数理解析研究所講究録
114巻 1971年 82-104

Fundamental Principle について

東大 理　金子晃

§0. 序

$p(D)u=f$, $D=(D_1,\cdots,D_n)$, $D_j=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\tilde{u}=\int e^{ix\xi}u(x)dx$ 等は，すべて hyperfunction 学派と同様の記号法に従う。もちろん定数係数の話である。

定数係数の同次常微分方程式の解が，指数函数・多項式の解の一次結合で尽くされるというのは古い話である。偏微分方程式でも，$p(\alpha)=0$ なる α に対し $e^{i\alpha\cdot x}$ は $p(D)u=0$ の解だから，解はいくらでも作ることができる。ただ，すべての解がこれら*)の一次結合，つまり α に関するある測度による積分として表わされるかどうかについては Ehrenpreis [1] 又は Palamodov [7] 以前にははっきりと言明したものはいなかった。その理由はおそらく，Schwartz 以前には線型位相空間論が今日のように普及していなかったために，同次解の

*) p が重複因子を持つときはその分だけ多項式が必要になることは，常微分の場合と同様である。

全体などというものを考える人がいなかったことにもあるのであろう。この事実（指数函数表示）は，その平明さの割には厳密に証明するのがむずかしく，そこにやはりEhrenpreisの名を持ち出すに足るほどの重みがある。もっともこの"原理"は，それ以前のHörmanderやMalgrangeの頭の中にも漠然と入っていたようで，彼等の仕事に於ける指数函数解の巧みな使用法を見れば，そのことが推測できる。Ehrenpreis [1] は，指数函数表示を用いて彼等の頭の中に隠していた巧みさを，露骨に暴いて見せたのである。

一方，1950年代の後半から，定数係数偏微分方程式では優決定系の可解性が問題となり始めた。優決定系の可解性を小松先生がその講義録 [4] に整理された形で説明すれば次のようになる：p の転置行列 p' に対し，そのkernelを表現する行列 q' をとる。即ち次のような多項式加群の完全列をとる。

$$\mathcal{P}^s \xleftarrow{\ p'\ } \mathcal{P}^t \xleftarrow{\ q'\ } \mathcal{P}^{t_2}$$

このとき，微分方程式 p' を連続写像として許すような函数空間 Φ に対し，方程式 $p(D): \Phi^s \longrightarrow \Phi^t$ の可解性を次のような形で問題にする。即ち，次の列は完全になるか？

$$\Phi^s \xrightarrow{\ p(D)\ } \Phi^t \xrightarrow{\ q(D)\ } \Phi^{t_2}$$

$v \in \Phi^t$ に対し $p(D)u = v$ となる $u \in \Phi^s$ があるとすれば当然 $q(D)v = 0$ であるから，$p(D)$ の可解性をこのように $\ker q(D)$ の

中だけで考えるのは自然である。*)(この問題が最初に精密に解かれたのは $\Phi=\mathcal{E}(\Omega)$, Ω は R^n の凸開集合の場合で、Malgrange [5] による。) さて Φ の双対空間 Φ' は一般にコンパクトな台をもつ函数の空間になる。(これが絶対に必要だとは云わないが少くとも Φ の方がコンパクトな台をもつときは、上は exact にならないのが普通である。) もしも Φ と Φ' との間に closed range theorem が成り立つものと仮定すれば、次の列が完全(閉値域)であることを示せばよい。

$$\Phi'^{s} \xleftarrow{p(-D)} \Phi'^{t} \xleftarrow{q(-D)} \Phi'^{t_2}$$

これを Fourier 変換すれば、結局次のような整函数の空間の掛け算作用素の列が完全(閉値域)なことを示せばよい。

$$\tilde{\Phi}'^{s} \xleftarrow{p'} \tilde{\Phi}'^{t} \xleftarrow{q'} \tilde{\Phi}'^{t_2}$$

これは要するにある増大度をもつ整函数の列ベクトルが、ある条件の下に多項式行列でわり切れるかどうかという問題であって、次のようにして解かれる。

a. (Cohomology with bounds) $\mathbb{C}^n$ において $\tilde{\Phi}$-type の増大度を持つ整函数の cohomology が消えること。
(① resolution によるもの, ② Čech によるもの)

b. (division) 多項式行列 q による (① C^∞-函数の大域的な, ② 正則函数の局所的な) 割り算

*) $q(D)$ は compatibility system と呼ばれる。

①の方法(C^∞-函数でまず商を作り，後で正則函数に取り替える)はMalgrange[5]-[6]にあり，②の方法(局所的に商を作り，Čechでつなぐ)はHörmander[3]にある。(後者はEhrenpreisのをやき直したものかも知れない。)

