

Generalized Cauchy Problem から基本解の構成へ
 京大数理解 河合隆裕

偏微分方程式論において Cauchy 問題はそれが局所的性質を持つ (cf. 楕円型境界値問題) 故であろうか, 解の parametrize の方法として極めて便利な物であり, しかも複素領域においてもかなりよく調べられている。(持筆すべきは渡田 [1] である。) 従って偏微分方程式論を Cauchy 問題の観点から見直すことは単に双曲型方程式に限らずとも興味深いと期待される。

以下はその試みを実行してみたものである。

Part I は主として Fourier 変換の見地からの approach である。この章で得られる結果は特に新鮮な感じを与えるものではないけれど, 以下の章の理解を助けるのに方法が役立っだろう。又, compact support の hyperfunction の Fourier 変換論はそれほど重要でないが, parameter を入れれば, 一挙に応用分野が広がることに注意しよう。

尚, この章の最初に 昨年のシンポジウムの後に得られた初期値問題についての 2, 3 の結果を introduction の意味をかめて記しておく。

Part II では Part I の結果を Radon 変換を用いて変数係数 (係数は実解析的とする。以下同じ。) の作用素の双曲性, 及びその拡張である I-双曲性を考察する。更にその方法で singular solution の構成 (cf. Zerner [1], Hörmander [1]) を行う。これは Part III の結果と合わせると best possible であることが判る。この部分では層 C の理論 (佐藤 [1] ~ [3]) が問題の表現に適していることが如実に示される。
 (正則性に関連した) 尚 I-双曲性なる概念は

Volterra [1] (cf. Hadamard [1]) にその萌芽が見られるようであるが C の理論なしでは formulate されにくく、概念であろう。Cauchy-Kowalevsky の定理と双曲性の gap を埋める物として興味深い。

Part III では基本解の構成を行う。複素係数の時迄こめてこのような議論ができるとは私自身半年以前には考えていなかった。Hyperfunction の merit を感じさせられる。ここで用いられる基本解の構成法は Part I, II の直接接続として思いついた物だが、かなり目新しい有用な方法でないかと思う。

Part I Fourier 変換と初期値問題

§0. 河合 [1], [2] は Fourier hyperfunction の理論を用いて convolution operator S^* の双曲性を S の Fourier transform の性質で決定し, その系として S^* が通常の定数係数偏微分作用素という最も trivial な case には,

TR. $P(D)$ が hyperbolic w.r.t. $(1, 0, \dots, 0) \iff$

$P_m(D)$ が hyperbolic w.r.t. $(1, 0, \dots, 0)$

が成り立つこと

を示した。この系として $P(D)u=0$ なら u は

x_1 について real analytic に depend することが判る。この事実は双曲性の概念を初期値問題とより直接的に関係付けることを示唆する。§3 でそれを実行する。§1 では後の便宜の為いくつかの初期値問題についての定理を列挙する。§2 では Fourier 変換論において cohomology がもっともよく理論を表現することを注意する。これは Martineau [1] の一部分の拡張と見なせよう。

§1. 初期値問題について

TR. 1.1. $P_m(0, (1, 0, \dots, 0)) \neq 0$ とする。この時

$$P(x, D)u=0, \quad (\partial/\partial x_j)^j u(x_1, x') \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (j=0, \dots, m-1)$$

ならば $u=0$ (in some nbd of 0)

証明] 河合[2] 参照。 [2]の本文を書いている時この形の定理は ideal theorem として証明が与えなかったが、その後 相原君から 河合[2]の (Hörmander [1] 式の) Holmgren の定理の直接の系であることを注意された。相原君に感謝します。

尚 p.6. の注意参照。

Cor. $P(D)$ を 定数係数の偏微分作用素とし、 $P_m(1,0; -, 0) \neq 0$ とする。今 $P(\xi)$ の 既約成分のうち $(1,0; -, 0)$ 方向に関し、non-hyperbolic とする。今 $P(D)u=0$, $u(0, x')$ が compact support ^($\neq 0$) をもっているなら ^(実は) $u \equiv 0$ (in some nbd of 0).

