

函数微分方程式における  
微分不等式

東北大学理学部 加藤 順二

常微分方程式論における重要な基本定理の一つは比較定理である。

定理 A.  $x(t)$  を実数値をとる連続的微分可能な函数として、連続な函数  $f(t, x)$  に対して区間  $[a, b]$  上で

$$\dot{x}(t) \leq f(t, x(t))$$

を満足しているものと仮定する。このとき  $u(t)$  を

$$\dot{u} = f(t, u)$$

の  $(a, u(a))$ ,  $u(a) \geq x(a)$ , と適る最大解とすれば、 $u(t)$  が存在する限り、 $[a, b]$  上で

$$x(t) \leq u(t)$$

が成り立っている。

函数微分方程式

$$(1) \quad u(t) = f(t, u_t)$$

を考える。ここで、 $u_t(\theta) = u(t+\theta)$  は  $[-h, 0]$  ( $h > 0$ ) 上の連続な  
 関数の族  $C([-h, 0], \mathbb{R})$  の要素で、 $f(t, \varphi)$  は  $[0, \infty) \times C([-h, 0], \mathbb{R})$   
 上で定義された完全連続な関数とする。今後において、 $x(t)$   
 $\in C([a-h, b], \mathbb{R})$  が更に  $[a, b]$  上で連続的微分可能であれば

$$x(t) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ < \\ \geq \\ > \end{array} \right\} f(t, x_t)$$

をみたしているとき、 $x(t)$  を方程式 (1) の  $[a, b]$  における

$$\left. \begin{array}{l} \text{sub-} \\ \text{st. (= strict) sub-} \\ \text{sup-} \\ \text{st. sup-} \end{array} \right\} \text{sol.}$$

と呼ばれる。更に、 $\varphi, \psi \in C([-h, 0], \mathbb{R})$  が

$$\varphi(\theta) \leq \psi(\theta) \quad (\theta \in [-h, 0])$$

をみたしているとき、これを

$$\varphi < \psi$$

によって表わそう。このとき、定理 A と類似な表現が (1) の  
 sub-sol.  $x(t)$  に対して、条件  $u(a) \geq x(a)$  を  $u_a > x_a$  で置きか  
 えて述べられる。しかしながらこれは一般的には正しくない

その理由としては2つのものが上げられる。

(i) 一般に、最大解は存在しない。

(ii) 解の一意性を仮定したとしても、2つの解  $u^1(t)$ ,  $u^2(t)$  に対して、条件  $u_a^1 < u_a^2$  が必ずしも  $u^1(t) \leq u^2(t)$  ( $t \geq a$ ) を導かない。

例としては、(i) に対しては方程式

$$\dot{u}(t) = -2\{1 + u(t-1)\}\sqrt{|u(t)|}$$

の  $u_0 \equiv 0$  を通る解を考えればよい。通常の意味の最大解が存在しないことがわかる。(ii) に対しては方程式

$$\dot{u}(t) = -u(t-1)$$

の  $u_0^1 \equiv 0$ ,  $u_0^2(\theta) = \theta$  ( $\theta \in [-h, 0]$ ) を初期条件とする2つの解  $u^1(t)$ ,  $u^2(t)$  を考えればよい。

従って、定理Aを函数微分方程式(1)に一般化するためには、 $f(t, y)$  に対してある条件を仮定しなければならない。そして、明らかに、その条件は上の(i), (ii)が起り得ないことの保証を与えるものとなっていなくてはならない。