方程式系に関する以上二つの問題の根底にある"原理"を暴露したのがEhrenpreis[1]の所謂Fundamental principleである。彼は整函数の間の掛け算作用素 $p: \mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{H}^t$ の核を $\mathbb{C}^n$ のあるsubvarietiesの上の正則函数の完備な空間として実現することを考えた。

$$\mathcal{H}^s \xrightarrow{p} \mathcal{H}^t \xrightarrow{d} \mathcal{H}\{\ \} \longrightarrow 0$$

先に示した列 $\tilde{\mathfrak{F}}'^s \xleftarrow{p(-\zeta)} \tilde{\mathfrak{F}}'^t \xleftarrow{q(-\zeta)} \tilde{\mathfrak{F}}'^{t_2}$ が閉値域写像の完全列になることは写像dの作り方から直ちに読みとれる。こうして存在定理はFundamental principleに帰着される*)。そればかりではない。このFundamental principleを用いて最初に述べた同次方程式の解の指数函数表示が得られ，それを用いて，hypoellipticity，ellipticity等のregularityまた解の接続可能性に関する定理が面白いようにすらすらと出てくるのである。

Fundamental principleの証明は報告[1]に，長くかつ複雑なのでここで述べることはできないという注意書き

*) §2に示すように実はFundamental principleと存在定理とは閉値域定理などを媒介とせず，もっとprimitiveに結びついている。

の後に短いスケッチがあるだけで，しばらく神秘のベールに包まれていた。彼がこの時きちんとした証明を持っていたかどうかについては，あやしい節がある。というのは[1]で彼は，上に述べた作用素 d が定数係数の微分作用素と，varieties への制限写像との合成で与えられると述べているが，その後 Palamodov その他により，多項式係数にしなければだめだということが示されたからである。ともあれ大した間違いではなく*)，やがて Palamodov の本[8]が，またつい最近には Ehrenpreis 自身の本[2]が出て Fundamental principle の全貌が明になり，同時に定数係数線型偏微分方程式論も一段落を迎えることとなった。ここでは Palamodov による証明を概観し，hyperfunction の場合に関する注意を述べ，最後にその証明の簡易化の希望について述べることにする。

§1．Fundamental Principle の証明

まず Fundamental Principle を Palamodov に従って精密に formulate しよう。$p: \mathcal{P}^s \longrightarrow \mathcal{P}^t$ を与えられた多項式行列とする。部分加群 $p\mathcal{P}^s \subset \mathcal{P}^t$ の，準素加群への分解を

$$p\mathcal{P}^s = \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_l \subset \mathcal{P}^t$$

とする。p が単独多項式で $p = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$ がその既約分解のと

*) Palamodov にとっては大きなことだったと思われる。

きには，上の分解は

$$p\mathcal{P}^s = p_1^{k_1}\mathcal{P}^s \cap \cdots \cap p_\ell^{k_\ell}\mathcal{P}^s$$

に相当する。次に一般に $\mathfrak{q} = q\mathcal{P}^{s_0} \subset \mathcal{P}^t$ が準素加群のとき，$\mathfrak{p}(\mathfrak{q}) = \{ f \in \mathcal{P};\ \exists f^k\mathcal{P}^t \subset \mathfrak{q} \}$ をその素因子，$N(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{p}(\mathfrak{q}))$ をその null variety とするとき，$\mathcal{H}$ を正則函数芽の sheaf として，$\mathcal{H}^{s_0} \xrightarrow{q} \mathcal{H}^t$ の cokernel は $N(\mathfrak{q})$ に support をもつ sheaf になる。（$N(\mathfrak{q})$ の外では容易にわかるように q は onto である。）これを粗く云って $N(\mathfrak{q})$ 上の正則函数芽の sheaf で表わすことを考える。

定義*)　微分作用素系 $\partial_q = \partial(z, D)$, $D = \frac{\partial}{\partial z}$, は

I. 多項式係数である。

II. $N(\mathfrak{q}) \supsetneq N_*$（真部分多様体）が存在し，$\forall z \in N \setminus N_*$ に於て $\varphi \in \mathcal{H}_z^t$ に対する次の二条件が同値になる。

$$\varphi \in q\mathcal{H}_z^{s_0} \iff \partial(z, D)\varphi|_{N_z} \equiv 0$$

[III. $\partial(z, D)$ は N の適当に定められた座標**) に対し normal な方向の微分しか含まない。]