証明] 河合[2] 参照。これは Hörmander [1] Th.5.7.2. の精密化と見られるが、これを特異性へのみ注目すると Part II の考察につなげていく。

Th. 1.2. $S = \{s(x) = 0\}$ は non-singular to C^ω -submanifold ($\subset \mathbb{R}^n$) とする。今 $P_m(x, \text{grad } s(x)) \neq 0$ (on S) とする。この時、 $\mathcal{B} \xrightarrow{P} \mathcal{B} \rightarrow 0$ (exact) が S 上で成立すれば、 $\text{Dist}^1(S, \mathcal{B}^P) \cong (\mathcal{B}_S)^m$

4

証明] 小松[1]の方法とほとんど"同じ"であるから略す。ただし、 $P: B_x \rightarrow B_x \rightarrow 0$ (exact) なる $\exists \omega \ni x$ st. $P: B(\omega) \rightarrow B(\omega) \rightarrow 0$ に注意しておく。(Schapira [1] にこの事実は注意されている。)

注意] 一般に $P: B_x \rightarrow B_x \rightarrow 0$ ($x \in S$) を仮定しなくとも、 $0 \rightarrow \text{Dist}^1(S, B^P) \xrightarrow{\delta} (B_S)^m$ (exact) は成立する。(Th. 1.1. にある。) 尚 この δ は次のような process で具体的に与えられる。 $\delta(x) \equiv \alpha_1$ と座標をとることにしておく。

- (i) まず $\mu = \{u^+(x), u^-(x)\} \in B^P(\omega - \omega \cap S)$ とし $\tilde{u}(x)$ を $u^+(x), u^-(x)$ の B の flabbiness による ω 全体の拡張とする。
- (ii) $P\tilde{u} = g(x)$ とすると $\text{supp } g \subset \omega \cap S$ 。
- (iii) Cauchy-Kowalevsky の定理により容易に判る
 ように $g(x) = Pf + \sum_{j=0}^{m-1} \delta^{(j)}(x) g_j(x')$
 ($\text{supp } f \subset \omega \cap S$) と unique に分解される。
- (iv) そこで $\mu(x) \mapsto \{g_j(x')\}_{j=0}^{m-1}$ なる対応を考えると (iii) における分解の uniqueness により、これは well-defined である。これから δ なる写像の具体的な意味である。

注意] この δ なる写像の具体的な意味を考えると、Th. 1.1 が通常の Holmgren の定理により得られることは何ら説明を要さない。

注意] この定理の δ の更に構成的意味は Part II で (適当な "regularity" の条件の下で) 与える。

注意] $\rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ (\mathcal{D} は differential operator の sheaf) なる微分方程式系に対しても適当な regularity の条件の下で $\dim S = n - l$ (l は \mathcal{M} の projective resolution の長さ) として $(B_S)^\alpha \cong \text{Ext}_S^l(\mathcal{M}, B)$ (α は \mathcal{M} により定まる。) が成立するようであるか、細部の吟味がまだ不十分なのでこれについては次回に譲る。

§2 Fourier 変換は cohomology 理論で最もよく説明される。(「難しい」² = 易しい)

Ehrenpreis 他により exponential type の entire function と analytic functional には確かによい対応がつけられた。だが、それは構成的でない為には実用上不便なことが多い。又、real compact support をもつ物が実際、応用上解析学に現われることは比較的少く、むしろ "fibre compact" に迄は条件がゆるめられることが必要となる。即ち parameter に依存して逆 Fourier 変換を行わねばならぬ。それは Borel や Polya の考え方を cohomology の言葉を用いて定式化することによってなされる。但し、以下この § では次の事実を仮定する。

$$(A) \quad \Omega : \text{open convex } \subset \mathbb{C}^n, \quad V : \text{open } \subset \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow H^j(\Omega \times V; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n}) = 0 \quad (j \geq 1)$$

