

直接制御系の絶対安定について

京大 エ 布川 昊

§ 1. 序

直接制御系の絶対安定問題を、Liapunovの直接法を用いて考察した結果、一つの定理を得たのでそれを報告する。

直接制御系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - b\varphi(o) \quad , \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \\ o &= c'x \end{aligned} \quad (1)$$

において、 x は n 次元状態ベクトル、 A は $n \times n$ 定数行列で安定、すなわち A の固有値の実数部分はすべて負、であるとする。さらに、 b 、 c は n 次元定数ベクトル、 c' は c の転置ベクトルを表わすものとする。以下プライム“'”によって行列またはベクトルの転置を表わすことにする。また、スカラー変数 o のスカラ値関数 $\varphi(o)$ は次の条件を満たす関数族 \mathcal{F}

$$\mathcal{F} : \begin{aligned} (i) \quad & \varphi(o) \in C(-\infty, \infty) \\ (ii) \quad & o\varphi(o) \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

に属する任意の関数であるとする。

$\varphi(t) \in \mathcal{F}$ なる任意の関数に対して、直接制御系 (1) の原点 0 が大域的漸近安定となるとき、(1) の原点は絶対安定であると云う。

系 (1) が絶対安定となるための十分条件としては、Lefschetz による次の結果が代表的である。

[定理 1] C を適当な正定値行列 ($C > 0$) とするとき、 $A'B + BA = -C$ を満たす行列 $B > 0$ に対して

$$(i) \quad c'b = (Bb - \frac{1}{2}A'c)'C^{-1}(Bb - \frac{1}{2}A'c) \quad (3)$$

$$(ii) \quad cA^{-1}b \leq 0$$

が成立すれば、直接制御系 (1) は絶対安定である。

[証明] 文献 (1) を参照。■

本稿の目的は、定理 1 と等価な、より簡単な定理を提案することにある。すなわち、

(1) 定理 1 の条件 (i) は、これと等価なより簡単な条件で置き換えられる。

(2) 条件 (ii) は条件 (i) より導びかれる。

(3) 定理 1 の証明は簡単化される。

以上の3点を示すのが、これからの主目的である。

§ 2. 新定理の記述と証明

[定理 2] $A'B + BA = -C$ を満たす正定値行列 $C, B > 0$ に対して

$$A^{-1}b = -\frac{1}{2}B^{-1}c \quad (4)$$

が成立すれば、系 (1) は絶対安定である。

[証明] V 関数として定石通り

$$V(x) = x' B x + \int_0^{c'x} \varphi(\sigma) d\sigma$$

を選ぶ。明らかに、 $V(x)$ は連続的微分可能、 $V(x) > 0, (x \neq 0)$ であり、かつ $V(x) \rightarrow \infty$ ($\|x\| \rightarrow \infty$) である。ここで $\|x\|$ は x のユークリッドノルムを表わす。さて

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (2Bx + c\varphi(c'x))' \dot{x} \\ &= (2Bx + c\varphi)' (Ax - b\varphi) \\ &= (x + \frac{1}{2}B^{-1}c\varphi)' 2BA (x - A^{-1}b\varphi) \end{aligned}$$

であるから、定理の条件を用いて、

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (x + \frac{1}{2} B^{-1} c \varphi)' 2BA (x + \frac{1}{2} B^{-1} c \varphi) \\ &= - (x + \frac{1}{2} B^{-1} c \varphi)' C (x + \frac{1}{2} B^{-1} c \varphi) \\ &\leq 0\end{aligned}$$

を得る。次に $\dot{V}(x)$ が負定値であることを示そう。²⁾

$\dot{V}(x) = 0$ となるのは、 $C > 0$ であるから

$$x + \frac{1}{2} B^{-1} c \varphi(c'x) = 0 \quad (5)$$

のときに限るが、 $x = 0$ が (5) の唯一つの解であることを示せばよい。(5) と c との内積を作れば、

$$c'x + \frac{1}{2} c' B^{-1} c \varphi(c'x) = 0$$

となる。いま $\varphi(c'x) \neq 0$ とすれば、 $0 \varphi(0) \geq 0$ より、

$$0 < \frac{c'x}{\varphi(c'x)} = -\frac{1}{2} c' B^{-1} c < 0$$

となり矛盾である。よって $\varphi(c'x) = 0$ 、それ故 (5) より

$$x = -\frac{1}{2} B^{-1} c \varphi(c'x) = 0$$

を得、 $\dot{V}(x)$ が負定値関数であることが示された。■

応用例. 文献 1) の例 (p. 41) を取上げよう.