のおのおのを満たすとき q に同伴する [正規] ネーター作用素という。

すると，各点の germ に対し

$$\mathcal{H}^{s_0} \xrightarrow{q} \mathcal{H}^t \xrightarrow{\partial_q|_N} \mathrm{Im}\,\partial_q|_N \longrightarrow 0$$

*) [8] ch.4 §4

**) N は"正規化"してあるとする。

という完全列ができる。これをglobalにすることを考えよう。今$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$を，ある増大度とそれに対応する位相とを与えられた整函数の線型位相空間とする。これに対し，$N(\mathfrak{q})$上の正則函数のcolumnで，各点に於けるそのgermが$\mathrm{Im}\,\partial_{\mathfrak{q}}$に入り，かつ$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$と同種の増大度を持つものを考え，これに$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$と同種のセミノルム系で位相を入れたものを$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{\mathfrak{q},\partial_{\mathfrak{q}}\}$とする。Fundamental principleは

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{s_0}\xrightarrow{\ \mathfrak{q}\ }\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{t}\xrightarrow{\ d_{\mathfrak{q}}\ }\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{\mathfrak{q},\partial_{\mathfrak{q}}\}\longrightarrow 0$$

なる列*) が完全であることを主張するものである。準素でない一般の$\mathfrak{p}$に対しては，その各準素成分に対しこの考察を適用することにより

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{s}\xrightarrow{\ \mathfrak{p}\ }\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{t}\xrightarrow{\ d\ }\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{\mathfrak{p},d\}\longrightarrow 0$$
$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{\mathfrak{p},d\}=\prod_{\lambda=0}^{\ell}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{\mathfrak{p}_i,\partial_{\mathfrak{p}_i}\}$$

なる列の完全なることを主張する。これの証明としては，①Noether作用素$\partial(z,D)$が存在すること。②dがhomomorphismであること（或は，$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{\mathfrak{p},d\}$がclosedなこと）③其中がexactなこと。の三つが主要なところである。Palamodov [8] は①の代数的構成にあたる部分，②の証明のための線型位相空間論，及び③の証明に於けるcohomology with boundsの消滅（localな部分とglobalな部分）と

*) $d_{\mathfrak{q}}$は$\partial_{\mathfrak{q}}$を施した後，$N(\mathfrak{q})$へ制限する写像である。

を，すべて平行して self contained に証明してゆくので，それらを分解して筋道を理解するのに骨が折れる。ここではあえてそれを分解し説明することを試みよう。もとより誤解の可能性は御容赦願いたい。

I）(preparation theorem)　まず形式的冪級数環 $\mathcal{S}=\mathcal{S}[\eta]$ に於いて，多項式の行列 p による割り算を考える。*) 即ち，$p:\mathcal{S}^s\longrightarrow\mathcal{S}^t$ に対して

$$id_{\mathcal{S}^t}=\mathcal{D}(z)+p(z+\eta)\,\mathcal{G}(z)$$

なる分解（p-分解という）を，$p\mathcal{G}$ 及び $\mathcal{D}$ がそれぞれ $\mathrm{Im}\,p$ 及びその直和補空間への射影作用素となるように作る。p が単独多項式のときには，p による割り算の，$\mathcal{G}(z)$ がその商，$\mathcal{D}(z)$ がその余りになる。このような $\mathcal{G}$，$\mathcal{D}$ を各点 z でばらばらに作るのは簡単だが，考えている germ の中心の点 z に対し $\mathcal{D}$，$\mathcal{G}$ の各係数 **) が z の有理函数であるように依存するようなものを作りたい。それには $\mathbb{C}^n$ 全体で一度に作ることは不可能で，$\mathbb{C}^n$ の代数的分割 $\mathbb{C}^n=N_0\supset\cdots\supset N_\omega=\phi$ を適当に導入すると各 $N_\nu\setminus N_{\nu+1}$ の上では可能になる。これは $\mathbb{C}$ 上の線型代数を用いて，下の方から初等的に作ってゆく。その際帰納法を進めるための方程式を解くのだが，maximal rank の

*) [8] ch 2.