これは実解析関数の空間の、商空間の完備性に関連した微妙な問題があり、未だ証明は出さない。但し、今の場合正則関数の特殊な多重調和関数の性質を調べた方が速いかも知れない。但し、(A) は ^{以下の}議論に不可欠というものでない。

lem. 2.1 $J(z)$ を \mathbb{C}^n 上の entire function として
 ある 次の評価 (*) を満たすものとする。

$$(*) \quad |J(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|^2} + h_K(z) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

但し $K \subseteq \text{compact convex}$,

$$h_K(z) = \sup_{z \in K} \text{Im} \langle z, \zeta \rangle \quad \text{とする。}$$

この時 $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ を \mathbb{C}^n 内の \mathbb{R}^n
 一次独立な vector として $\Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$
 を $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ の生成する cone とする。

ここで $z \in \Omega(\tau_0, \dots, \tau_{n-1}) \overline{\text{def.}} \{z \in \mathbb{C}^n \mid$
 $\text{Im} \langle z, \zeta \rangle > h_K(z) \quad \forall \zeta \in \Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})\}$
 に対し

$$\varphi_{\tau_0, \dots, \tau_{n-1}}(z) = \int \dots \int_{\Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})} J(\zeta) e^{i \langle z, \zeta \rangle} d\zeta$$

(これは well-def. である)

と定めると $\{\varphi_{\tau_0, \dots, \tau_{n-1}}(z)\}$ は

$$H^{n-1}(\{\Omega_{\tau_j}\}, \mathcal{O}) \cong H^{n-1}(\mathbb{C}^n - K, \mathcal{O})$$

$\cong H_K^n(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ の元を定める。

証明] $z \in \Omega(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$ とすれば

$$- \text{Im} \langle z, \zeta \rangle + h_K(z) < 0 \quad \text{on } \{|\zeta|=1\} \cap \Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$$

従って K compact 故 $h_K(S)$ が連続故
 $-\operatorname{Im}\langle z, \zeta \rangle + h_K(S) < -\varepsilon_2$ としてよい。

従って $-\operatorname{Im}\langle z, \zeta \rangle + h_K(S) < -\varepsilon_2 |\zeta|$ 故
 (*) により

$$\int_{\Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})} \int J(S) e^{i\langle z, \zeta \rangle} d\zeta \text{ は絶対収束し}$$

しかも Stein manif. 上 deRham cohomology
 が holomorphic form により表現されること
 より $\sum (-1)^j \varphi_{\tau_0, \dots, \widehat{\tau}_j, \dots, \tau_n}(z) = 0$
 ($z \in \Omega(\tau_0, \dots, \tau_n)$). 即ち cocycle
 condition を $\{\varphi_{\tau_0, \dots, \tau_{n-1}}\}$ は満たして
 いる。

注意 (1) $m=1$ の時は上の cocycle cond.
 が, 互いに解析接続される" という形に
 なる。これが Borel や Pólya の理論の
 出発点だったと思われる。従って Fourier
 変換の理論と関係するのは analytic
 functional であるよりはむしろ cohomology
 群であるか自然である。

(ii) $n \geq 2$ の時は $h_K(z)$ と

$\overline{\lim} \frac{1}{r} \log |J(rz)|$ の間に δ_{11} 対応が

たゞ、これが $n \geq 2$ の時 "linear" な

covering では不十分な理由であらう。

この周辺を整備することは多分函数論の面白い問題であらう。

Th. 2.2. $K \subset \mathbb{R}^n$ を compact convex set とする。この時 $J(t, z)$ が次の条件 (***) を満たすとする。

(***) V を \mathbb{R}^n 内の open set とする時, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \Omega_\varepsilon$ (\mathbb{C}^n 内の open set $\supset V$) s.t.

$\forall L \in \Omega_\varepsilon$ に対しても

$$|J(t, z)| \leq C_\varepsilon \cdot e^{\varepsilon |z| + h_K(z)}.$$

この時 $\int J(t, z) e^{i\langle z, \xi \rangle} dz$ に Lem. 2.1.