その条件を述べるまえに、まず、次の補題を述べる。

補題. 函数微分方程式(1)および

$$(2) \quad \dot{u}(t) = f(t, u_t)$$

において、 $f(t, y)$  は  $[0, \infty) \times C([-h, 0], R)$  で定義され完全連続で

$f(t, \varphi)$  に対して条件

(C<sub>0</sub>)  $\varphi < \psi$ ,  $\varphi(0) = \psi(0)$  をみたす任意な  $\varphi, \psi \in C([t_0, 0], R)$  に対して

$$f(t, \varphi) < f(t, \psi)$$

をみたしているものと仮定する。このとき、(1), (2) の解  $u^1(t)$ ,  $u^2(t)$  が初期時  $t = a \geq 0$  において  $u^1_a < u^2_a$  をみたせば、 $t \geq a$  に対して

$$u^1(t) < u^2(t)$$

が成り立っている。

条件 (C<sub>0</sub>) は (ii) が起り得ないためには自然な条件であると考えることができる。そして、常微分方程式のときと全く同様に、任意な  $\varepsilon > 0$  に対して

$$(3) \quad g(t, \varphi) = f(t, \varphi) + \varepsilon$$

とほいて補題を適用して一般化された定理 A が証明できる。

このためには (3) で与えられた  $g(t, \varphi)$  が条件 (C<sub>0</sub>) をみたすための条件として、 $f(t, \varphi)$  が条件：

条件 (C).  $\varphi < \psi$ ,  $\varphi(0) = \psi(0)$  をみたす任意な  $\varphi, \psi \in C([t_0, 0], R)$  に対して

$$f(t, \varphi) \leq f(t, \psi)$$

を満たしていなくてはならない。

この条件は定理 A の一般化のための充分条件であるが、常微分方程式 ( $h=0$ ) の場合にはなんらの制限をも与えておらず、条件 (C<sub>0</sub>) と同様に自然な条件であると考えることが出来る。

このとき、次の定理が得られる。この定理は補題と共に [1] の中で見出すことが出来る。

定理 1. 条件 (C) のもとで、

(1°) 方程式 (1) は任意の初期条件のもとで、最大解および最小解をもつ、

(2°)  $u(t)$  が方程式 (1) の解で、 $x_a(t)$  が区間  $[a, b]$  における方程式 (1) の

$$\left. \begin{array}{l} \text{sub} \\ \text{st. sub} \\ \text{sup} \\ \text{st. sup} \end{array} \right\} \text{-sol. ぞ、} \quad x_a \left\{ \begin{array}{l} < \\ < \\ > \\ > \end{array} \right\} u_a \text{ ならば、} \quad x(t) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ < \\ \geq \\ > \end{array} \right\} u(t)$$

が区間  $(a, b]$  において成り立っている。なおここで、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_3$  の場合に対しては解  $u(t)$  は適当に、すなわち、それぞれ最大解および最小解となるように与えられているものとする。

定理1の系として、直ちに次の定理がえられる。

定理2.  $\bar{\omega}(t)$ ,  $\underline{\omega}(t)$  をそれぞれ(1)の  $[a, b]$  における st. sup-sol. および st. sub-sol. とし、 $u(t) \in (1)$  の解とする。このとき条件(c)のもとで、 $\bar{\omega}_a > x_a > \underline{\omega}_a$  ならば、

$$\bar{\omega}(t) > x(t) > \underline{\omega}(t) \quad (t > a)$$

が成り立っている。

なお、補題において(2)の解  $u^2(t)$  を固定して考える場合は条件(c<sub>0</sub>)において、 $\psi = u^2_t$  の場合を考えると充分である。そのように条件(c<sub>0</sub>)をゆるめることができる。特に方程式(2)が常微分方程式である場合は条件(c<sub>0</sub>)は条件

$$(*) \quad g < \eta_t(t, \varphi(0)) \text{ ならば } f(t, \varphi) < g(t, \varphi(0))$$

(このとき  $f(t, \varphi)$  は条件  $g(t, \psi)$  をみたすという)によっておきかえられる、こゝで、 $\eta(s, t, \psi)$  は点  $(t, \psi)$  を通って左に流れる方程式(2)のなわち

$$(2') \quad \dot{\eta}(t) = g(t, \eta(t))$$

の最大解である。このとき、補題は次の形で述べられる。

定理3.  $f(t, \varphi)$  は条件  $g(t, \psi)$  を満たしていると仮定する。

このとき、(1)と(2')の解  $u^1(t)$ ,  $u^2(t)$  が条件  $u^1_a < u^2_a$  を

みたせば、 $t \geq a$  において  $u^1(t) \leq u^2(t)$  が成り立つ。ここで  $u^1(t)$  が (1) の sub-sol. であっても同様である。