**) $\mathcal{D}$，$\mathcal{G}$ 等は $\mathcal{S}$ の自然な位相での連続作用素で，従って $\mathcal{D}=\sum\eta^i\mathcal{D}_i$，$\mathcal{D}_i=\sum_{\text{finite}}d^{ij}\delta_j$ の形をしている。

小行列をとり出す位置を標準的に定める手続きが重要な点となる。上に述べた代数的分割は，証明の途中に出てくる行列のrankが一定な集合への分割として得られる。証明はやや長いが初等的なのでこれ以上の内容を要約するのはむずかしい。

さて，こうやってcanonicalに$\mathcal{D}$, $\mathcal{G}$を作ってみると，これらは収束級数環$\mathcal{H}$の上の作用素ともみなされ，掛け算作用素$p: \mathcal{H}_z^s \to \mathcal{H}_z^t$に応ずる分割

$$id_{\mathcal{H}^t} = \mathcal{D}(z) + p(z+\eta)\,\mathcal{G}(z)$$

をも与える。このことは$\mathcal{D}$, $\mathcal{G}$の係数の評価からわかる。同時に$\mathcal{D}(z)$, $\mathcal{G}(z)$のノルムも計算できるのである。

作用素$\mathcal{L}(z)$の最初の有限項を用いて，後にNormal noether作用素が作られる。また，$\mathcal{D}(z)$は，整函数の空間に於ける掛け算作用素pのImageを記述するための"pre-noether作用素"として重要な役を演ずる。

II) 次はcohomology with boundsの消滅を証明する。*) 各点$z\in\mathbb{C}^n$を中心とし半径がε(一定)な球より成る$\mathbb{C}^n$の被覆$\{U_\varepsilon(z);\ z\in\mathbb{C}^n\}$を初等被覆という。この上に与えられた正則函数の$\nu$-cochainが，$\mathcal{H}_M$と同様の増大度を持つとき，$\mathcal{H}_M$-typeの$\nu$-cohainといって，$\varepsilon\downarrow 0$のときの和

*) [8] ch.3, §2-4

（帰納極限）を ${}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ で表わす。すると多くの $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ に対し次の列が exact になる。

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\delta} {}^{0}\mathcal{H}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\delta} {}^{1}\mathcal{H}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \cdots$$

これに対する証明法は種々あるが，どれを使ってもかまわない。ちなみに Palamodov は $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}$ という微分作用素の存在定理から，可微分函数に対する cohomology with bounds の消滅を利用して次々に正則性を増すという方法で証明している。

Ⅲ） Ⅰ）で作った割り算の定理から，増大度を持った整函数の割り算の定理を導く*)。もちろん一遍には出来ないので，次のような順序で進む。

a）まず cochain を割る。即ち $[{}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^{s} \xrightarrow{p} [{}^{\nu}\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^{t} \cap \ker \mathcal{D} \longrightarrow 0$ exact $(\nu \geq 0)$ を示す。

b）次に所望の $[\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^{s} \xrightarrow{p} [\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^{t} \cap \ker \mathcal{D} \longrightarrow 0$ を出す。

a）から b）を出すのは横に p の free resolution，縦に Čech cohomology をとった大可換図式に Weil の補題を適用すればよい。ここで縦が exact であるところにⅡ）の cohomology with bounds が基本的に使われる。横の方は先にも注意したように g_{ν} に対する $\mathcal{D}_{\nu}$ について $\ker g_{\nu-1} = \ker \mathcal{D}_{\nu}$ だから，a）の結果により一番下をのぞき exact である。この図を一口で説明すれば，与えられた整函数で，

*) [8] ch.3, §5

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{P}^{s_n} \arrow[r, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{P}^{s_0} \arrow[r, "g_0"] & \mathcal{P}^{s} \arrow[r, "p"] & \mathcal{P}^{t} & \\
 & \vdots \arrow[u, dotted] & & & \vdots \arrow[u, dotted] & \vdots \arrow[u, dotted] & \\
0 \arrow[r] & {[{}^{1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s_n}} \arrow[u] \arrow[r, "g_n"] & \cdots \arrow[rr] & & {[{}^{1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s}} \arrow[u] \arrow[r, "p"] & {[{}^{1}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} \cap \ker\mathcal{D}} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[{}^{0}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s_n}} \arrow[u] \arrow[r, "g_n"] & \cdots \arrow[rr] & & {[{}^{0}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "p"] & {[{}^{0}\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} \cap \ker\mathcal{D}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s_n}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "g_n"] & \cdots \arrow[rr, "g_0"] & & {[\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "p"] & {[\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} \cap \ker\mathcal{D}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

は p の free resolution

局所的に割り切れる条件を満たしているもの（即ち $\ker\mathcal{D}$ に入っているもの）に対し，一度には割れないが，各点の十分小さい近傍でわれるならば，商を集めたものは 0-cochain になるから，cohomology の消滅を利用してうまく修正してやるとつながって整函数としての商が得られるというわけである。次に a) を出すのが結構面倒である*)。むずかしい点は次の二つである。① 商としての ν-cochain が全体として $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ の増大度を持つようにすること。② $\mathcal{D}$ の作り方から，local な商の存在する領域の半径は，遠方へ多項式の函数の order で減少する可能性がある。それを通常の半径一定の初等被覆上の cochain に修正しなければならない。この二つの手続きは一度に行われるのだが local な cohomology の消滅だけに関係し，整函数の族とは直接の関係はない。長くなるの