と同様の意味付けをすれば" これにより

$H_{K \times V}^n(\mathbb{C}^n \times V; \mathcal{O} |_{\mathbb{C}^n \times V})$ の元を得る。

証明] Lem. 2.1. と同様である。

§3 定数係数双曲型作用素の Cauchy 問題 の基本解

Th. 3.1 P を m 階定数係数 PDO とし,
 P_m が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に双曲型とする。この
時 $\exists \mu_k(x_1, x')$ ($0 \leq k < m$) s.t.

$$\begin{cases} P(D_1, D') \mu_k(x_1, x') = 0 \\ D_1^j \mu_k|_{x_1=0} = \delta_{k,j} \delta(x') \\ \text{supp}_{x'} \mu_k(x_1, x') \subset \{x' \mid |x'| < C|x_1\} \end{cases}$$

証明] $P(\xi) = \sum_{j=0}^m \xi_1^{m-j} q_j(\xi')$ とし

$$p_k(\xi_1, \xi') \stackrel{\text{df.}}{=} \sum_{j=0}^k \xi_1^{k-j} q_j(\xi') \text{ とおく。}$$

(この idea は Hörmander [1] に従う)

ここで P_m が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に双曲型た
らば 河合 [1] により $\exists C$ s.t.

$$\left. \begin{array}{l} P(\zeta_1, \zeta') = 0 \\ |\operatorname{Im} \zeta_1| > C |\operatorname{Im} \zeta'| \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$$

s.t.

$$|\operatorname{Im} \zeta_1| < \varepsilon |\operatorname{Re} \zeta_1| + C_\varepsilon \text{ とする。}$$

従って $P(\zeta_1, \zeta') = 0$ とすれば $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$

$$\text{s.t. } |\operatorname{Im} \zeta_1| < \varepsilon |\operatorname{Re} \zeta_1| + C_\varepsilon + C |\operatorname{Im} \zeta'| \text{ として}$$

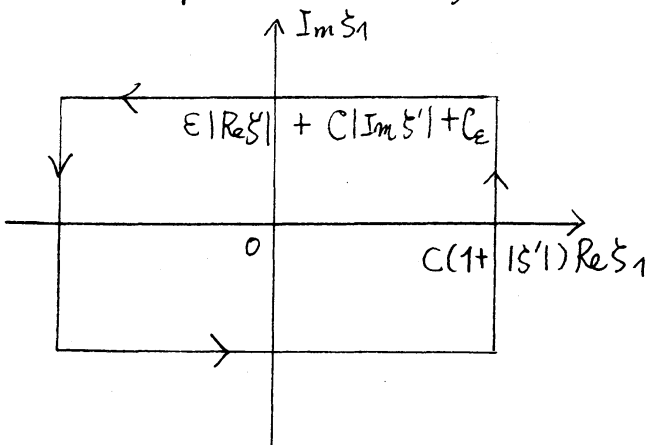
$$\delta u_0 \text{ 又 } P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0 \text{ 故 } |\zeta_1| \leq$$

$$\leq C(1 + |\zeta'|) \text{ として } \delta u_0.$$

今 (z_1, ζ') の entire function $E_k(z_1, \zeta')$ を次のように定める。

$$E_k(z_1, \zeta') \stackrel{\text{df.}}{=} \int_{\Gamma_{\zeta'}^\varepsilon} e^{-i\zeta_1 z_1} \frac{P_{m-1-k}(\zeta_1, \zeta')}{P(\zeta_1, \zeta')} d\zeta_1$$