この定理の系として、次のような一般化が得られる。方程式 (1) の代りに、適当な空間の変数  $x$  を助変数とする方程式

$$(4) \quad \dot{u}(t) = f(t; x)$$

を考える。この解を助変数  $x$  に注目して  $u(t; x)$  と表わすことにする。このとき、条件 (\*) を助変数  $x$  に関する条件に読みなおして、条件

$$(**) \quad u_a(x) < \rho_t(t, \frac{u(t; x)}{t}) \quad \text{をみたす、すべての } x \text{ に対して}$$

$$f(t, x) < g(t, u(t; x))$$

が得られる。したがって、

系. 条件 (\*\*) が (4) の解 (あるいは sub-sol.)  $u(t; x)$  に対して成り立っているものと仮定する。このとき、(2') の解  $u^2(t)$  が条件  $u_a(x) < u_a^2$  をみたせば、そのような助変数  $x$  に対しては、 $t \geq a$  において  $u(t; x) \leq u^2(t)$  が成り立つ。

この系は比較定理が Liapunov-like 函数を通じて  $n$  次元の函数微分方程式に対してもある局限された形ではあるが可能であることを示している。すなわち、実数値函数  $V(t, x)$  を

次元函数微分方程式系

$$(5) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

に対して考える。簡単にするために  $V(t, x)$  はどの変数に對しても微分可能 (連続的) であると仮定する。  $x(t) \in C([E_0, \infty), \mathbb{R}^n)$  に対して

$$V(t, x(t)) = u(t; x),$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} V(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x} V(t, x(t)) \cdot F(t, x_t) = f(t; x)$$

と置いて、 $x = x(t)$  はある固定して考えている時間  $t$  に対して、正値  $[t, t+\delta)$  ( $\delta > 0$ ) では初期函数  $x_t$  を持った方程式系 (5) の解であるとすれば、この点  $t$  において  $u(t; x)$  は方程式 (4) の解となっている。このとき、条件 (\*\*\*) における仮定  $u_t(x) < \Omega_t(t, u(t; x))$  は

$$V(t+\theta, x(t+\theta)) \leq \Omega(t+\theta, t, V(t, x(t))) \quad (\theta \in [h, 0])$$

に書きかえられる。したがって、条件 (\*\*\*) を次の補題に従って書き改めることにより、Krasovskii' により与えられた定理 ([2] における定理 31.4) を特別な場合として含む結果を述べることができる。

補題 値  $u$  の取る範囲を  $\{u \geq 0\} = \mathbb{R}^+$  に制限して考える。

$\Phi(t, u)$ ,  $\kappa(t, u)$  を共に  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^+$  で定義された連続函数で条件

$$\Phi(t, u) > \frac{u}{\theta}, \quad \kappa(t, u) > 0 \quad (u > 0),$$

$$\Phi(t, 0) = \kappa(t, 0) = 0$$

かつ、 $\Phi(t, u) - u$ ,  $\kappa(t, u)$  は各固定した  $t$  に対して、 $u$  に関して単調非減少であると仮定する。このとき、任意な  $\varphi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^+)$ ,  $\varphi(0) > 0$ , に対して条件

$$\varphi(\theta) \leq \Phi(t, \varphi(0)) \quad (\theta \in [-h, 0]) \text{ ならば, } f(t, \varphi) < -\kappa(t, \varphi(0))$$

が成り立っているならば、適当に  $g(t, u)$ ,

$$g(t, u) > 0 \quad (u > 0), \quad g(t, 0) = 0$$

をえらんで、 $f(t, \varphi)$  が条件  $-g(t, u)$  をみたしている。ここで、 $u$  が  $\mathbb{R}^+$  全体ではなく、適当な区間  $[0, B]$  の値をとる場合のみを考えると充分であるときは、明らかに、 $\Phi$  および  $\kappa$  に対する単調性の仮定は取り去ってもよい。