*) §5, 2°–7°

で詳細は略す。

これでいわば pre-Fundamental principle ともいうべきものが証明できたわけで，Malgrange [5] 程度の解析ならばこれで十分間に合う。しかし本当の Fundamental principle はこれからが大変である。

IV）正規ネーター作用素の存在証明*）　これには次の M. Noether の定理が基礎になる。（Noether 作用素の名前の由来もここにある。）：$p\mathcal{P}^s\subset\mathcal{P}^t$ を零次元加群とするとき，$f\in\mathcal{P}^t$ が $f\in\mathcal{P}^s$ となるためには各点で $f\in p\mathcal{P}^s \bmod \mathfrak{m}^{k+1}$ となることが必要十分である。k は適当な定数。これに我々の割り算定理 I）を適用すれば，この場合剰余を表わす作用素 Q は実は始めの有限項（次数 $\leq k$）しかないことがわかるから，その係数のおのおのに於いて，含まれる δ 函数を対応する微分でおき換えたものを並べると，この全体が丁度 Noether 作用素の役を果たすことになる。そこで一般の準素加群の場合にはまず最後の $n-k$ 変数が正規パラメタとなるように正規化しておく。$z=(z_1,\cdots,z_k,\overbrace{z_{k+1},\cdots,z_n}^{n-k})$，$n-k=\dim N(p)$ である。ところで I）で説明した除法の公式は掛け算作用素 $p=p(z+\eta)$ を変数 η の数が n 個より少ない形式的冪級数環に働かせた場合にも成立する。$z+\eta=(z_1+\eta_1,\cdots$

*）[8] ch. 4, §3

…, $z_k+\eta_k$, z_{k+1}, …, z_n), 後の$n-k$変数はただのパラメタになる。実際Palamodovはこの一般な場合に対してp-分解を証明しており，この一般化は少しも難しさを増すものではない。さて，このようなp-分解に対し$N(p)$のnormal方向の切り口を考えると，そこでは零次元の場合と同様の考察により剰余を表わす作用素$\mathcal{D}^k$は有限個しかないこと，従ってその係数を並べてNoether作用素$d(z,D)$を作ることができる。$\mathcal{D}^k$はI)で述べたように，$\mathbb{C}^n=N_0\supset\cdots\supset N_\omega=\phi$なる代数的分解の各切片$N_\nu\setminus N_{\nu+1}$の上では有理函数を係数としているから，$N_\nu\supset N(p)$, $N_{\nu+1}\not\supset N(p)$なる$\nu$を選べば$N(p)\setminus N_{\nu+1}$に於いて$d(z,D)$は有理函数係数，従って分母を払えば，多項式係数のNoether作用素が得られたことになる。*)

V) 基本不等式**) III)で$\mathcal{D}$について証明した結果をNoether作用素$d(z,D)$に関するものに移したいのだが，その基本となる手続きが次の不等式の証明である。***)

$$\varepsilon^q r(Z)\sup_{\xi}\{|\mathcal{D}(Z,\xi)\varphi(Z)|,\ |\xi|\le\varepsilon^q r(Z)\}$$
$$\le\sup_{z}\{|d(z,D)\varphi(z)|,\ z\in N\cap(Z+U_\varepsilon),\ \rho(z,L)\ge\varepsilon^q r(Z)\}$$

*) 今得たdは少くとも多項式に対してNoether作用素の役を果たす。これが$\mathcal{O}$に対しても正しくNoether作用素となっているかどうかは，次のV)に於ける不等式を用い，$\mathcal{D}$を媒介として証明される。(もっとも直接にもわかる。例えばGAGA参照)