但し $\Gamma_{\zeta'}^\varepsilon$ とは ε と ζ' により定まる下図のよう
た ζ_1 -plane 内の 積分路 とする。



この時 $|\operatorname{Re} \zeta_1| \leq |\zeta_1| \leq C(1 + |\zeta'|)$ 故
 せし必要ならば C_ε を大きくとり直すことによ
 り $P(\zeta_1, \zeta') = 0$ を満たす ζ_1 は $\Gamma_{\zeta'}^\varepsilon$ に
 よって囲まれる領域内にもみ存在するとい
 う。従って $\forall \theta > 0$ に対して

$$|E_k(z_1, \zeta')| \leq C_{\varepsilon, \theta} e^{\theta |\zeta'|} \times \\
 \times \exp \{ |z_1| (e^{|\operatorname{Re} \zeta'|} + C |\operatorname{Im} \zeta'| + C_\varepsilon) + \\
 + C |y_1| (1 + |\zeta'|) \} \text{ が成立する。}$$

よって §2 Th. 2.1. 1. による

$$\left[\int E_k(z_1, \zeta') e^{-i \langle \zeta', z' \rangle} d\zeta' \right]$$

$$\in H_{\mathbb{R}^n}^{n-1} (\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}; \mathcal{O} | \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1})$$

この元を $\mu_k(x_1, x')$ とおけば明らかに
 $\operatorname{supp} \mu_k(x_1, x') \subset \{x' \mid |x'| \leq C|x_1|\}$

又 μ_k の def. による

$$P(D_1, D') \mu_k(x_1, x') = 0 \quad \text{更に}$$

$$D_1^j \mu_k(x_1, x') |_{x_1=0}$$

$$= \left[\int e^{-i \langle \zeta', z' \rangle} d\zeta' \int_{\Gamma_{\zeta'}^\varepsilon} \zeta_1^j \phi_{n-1-k}(\zeta_1, \zeta') \times \right. \\
 \left. \times \left(1 / P(\zeta_1, \zeta') \right) d\zeta_1 \right] \text{ であり}$$

よって

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} s_1^j p_{m-1-k}(s_1, s') / P(s_1, s') \\ &= \int_{S_1} s_1^{j-k-1} + \left\{ \int_{S_1} s_1^{j-k-1} \left(\int_{S_1} s_1^{k+1} p_{m-1-k}(s_1, s') \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - P(s_1, s') \right) / P(s_1, s') \right\} \end{aligned}$$

ここで $\{ \}$ 内の分子は

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} s_1^{k+1} p_{m-1-k}(s_1, s') \\ &= \int_{S_1} s_1^{k+1} \sum_{j'=0}^{m-1-k} s_1^{m-1-k-j'} g_{j'}(s') \\ &= \sum_{j'=0}^{m-1-k} \int_{S_1} s_1^{m-j'} g_{j'}(s') \quad \text{よして} \quad \int_{S_1} s_1^{m-1} = 1 \end{aligned}$$

高々 $(j-k-1) + k = (j-1)$ 次である。

故に $j < m$ 故

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{S'}} \int_{S_1} s_1^j p_{m-1-k} / P \, dS_1 \\ &= \int_{\Gamma} \int_{S_1} s_1^{j-k-1} \, dS_1 \quad \text{従って} \end{aligned}$$

$$D_1^j \mu_k |_{x_1=0} = \delta_{kj} \bar{\sigma}(x')$$

$$\text{系} \quad \begin{cases} P(D_1, D') u(x_1, x') = f(x_1, x') \\ \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(x_1, x') \Big|_{x_1=0} = g_k(x') \end{cases}$$

$$(k=0, \dots, m-1)$$

において $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-1})$ ならば
 $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ として unique に存在。

証明 一意性は §1 Th. 1.1. より明らか。

存在は Duhamel の原理による。簡単の為

$$P(S_1, S') = S_1^{m+1} \quad \text{と仮定しておく。}$$

$$k(x_1, x') \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, x') - P(D) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} x_1^k g_k(x') \right)$$

$$\text{と定めて} \quad \begin{cases} P(D) u'' = k \\ u'' \Big|_{x_1=0} \text{ は 0-data} \end{cases}$$