証明するためには、 $g(t, u)$  として、 $u > 0$  のとき

$$0 < g(t, u) \leq \min \left\{ \frac{1}{3h}u, \frac{1}{h} \min_{t \leq s \leq t+h} [\Phi(s, \frac{2}{3}u) - \frac{2}{3}u], \kappa(t, u) \right\}$$

をみたす、 $u$  に関して単調非減少な連続関数をえらべばよいことを示せば充分である。

定理 4.  $V(t, x)$  は正定値な実数値関数で連続、かつ、 $V(t, 0) = 0$  とする。系 (5) に対して、(b) で与えられた関数  $f(t; x)$  を考える。このとき、補題で述べた仮定をみたす関数  $\Phi(t, u)$  と  $\kappa(t, u)$  とが存在して、

(7)  $V(t+\theta, x(t+\theta)) \leq \Phi(t, V(t, x(t)))$  ( $\theta \in [-h, 0]$ ) をらば,

$$f(t; x) < -k(t, V(t, x(t)))$$

がすべての連続関数  $x(t)$  に対して成り立っているものと仮定する。このとき、

(1°) 方程式

$$(8) \quad \dot{u} = -k(t, u)$$

の零解が安定、漸近安定ならば (5) の零解も同様である、

(2°) 更に、 $V(t, x) \rightarrow \infty$  ( $\|x\| \rightarrow \infty$ ) が  $t$  に関して一様に成り立ってば、(1°) において、安定性の大域性が保存される。

(3°) また、 $V(t, x)$  が infinitesimal small upper bound を持てば、(1°) において、安定性の一様性が保存される。

なお、上の定理において、 $V(t, x)$  の連続性から

$$\|x\| \geq \beta(t, V(t, x))$$

をみたす連続かつ、固定した  $t$  に対して  $v$  に関して単調増加な関数  $\beta(t, v) > 0$  ( $v > 0$ ),  $\beta(t, 0) = 0$ , が存在することに注意すれば、(7) において

$$f(t; x) < -k(t, V(t, x(t)))$$

を条件

$$f(t; x) < -k(t, \|x(t)\|)$$

でおきかえ、(8) 式の代わりに、

$$\dot{u} = -K(t, \beta(t, u))$$

を考えて安定性に関する結果を述べることができる。

常微分方程式

$$(9) \quad \dot{u} = f(t, u)$$

に対しては定理Aの双対として次の定理が得られる。

定理B. もしも  $x(t)$  が右に向って (9) の (st.) sub- (sup-) sol. ならば、それは左に向って (9) の (st.) sup- (sub-) sol. である。すなわち、別の言葉で言えば、もしも  $x(t)$  が (9) の st. sub-sol. ならば、点  $(t, x(t))$  は集合

$$(10) \quad \{(t, u); u < x(t)\}$$

の strictly egress point である。  $x(t)$  が st. sup-sol. である場合に対しても (10) における不等式の向きをかえて同じ結論を得る。

変数微分方程式 (1) に対しては一般には左に出る解について議論することは出来ない。しかしながら、strictly egress point を定義することは一般に可能である。

定義 (Lakshimikantham-Leela [1]). 集合  $DC[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  の境界点

$(t_0, x^0)$  は次の条件をみたすとき strictly egress point と呼ばれる。すなわち、

$$(t_0 + \theta, \varphi^0(\theta)) \in D \quad (\theta \in [-h, 0]), \quad \varphi^0(0) = x^0$$

をみたす任意な  $\varphi^0 \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  に対して  $(t_0, \varphi^0)$  を通る (1) のすべての解  $x(t)$  に対して、適当に  $\delta > 0$  をえらべば

$$(t, x(t)) \in D^c \quad (t_0 < t < t_0 + \delta)$$

が成り立っていることである。こゝでは函数微分方程式 (1) としては  $[0, \infty) \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  で定義されたものを考えている。