**) [8] ch.4, §3

***) ここも全くの局所理論であって，整函数の族とは関係ない。

つまり，各点 z に於いて，その近傍に於ける $\mathcal{D}\varphi$ の値が，同じく z の近傍で $N(p)$ の上の部分に於ける $d(z,D)\varphi$ の値の sup でおさえられるという定理である。N 上の真部分代数多様体 L から適当に離れたところだけで sup をとればよいというのは，帰納法のための細かな technique に属する。証明の大体の方針をいおう。$\mathcal{D}$ と $d(z,D)$ の違いは大まかにいって $\mathcal{D}$ は全変数を含む収束級数環上の作用素であるのに，$d(z,D)$，或いはこれのもとになった $\mathcal{D}^{t}$ は，法線方向の主変数しか含まないことである。そこでこれら二つの作用素の間に橋を掛けるため，変数の足りない一つの p-分解から $N(p)$ の接線方向の変数を一つ増やした p-分解を作る操作を考える。接線方向の変数は割れるかどうかにあまり関係しないので，この操作は新しく増やされる変数に関する identity operator をもとの operator に tensor 積し，それを Neumann 級数でちょっとひねるだけでわりと容易に行われる。こうして作った作用素を間にはさんで先の不等式を帰納法で証明するのである。ここが Palamodov の証明の全行程中で最も深遠，かつ煩雑なところである。

Ⅵ）以上の準備の下に基本定理

$$[\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s} \xrightarrow{p} [\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} \xrightarrow{d} \mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{p,d\} \longrightarrow 0 \qquad \text{exact}$$

を証明する。*) 要するに $[\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{t} / p[\mathcal{H}_{\mathcal{M}}]^{s} \longleftarrow \mathcal{H}_{\mathcal{M}}\{p,d\}$ と

*) [8] ch.4，§5

いう逆作用素を作ればよいのである。定義により$\mathcal{H}_{\mathcal{U}}\{p,d\}$の元は局所的には$\mathbb{C}^n$上の正則函数に$d$を施したものの$N(p)$上への制限になっている。故にlocalには逆対応が作れる。そこでまず例によって0-cochainとして逆対応元を求め，次にcohomologyを解いてglobalな対応を作ればよい。

a) その線に沿って，まず

$$Z_{\mathcal{U}}(p) = \ker\{[{}^0\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^\tau/[{}^0\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^\tau \cap \ker\mathcal{D} \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\delta} [{}^1\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^\tau/[{}^1\mathcal{H}_{\mathcal{U}}]^\tau \cap \ker\mathcal{D}\}$$

とおき，同型$d: Z_{\mathcal{U}}(p) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{U}}\{p,d\}$を証明する。

$Z_{\mathcal{U}}(p) \ni \Phi = \{\varphi_Z\}$を代表元とするとき

$$d: \Phi \longrightarrow \{f^\lambda = d^\lambda(z,D)\varphi_Z(z)|N_\lambda\} \quad \lambda=0,\ldots,l$$

はΦの条件から各variety N_λ上で一意的につながり，N_λ上の正則函数を定める。しかもf^λはCauchyの積分公式で簡単にノルムを評価することができて，それが$\mathcal{H}_{\mathcal{U}}\{p,d\}$に入ること，及び対応が連続なことがわかる。$d$がinjectiveなことは定義から殆ど明である。問題は逆対応を作るところである。$f=\{f^\lambda\}$を$\mathcal{H}_{\mathcal{U}}\{p,d\}$の任意の元とする。初等被覆$\{U_Z\}$を一つ定め，これの上に逆対応の元であるcochainを構成しよう。各Zに対し，定義から$\mathcal{A}U_Z$上の十分小さな初等被覆をとれば，その上の0-cochain Fで$dF=f$となるものがある。あとはIIIのa)で言及したcohomologyの

局所理論から，Fを適当な評価を満たすものにとり替えればよい。その詳細も略す。

b) 今得た同型から基本定理を証明するには可換図式を一つ書けばよい。

$$\begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} & \\
0 \arrow[r] & {[{}^1\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} \cap \ker\partial} \arrow[u] \arrow[r] & {[{}^1\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau}} \arrow[u] \arrow[r] & {[{}^1\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} / [{}^1\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} \cap \ker\partial} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[{}^0\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} \cap \ker\partial} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & {[{}^0\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & {[{}^0\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} / [{}^0\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} \cap \ker\partial} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} \cap \ker\partial} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & {[\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau}} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & {[\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} / [\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} \cap \ker\partial} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

先にⅢで注意したようにこの一番左列はexact，従って一番右がexactだから a) より

$$\mathcal{H}_{\nu\sigma}\{p,d\} \cong Z_{\nu\sigma}(p) = [\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} / [\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} \cap \ker\partial \cong [\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau} / p[\mathcal{H}_{\nu\sigma}]^{\tau}$$

ここでⅢ)の結果を使ったことはいうまでもない。以上でFundamental Principleが証明されたのである。

§2. Fundamental Principleの応用

次にFundamental Principleの応用として指数型表現及びsystemの存在定理について述べよう。

まず指数型表現について，今$\Phi = \mathcal{E}(\Omega)$，$\mathcal{H}_{\nu\sigma} = \widetilde{\mathcal{E}(\Omega)}$を念頭におけば，$p'(-D)$に対しFundamental Principle

$$\mathcal{H}^s_{\nu_0}/p'(\zeta)\mathcal{H}^t_{\nu_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\nu_0}\{p'(\zeta), d\}$$