$$A = \text{diag}(-\mu_1, \dots, -\mu_n) \quad (\mu_i > 0)$$

とする. このとき, $C = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\alpha_i > 0)$ とおけば $A'B + BA = -C$ の解として

$$B = \text{diag}\left(\frac{\alpha_1}{2\mu_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{2\mu_n}\right)$$

を得る. さて, 定理の条件は

$$A^{-1}b + \frac{1}{2}B^{-1}c = A^{-1}\left(b + \frac{1}{2}AB^{-1}c\right) = 0 \quad (6)$$

であるが,

$$AB^{-1} = \left(-\frac{2\mu_1^2}{\alpha_1}, \dots, -\frac{2\mu_n^2}{\alpha_n}\right)$$

を用いて, (6) を成分で書けば

$$b_i - \frac{\mu_i^2}{\alpha_i} c_i = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

となる. よって $b_i c_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) ならば $\alpha_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) となるようにとれるから.

« $A = \text{diag}(-\mu_1, \dots, -\mu_n)$, $\mu_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) のとき系 (1) が絶対安定であるための十分条件は, すべての i に対して, $b_i c_i > 0$ となることである. »

を得る。

§ 3. 定理1と定理2との関係

§ 1の最後に述べたように、定理1と定理2の等価性を示すことができる。そのためには、直接制御系における、LaSalleの定理を補正した形で用いる。

[補題] ベクトル x の2次式

$$F(x) \equiv x'Ax + 2b'x + c, \quad A' = A > 0$$

が非負となるための必要十分条件は、この2次式の判別式が非負となることである。すなわち、

$$\begin{vmatrix} A & b \\ b' & c \end{vmatrix} = |A| (c - b'A^{-1}b) \geq 0 \quad (7)$$

また判別式が0となるとき、 $F(x) = 0$ となるのは、

$$x = -A^{-1}b \quad \text{又は} \quad Ax + b = 0 \quad (8)$$

のときに限る。

[証明]

$$F(x) = (x + A^{-1}b)'A(x + A^{-1}b) + c - b'A^{-1}b \quad \blacksquare$$

[定理3] $A'B + BA = -C$ を満たす $C, B > 0$ に対して.

$$(Bx - y)' C^{-1} (Bx - y) \geq 2y' A^{-1} x \quad (9)$$

が成立する。さらに等号は、

$$A^{-1} x + (A'B)^{-1} y = 0 \quad (10)$$

のときのみ成立する。

[証明]

$$(Bx - y)' C^{-1} (Bx - y) - 2y' A^{-1} x \quad (11)$$

を Bx の二次式と考えると整理すれば、

$$(Bx)' C^{-1} (Bx) - 2y' [C^{-1} + (BA)^{-1}] (Bx) + y' C^{-1} y$$

となる。この判別式は 0 である。すなわち

$$y' C^{-1} y - y' [C^{-1} + (BA)^{-1}] C [C^{-1} + (A'B)^{-1}] y = 0$$

何となれば

$$[C^{-1} + (BA)^{-1}] C = -(BA)^{-1} (A'B)$$

$$[C^{-1} + (A'B)^{-1}] C = -(A'B)^{-1} (BA)$$

を乗ずれば、

$$C^{-1} = [C^{-1} + (BA)^{-1}] C [C^{-1} + (A'B)^{-1}]$$

となるからである。よって (11) 式は、 $C^{-1} > 0$ であるから、補題より非負、すなわち (9) 式を得る。(10) 式は補題の後半より得られ、(9) 式で等号が成立するのは

$$Bx - C [C^{-1} + (A'B)^{-1}] y = 0$$

のとき、すなわち、(10) 式が成立するときに限る。■

この定理の系として次の重要な結果を得る。

$$\begin{aligned} \text{[系1]} \quad & (Bb - \frac{1}{2} A'c)' C^{-1} (Bb - \frac{1}{2} A'c) = c'b \text{ と} \\ & A^{-1}b + \frac{1}{2} B^{-1}c = 0 \end{aligned}$$