しかしながら、次の例が示すように、条件 (c) は定理 B に類似なものを得るためには不十分である。例えば、方程式

$$\dot{u}(t) = 2u(t-1) + 1$$

に対して、 $w(t) \equiv 0$  は st. sub-sol. であり、右辺は条件 (c) を満たしているが、 $(0, \varphi^0)$ ,  $\varphi^0(0) = 0$ , を通る解は点  $(0, 0)$  が集合  $[0, \infty) \times (-\infty, 0)$  に対して strictly egress point はないことを示している。よこゝで、条件 (c) の代りに、

条件 (c\*).  $\varphi < \psi$ ,  $\varphi(0) = \psi(0)$  ならば、 $f(t, \varphi) \geq f(t, \psi)$

を仮定すれば定理 B に類似な結果が得られることが証明される。このことを用いて次の定理が得られる。

定理 5.  $\bar{\omega}(t)$ ,  $\underline{\omega}(t)$  を  $[0, \infty)$  における方程式 (1) の st. sup-sol. および st. sub-sol. として  $[-h, \infty)$  において  $\underline{\omega}(t) > \bar{\omega}(t)$  が成り立っているものと仮定する. このとき、条件 (C\*) のもとで少なくとも 1 つ、(1) の解  $x(t)$  が

$$\underline{\omega}(t) > x(t) > \bar{\omega}(t) \quad (t \geq 0)$$

をみたすものが存在する.

注意. すでに述べたように、常微分方程式 ( $h=0$ ) に対しては、条件 (C), (C\*) のいずれも何らの制限とならない. したがって、これらの定理は自然な拡張であると考えられることができる. しかしながら、条件 (C), (C\*) の両辺をみたす方程式は  $(t, y(0))$  のみに依存して定まっている. すなわち、常微分方程式だけではあり得ない.

次に、2 階の方程式

$$(11) \quad \ddot{u}(t) = f(t, u_t, \dot{u}(t))$$

を考える. ここで、 $f(t, y, y')$  は  $[a, b] \times C([-h, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  上で定義された完全連続な関数である.

このとき、次の定理を証明することができる.

定理 6.  $f(t, y, y')$  が有界ならば、任意に与えられた  $y^0$

$\in C([-h, 0], \mathbb{R})$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}$  に対して、(11) の解  $u(t)$  への条件

$$(12) \quad u_a = \varphi^0, \quad u(b) = x^0$$

をみたすものが少なくとも1つ存在する。

以下では、 $\bar{\omega}(t), \underline{\omega}(t) \in C([a-h, b], \mathbb{R})$  は  $[a, b]$  上で2回連続的  
微分可能で、それぞれ

$$\ddot{\bar{\omega}}(t) \leq f(t, \bar{\omega}_t, \dot{\bar{\omega}}(t)),$$

$$\ddot{\underline{\omega}}(t) \geq f(t, \underline{\omega}_t, \dot{\underline{\omega}}(t))$$

をみたしてあり、かつ

$$\bar{\omega}(t) > \underline{\omega}(t) \quad (a-h \leq t \leq b)$$

であると仮定する。

定理7.  $f(t, \varphi, y)$  は各固定した  $y$  に対しても条件 (C\*) をみたしてあり、さらに、条件

$$(13) \quad \sup \{ |f(t, \varphi, y)| ; (t, \varphi) \in S, y \in \mathbb{R} \} < \infty$$

が成り立っていると仮定する。ここで

$$S = \{ (t, \varphi) ; \bar{\omega}_t > \varphi > \underline{\omega}_t, t \in [a, b] \}.$$

このとき

$$\bar{\omega}_a > \varphi^0 > \underline{\omega}_a, \quad \bar{\omega}(b) \geq x^0 \geq \underline{\omega}(b)$$

をみたす任意な  $\varphi^0$  と  $x^0$  に対しても、条件 (12) をみたす方程式 (11) の解  $u(t)$  が少なくとも1つ存在する。