が証明されたわけである。さて $p(D)u=0$ なる $u\in\mathcal{E}(\Omega)$ に対しその Fourier 逆変換 $\hat{u}$ は，特に $\mathcal{H}^s_{\nu_0}/p'(\zeta)\mathcal{H}^t_{\nu_0}$ 上の連続線型汎函数とみなせるから，従って $\mathcal{H}_{\nu_0}\{p'(\zeta), d\}$ 上の連続線型汎函数とみなせ，そこのあるセミノルムについて連続になる。故に Hahn－Banach の定理により，同じ増大度の supremum norm をもつ $N(p)$ 上の連続函数の空間の上の連続線型汎函数とみなせる。Riesz の定理によれば，そのようなものはある測度で書けるから，今 $\forall\varphi\in\mathcal{E}'(\Omega)$ に対し，

$$\langle u,\varphi\rangle=\langle\hat{u},\tilde{\varphi}\rangle=\int_{N(p')} d(\zeta,\tfrac{\partial}{\partial\zeta})\tilde{\varphi}\,d\mu=\left\langle\int_{N(p')} d'(\zeta,ix)e^{i\zeta x}\,d\mu(\zeta),\varphi\right\rangle$$

$$\therefore\ u=\int_{N(p')} d'(\zeta,ix)\,e^{i\zeta x}\,d\mu(\zeta)$$

この積分は $\mathcal{E}(\Omega)$ の位相で収束することが容易に確かめられる。

次に system に対する存在定理の Fundamental Principle 的な証明法については，まず次の初等的な命題（Palamodov [8]）に注意する（ch.4, §4, Proposition 2）。

命題　$\mathcal{P}^s \xrightarrow{p} \mathcal{P}^t \xrightarrow{r} \mathcal{P}^u$ を $\mathcal{P}$-加群の完全列とする（$p\neq 0$）。このとき $p\mathcal{P}^s\subset\mathcal{P}^t$ は n 次元の準素部分加群であり，同伴する多様体 $\mathbb{C}^n$ に対し，掛け算作用素 $\gamma(z)$ を Noether 作用素として採用することができる。

さて，$\Phi^s \xrightarrow{p(D)} \Phi^r \xrightarrow{q(D)} \Phi^{r_2}$ が完全なことを示す（存在定理）のに，完全列 $\mathcal{P}^s \xleftarrow{p'} \mathcal{P}^t \xleftarrow{q'} \mathcal{P}^{t_2}$ に上の命題を適用する。

$q(D)f=0$ なる $f\in\Phi^r$ は上に述べたように指数型表現されるが，ここで $N(q')=\mathbb{C}^n$，$\alpha=p'$ とできるから

$$\begin{aligned} f &= \int_{\mathbb{C}^n} p(\zeta)\, e^{i\zeta x}\, d\mu(\zeta) \\ &= p(D)\int_{\mathbb{C}^n} e^{i\zeta x}\, d\mu(\zeta) \end{aligned}$$

故に，$u=\int_{\mathbb{C}^n} e^{i\zeta x}\, d\mu(\zeta)\in\Phi^s$ は求める解である。ここで閉値域定理を使わなかった点は注目に値する。その代わり u があらかじめ与えられた Ω 全体に於ける解であるためには，上の測度 μ が Ω 全体で収束しなければならず，そのため $\tilde{\Phi}'$ の位相が重みをもった supremum norm の射影系として与えられていることが必要である。$\mathcal{E}'(\Omega)$ の場合には通常の帰納極限位相と同値な射影系の位相をわりと容易に与えることができる。Fundamental Principle を用いてその他の空間；例えば $\mathcal{D}'(\Omega)$ に於いて，存在定理を証明しようとするとこの辺が主要な努力になる。(c.f. Palamodov [9])