は等価である。

[証明] 定理3の後半で、 $x = b$ 、 $y = \frac{1}{2} A'c$ とおけばよい。■

[系2] 定理1で (ii) の条件は不要である。

[証明] 系2により、 $cA^{-1}b = -\frac{1}{2} cB^{-1}c < 0$ ■

§ 4. 拾遺

定理 3 の一つの応用として、間接制御系

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - b\varphi(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= c'x - p\varphi(\sigma)\end{aligned}\quad (12)$$

の絶対安定問題を取扱う。たゞ $\varphi(\sigma)$ として条件予に、さらに

$$\int_0^{\sigma \rightarrow \pm\infty} \varphi(\sigma) d\sigma \rightarrow \infty$$

を付け加えることにする。他は系 (1) と同じ条件とする。

[定理 4] 間接制御系 (12) において、

$$A^{-1}b + \frac{1}{2}(A'B)^{-1}c = 0, \quad A'B + BA = -C$$

なる $C > 0$ が存在するとき、系 (12) が絶対安定となるための必要十分条件は、

$$p > c'A^{-1}b \quad (13)$$

である。つまり *Aizerman* の推測が成立する。

[証明] 必要性 (12) が絶対安定ならば、 $\varphi(\sigma) = \sigma$ といった系も漸近安定であるから、

$$c'A^{-1}b - p = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} A & -b \\ c' & -p \end{vmatrix} < 0 \quad (13)'$$

十分性. 周知のように

$$\rho > (Bb - \frac{1}{2}c)' C^{-1} (Bb - \frac{1}{2}c), \quad AB + BA = -C, \quad C > 0 \quad (14)$$

ならば、(12)は絶対安定であるが、定理3の後半より、 $x=b$, $y = \frac{1}{2}c$ とおけば、定理の仮定により、

$$(Bb - \frac{1}{2}c)' C^{-1} (Bb - \frac{1}{2}c) = c' A^{-1} b$$

を得る. よって(14)の等式と(13)式は同一である. ■

[註1] 定理4の証明から分るように、(14)式が成立すれば、(13)式が成立するのであるから、

$$(Bb - \frac{1}{2}c)' C^{-1} (Bb - \frac{1}{2}c) \geq c' A^{-1} b \quad (15)$$

が成立する. これは LaSalle の定理に外ならない.

[註2] (7)式は、次のように考えれば一番容易にできる.

2次式 $(x, 1) \begin{pmatrix} A, b \\ b', c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ は変数変換 $x \rightarrow X = x + A^{-1}b$

によつて、 x の1次の項を消すことができる. 変換の行列は

$$\begin{pmatrix} E, -A^{-1}b \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \quad E \text{ は単位行列}$$

であるから、これを用い

$$\left| \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b' & c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} E & -A^{-1}b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline b' & c - b'Ab \end{array} \right|$$

より直ちに (7) 式を得る。

(13) の等式部分も、同様に考えて $\left| \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c' & p \end{array} \right|$ に左から

$$\left| \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -c'A^{-1} & 1 \end{array} \right| \text{ を掛けるか, 右から, } \left| \begin{array}{c|c} E & -A^{-1}b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right| \text{ を掛けるこ}$$

とによって、直ちに得られる。

§ 5. 引用文献

- 1) Lefschetz, S: *Stability of Nonlinear Control Systems*; Academic Press. (1965)
 - 2) LaSalle 教授よりの私信
 - 3) Halanay A: *Differential Equations; stability, oscillations, time lags*; Academic Press, (1966)
- また次の文献より、多くの示唆を与えられた。
- 4) 吉沢太郎: 自動制御における絶対安定について;
数理解析研究所講究録 16 (1966).

5) 加藤順二 : 非線型制御系の絶対安定性について ;
数理解析研究所研究集合予稿 (1967).

なお (2) 式の (ii) $\psi(\omega) \geq 0$ において、等号を入れても成立することを、荒木光彦氏より御教示頂いた。これらの方々に謝意を表す。