, compact support なる $u = H_\lambda^\varepsilon f$ なるより

$$p(x, \text{supp}(f)) \geq N \quad \text{ならば} \quad (p(x, K) = \inf_{y \in K} |x - y|)$$

$$|u(x)| \leq p^N \|u\| \leq \frac{1}{\lambda} p^N \|f\|$$

proof)

Lemma 1 より 定数 $0 < C_1' < C_2'$ が存在して

$$C_1' R^\delta \leq E_x^\xi(\sigma_R) \leq C_2' R \quad (0 < R \leq 1, 0 < \xi \leq 1, x \in \mathbb{R}^N)$$

従って

$$\begin{aligned} 1 - E_x^\xi(e^{-\lambda \sigma_R}) &\geq \lambda E_x^\xi(\sigma_R) - \frac{1}{2} \lambda^2 E_x^\xi(\sigma_R^2) \\ &\geq \lambda C_1' R^\delta - \lambda^2 (C_2' R)(C_2' \cdot 2R) \\ &= C(\lambda, R) > 0 \quad \text{for sufficiently small } R > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

故に $\sup_{\substack{0 < \xi \leq 1 \\ x \in \mathbb{R}^N}} E_x^\xi(e^{-\lambda \sigma_1}) = p < 1$

後は $\sigma_N = \inf \{t \geq 0 : |x_t - x| \geq N\}$ a.s. $P_x \quad \forall x$

と強マルコフ性を使えば (1) の主張を得る。

$$\begin{aligned} (2) \quad \sigma_R &= \inf \{t \geq 0 : |x_t - x| \geq R\} \quad \text{a.s. } P_x \quad \forall x \\ E_x^\xi(\sigma_R^2) &= E_x^\xi\left(2 \int_0^{\sigma_R} (\sigma_R - s) ds\right) \leq 2 \cdot E_x^\xi\left(\int_0^{\sigma_R} ds E_{x_s}^\xi(\sigma_{2R})\right) \\ &\leq 2 (C_2' R)(C_2' \cdot 2R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2') \quad u(x) &= E_x^\xi\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t) dt\right) \\ &= E_x^\xi\left(\int_0^{\sigma_N} e^{-\lambda t} f(x_t) dt\right) + E_x^\xi\left(e^{-\lambda \sigma_N} E_{x_{\sigma_N}}^\xi\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t) dt\right)\right) \\ &= E_x^\xi\left(e^{-\lambda \sigma_N} u(x_{\sigma_N})\right) \leq p^N \|u\| \end{aligned}$$

Theorem 3 (Motoo [5])

仮定 (A), (B), (C) の下で $a_i(x)$, $\varphi(x, z)$ が共に連続な

ならば H.1 ~ H.4 における resolvent $\{H_\lambda\}_{\lambda > 0}$ が存在

ある. 従って $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ は存在する Hunt process が存在する.

proof)

$$\omega^\varepsilon(a, R) = \omega(U^\varepsilon, a, R) \equiv M^\varepsilon(a, R) - m^\varepsilon(a, R) \quad \text{where}$$

$\in L$, Lemma 2 の 2°) 2" i) から得られるのは

$$m^\varepsilon(a, R) \geq m^\varepsilon(a, \sqrt{R}) \quad (R \leq 1) \quad \text{注意して}$$

$$\omega^\varepsilon(a, R) \leq (1 - C_\varepsilon) \omega^\varepsilon(a, \sqrt{R}) + C_\varepsilon \sqrt{R}$$

よって

$$\omega^\varepsilon(U^\varepsilon, R) \equiv \omega^\varepsilon(R) \equiv \sup_{a \in R^N} \omega^\varepsilon(a, R) \quad \text{where}$$

$$\omega^\varepsilon(R) \leq (1 - C_\varepsilon) \omega^\varepsilon(\sqrt{R}) + C_\varepsilon \sqrt{R}$$

従って

$$\omega^\varepsilon(R) \leq \frac{C_\varepsilon}{C_\varepsilon} \sqrt{R}$$

よって

$$\{U^\varepsilon = H_\lambda^\varepsilon f\}_{\varepsilon>0} \quad \text{は 各 } f \in C_0(S), \lambda>0 \text{ に対して}$$

同程度連続になる. よって, Lemma 3 の (2°) とあわせて

$$\{H_\lambda^\varepsilon f\}_{\varepsilon>0} \quad \text{は 各 } f \in C_K(R^N) \text{ (compact support の連続関数)}$$

に $\lambda>0$ に対して, $C_0(R^N)$ 中 稠密に包含されている.