§3 その他

次に実解析函数及び hyperfunction の場合に少しく事情を考察してみよう。まず凸コンパクト集合K上の実解析函

数$\mathfrak{A}(K)$及びその双対$\mathcal{B}[K]$に対してはFundamental Principleが成立する。([12]) 従ってK上では実解析的解の存在定理が成立し，またK上の同次方程式の実解析的解は増大度のきっちり定まった測度による積分で指数型表現される。しかし凸開集合Ωの場合には，即にEhrenpreisが[13]において$\mathfrak{A}(R')$の位相で通常知られているものに対しては，そのdualのFourier変換を増大度を持ったsupremum normの射影系として表現することができないことを示している。$\mathfrak{A}(\Omega)$に於ける存在定理は，小松先生も指摘しているように閉値域定理の方法を拡張するのはむずかしく，一方Fundamental Principleもだめだというわけである。しかし最近Palamodov [10]がMittag-Leffler式の逐次解近似定理のかなり本質的な仕事を発表しており，これを用いれば$\mathfrak{A}(K)$のFundamental Principleから射影極限に移って存在定理を証明することもあるいは可能かもしれない。

次にhyperfunction $\mathcal{B}(\Omega)$に対しては位相が考えられないので上記の考察は一切不可能である。しかしcohomologicalな表現法を作ることは可能で，その心理的背景は，次のように位相的に説明される。

$\mathcal{B}(\Omega)$の双対空間がもしもあるとすればそれはコンパクト

な台をもつ実解析函数の空間 $\mathfrak{A}_*(\Omega)$ であろう。そのFourier変換 $\widetilde{\mathfrak{A}_*(\Omega)}$ は，種々の根拠から

$$|J(\zeta)u(\zeta)| \leq C_J \exp H_K(\zeta), \quad \exists K \subset \Omega, \ \forall J$$

なる増大度をもつentire functionの空間と考えられる。(ここにJ(ζ)はentire infra-exponential function c.f.[11]) さて，$\mathbb{C}^n$ の球状コンパクト化 $D = \mathbb{C}^n \cup S_\infty^{2n-1}$ の上に定義された正則函数芽の層(無限遠点に於ける芽は上記の増大度をもった正則函数の帰納極限で定義する。)を考えると，上に述べた $\widetilde{\mathfrak{A}_*(\Omega)}$ の元はこのglobal sectionとも云うべきものであるが，残念ながらFragmen-Lindelöfの定理によりそのようなものは0以外に存在しない。しかし，例えば楕円型多項式pに対し，その零点の多様体N(p)上にはnon-trivialなsectionが実際存在し，一定の意味をもつ(c.f.[11])。一般にも，$\mathbb{C}^n$ の適当な被覆を考えると，その各元の上にはsectionが存在する。次にdualに移ってこのことを云い直せば，

$$\int e^{-H_K(\zeta)} \Big/ 1+|J(\zeta)| \ |\mu| < \infty \quad \forall K \subset \Omega, \ \forall J$$

なるtotal measureをもつμに対してはentire function≠0の積分は決して収束しない。しかし $\mathbb{C}^n$ の適当な被覆を考えると，その各元の上の上記の増大度をもった正則函

数については その積分は収束し，特に整函数 $e^{-iz\zeta}$ を被覆の各元に制限したものの積分は，Z の正則函数より成る Čech cohomology の元を定める。これが一般の hyperfunction の Fundamental Principle 的表現であり，特に μ として support が $N=\{p(\zeta)=0\}$ に含まれるものをとれば，$p(D)u=0$ の hyperfunction solution u の指数型表現が得られる。

これについての正確なことは別の機会にゆずる。

文　献

[1] Ehrenpreis, L. A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients. Proc. Int. Symp. on linear spaces, Jerusalem, 1960

[2] Ehrenpreis, L. Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience, 1970

[3] Hörmander, L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Princeton, 1966

[4] Komatsu, H. 佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式，東大セミナリーノート 22，1968

[5] Malgrange, B. Sur les systèmes differentiels a

coefficients constants, Séminaire Bourbaki, 1962/3 No. 246 exp. 8

[6] Malgrange, B. Division des distributions I–IV, Séminaire Schwartz, Paris, 1959/60 exp. 21–25

[7] Palamodov, V. P. On the general look of solutions of linear differential equations with constant coefficients, Doklady, Acad. Nayk. 137 No. 4, (1961) 774–777

[8] Palamodov, V.P. Linear Differential Operators with Constant Coefficients, Mockva Nayka. 1967 (英訳 Springer 1970, 邦訳 吉岡書店近刊)

[9] Palamodov, V.P. Remarks on exponential representations of solutions of differential equations with constant coefficients, Mat. Sbornik 75 (118) No. 3 (1968) 417–434

[10] Palamodov, V.P. Functor of projectiv limit in the category of topological linear spaces, Mat. Sb. (1968), 567–603

[11] Kaneko, A. On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA 17–3 (1970) (to appear)

[12] Kaneko, A. 同II (to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec IA)

[13] Ehrenpreis, L. Solutions of some problems of division IV. Am. J. Math. 82, 522–588 (1960)