証明は、

$$\tau_t(\varphi)(\theta) = \begin{cases} \bar{\omega}_t(\theta), & \bar{\omega}_t(\theta) < \varphi(\theta) \\ \varphi(\theta), & \underline{\omega}_t(\theta) \leq \varphi(\theta) \leq \bar{\omega}_t(\theta) \\ \underline{\omega}_t(\theta), & \varphi(\theta) < \underline{\omega}_t(\theta), \end{cases}$$

$$g(t, \varphi, y) = f(t, \tau_t(\varphi), y) - \tau_t(\varphi)(0) + \varphi(0)$$

とおいて、 $g(t, \varphi, y)$  は有界かつ連続だから、方程式

$$(14) \quad \ddot{u}(t) = g(t, u_t, \dot{u}(t))$$

に対して、定理6を適用して、次に、

$$g(t, \varphi, y) = f(t, \varphi, y), \quad (t, \varphi) \in S,$$

かつ、

$$\varphi(0) > \bar{\omega}(t) \quad \text{ならば、} \quad g(t, \varphi, y) > f(t, \bar{\omega}_t, y)$$

$$\varphi(0) < \underline{\omega}(t) \quad \text{ならば、} \quad g(t, \varphi, y) < f(t, \underline{\omega}_t, y)$$

であることに注意して、(12)をみたす(14)の解が実は(11)の解であることを示すことよって行なわれる。

定理7における条件(13)をゆるめることが期待される。その一つの結果として次の定理が得られる。とこで、

$$\bar{M}(\alpha) = \sup \{ f(t, \varphi, y) ; (t, \varphi) \in S, |y| \leq \alpha \},$$

$$\bar{m}(\alpha) = \inf \{ f(t, \varphi, y) ; (t, \varphi) \in S, |y| \leq \alpha \},$$

かつ、

$$M(\alpha) = \max \{ 0, \bar{M}(\alpha) \}, \quad m(\alpha) = \min \{ 0, \bar{m}(\alpha) \}$$

とおく。

定理 8. 定数  $\alpha > 0$  が存在して、

$$\alpha > \frac{\bar{\omega}(b) - \underline{\omega}(a)}{b-a} + \left\{ M(\alpha) - \frac{m(\alpha)}{2} \right\} (b-a)$$

$$\alpha > \frac{\bar{\omega}(a) - \underline{\omega}(b)}{b-a} + \left\{ \frac{M(\alpha)}{2} - m(\alpha) \right\} (b-a)$$

が成り立っていれば、定理 7 において条件 (13) を削ぐことが可能である。

(12) をみたす (11) の解の一意性に関しては Jackson ([3] 参照) の結果と同様に ~~と同様に~~ 次の定理を証明することができる。

定理 9. 方程式 (11) における  $f(t, \varphi, y)$  は次の条件のいずれか 1 つをみたしているものと仮定する。

(1°)  $\varphi < \psi$ ,  $\varphi(0) < \psi(0)$  ならば、任意な  $(t, y)$  に対して

$$f(t, \varphi, y) < f(t, \psi, y).$$

(2°)  $\varphi < \psi$  ならば、任意な  $(t, y)$  に対して

$$f(t, \varphi, y) \leq f(t, \psi, y).$$

かつ、任意に固定した  $(t, y)$  に対して、 $f(t, \varphi, y)$  は  $\varphi$  に関して局所的に Lipschitz の条件を満たしている。

このとき、任意に与えられた  $\varphi^0 \in C([-h, 0], \mathbb{R})$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}$  に対し

て条件 (12) を満たす方程式 (11) の解は存在しても高々1つである。

この定理と同様に、[3] における Jackson の結果はそのいくつかを函数微分方程式に対して拡張することができる。しかしながら、この一意性に関する定理 9 における条件と存在定理 7 における条件とは  $f(t, y, y')$  が  $(t, y(0), y')$  のみの函数、すなわち、(11) が常微分方程式の場合でなければ両立しないことに残念ながら注意しなければならない。

#### 参 考 文 献

- [1]. V. Lakshmikantham - S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Vol. 2, Academic Press, 1969.
- [2]. N. N. Krasovskii, Stability of Motion, Stanford University Press, 1963.
- [3] Robert McKelvey (ed.), Lectures on Ordinary Differential Equations, Academic Press, 1970.