$C_0(R^N)$ の separability と 各 H_λ^ε の resolvent equation に注意すれば, 列 $\{\varepsilon_n\}$ $\varepsilon_n \downarrow 0$ が存在して

$$\{H_{\lambda}^{\varepsilon_n} f\}_m \quad \text{は } \forall f \in C_0(R^N) \text{ と } \forall \lambda>0 \text{ に対して } m \rightarrow \infty$$

これより、 $C_0(\mathbb{R}^N)$ の元を収束させる。

$$H_\lambda f = \lim_{n \rightarrow \infty} H_\lambda^{\varepsilon_n} f$$

これより $\{H_\lambda\}_{\lambda > 0}$ は H.1, H.2 を満たす = ことは明らか。

又、H.4 を満たす = ことは。

$$H_\lambda^{\varepsilon_n} (\lambda - A) f \rightarrow H_\lambda (\lambda - A) f \quad \forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^N)$$

$n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f &= H_\lambda^{\varepsilon_n} (\lambda - A^{\varepsilon_n}) f \\ &= H_\lambda^{\varepsilon_n} (\lambda - A) f + H_\lambda^{\varepsilon_n} (A - A^{\varepsilon_n}) f \end{aligned}$$

よって

$$\|H_\lambda^{\varepsilon_n} (A - A^{\varepsilon_n}) f\| \leq \frac{1}{\lambda} \| (A - A^{\varepsilon_n}) f \| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

従って、2. H.4 が成り立つ。よって H.3 は H.4 より

$$H_\lambda (\lambda - A) f = f \quad f \in C_K^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\text{よって } \lambda H_\lambda f - H_\lambda A f = f$$

$$H_\lambda A f \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

$$\text{よって } \lambda H_\lambda f \rightarrow f \quad \forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\text{よって } \lambda H_\lambda f \rightarrow f \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

終りに、本尾榮、田中洋、渡辺信三の三先生には、未発表の結果をも自由にみせて頂き、この報告をまとめることのできました。ここに記して、感謝致します。

文 献

- (1) R.M. Blumenthal - R.K. Gettoor ; J. Math. Mech. 10 (1961) 493-516
- (2) N. Ikeda ; Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, 33 (1961) 367-427.
- (3) S.A. Molchanov - E. Ostrovsky ; Theory Prob. Appl. 9 (1970) 127-130.
- (4) M. Motoo ; Proc. 5-th Berkeley Symp. vol. II. part 2 Univ. Calif. Press (1967) 75-110
- (5) M. Motoo ; Generalized stable process の存在 P.S.G. #2-セミナ-講演 (1970, 7)
- (6) K. Sato ; Semigroups and Markov process Lecture note (1968) Univ. Minnesota
- (7) K. Sato - T. Ueno ; Jour. Math. Kyoto Univ. 5 (1965) 529-606
- (8) H. Tanaka ; 加法過程に対する不連続係数 drift の perturbation 未発表

- [9] H. Tanaka - M. Tsuchiya ; Levy process の drift による
 perturbation . 日本数学会講演 (1970.4)
- [10] M. Tsuchiya ; Jour. Math. Kyoto Univ.
 10 (1970) 475-492
- [11] A. D. Wentzel ; Theory, Prob. Appl. 3 (1959) 164-177
- [12] S. Watanabe ; ある種の確率積分方程式の解の
 存在と一意性について . 日本数学会講演 (1970.4)
- [13] D.W. Stroock - S.R.S. Varadhan ; Comm Pure Appl
 Math. XXII (1969) 345-400 & 479-530.