をとこう。

$$\text{今 } v(x_1, y_1, x')$$

$$= \int \mu_{m-1}(x_1, x' - y') k(y_1, y') dy' \quad \text{とすれば}$$

$v(x_1, y_1, x')$ は $(m+1)$ -変数の実解析
 函数であり 更に $P(D)v = 0$

$$\text{かつ } \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^k v(x_1, y_1, x') \Big|_{x_1=0} = \delta_{m-1}^k k(y_1, x')$$

が満たされる。従って

$\int_0^{x_1} \mathcal{V}(x_1 - y_1, y_1, x') dy_1 \stackrel{\text{df.}}{=} u''(x_1, x')$ と
定めれば $u'' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 更に
 $P(D_1, D') u''(x_1, x')$

$$= \int_0^{x_1} P(D_1, D') \mathcal{V}(x_1 - y_1, y_1, x') dy_1 \\ + \mathcal{V}^{(m-1)}(x_1 - y_1, y_1, x') \Big|_{y_1=x_1} = h(x_1, x')$$

× 明らかに u'' の Cauchy data は 0

従って

$u'' + \sum \frac{1}{k!} x_1^k g_k(x') \stackrel{\text{df.}}{=} u$ が求める解である。
ある。

更に初期値問題に関し hyperfunction の merit を示す次の定理が今迄の所より得られる。

$$\text{Th. 3.2. } \begin{cases} Pu = f(x_1, x') \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^k u \Big|_{x_1=0} = g_k(x') \quad \text{与る} \end{cases}$$

Cauchy 問題は f が x_1 について real

analytic に依存する限り P が双曲型ならば solvable である。

Proof] 河合 [1] の基本解を用いて $P(D)u' = f$ なる u' は容易に構成できる。次に河合 [1] の正則性を Γ_h により $u' |_{x_1=0}$ etc. を考え、それらを $\{h_k(x')\}_{k=0, \dots, m-1}$ とする。

Th. 3.1. 1. による

$$\begin{cases} P(D)v = 0 \\ v(0, x') = g_0(x') - h_0(x'), \dots \end{cases}$$

という Cauchy 問題は

$$v(x_1, x') = \sum_{k=0}^{m-1} \int \mu_k(x_1, x' - y') (g_k(y') - h_k(x')) dx' \text{ として解ける。故}$$

$u = v + u'$ として求める (唯一の) 解が得られる。

注意] $\left\{ \begin{array}{l} \text{Th. 3.1. 1. において} \\ P(\xi_1, \xi') = \prod_{j=1}^m (\xi_1 - \alpha_j(\xi')) \end{array} \right\}$ として

$|\xi'| \gg 1$ ならば $\alpha_j \neq \alpha_k$ ($j \neq k$) を仮定する

は p_{m-1}/P の代わりに

$$\prod_{j=2}^m (s_1 - \alpha_j) / P \text{ を考え、しかも } \alpha_1 \text{ は}$$

p. 12 の長方形内に入るとすれば^(*) $PE=0$

$E(0, \alpha') = \delta(\alpha')$ なる E を得る。この事実を精密化した物が Part II 3.8 の結果である。

尚 Part II の結果は const. coeff. の場合には global にも結果を与えていることを注意しておく。
(約束半径を調べればよい。)

(*) 但し今度は積分路 $\Gamma_{s'}^\varepsilon$ は $\alpha_1(s')$ を中心とする (たとえば半径 1 の) 円とする。又、この証明法から判るように $\alpha_j \neq \alpha_k$ という条件はもとゆるめうる。

Part II Cauchy 問題の基本解

§0 まず §1 では双曲型作用素に対する Cauchy 問題の基本解を構成する。以下作用素は simple characteristic であると仮定する。多分 constant multiplicity なら以下の議論は成立すると思うけれど詳細が検討していないので次回に譲りたい。§2 では §1 の方法を modify して、^{たとえば} principal part が real なる operator に対して bicharacteristic strip 上の singularity への solution を構成する。この結果は更に Part III で拡張される。§3 では I-双曲性なる概念を論じ、Cauchy-Kowalevsky の定理を実領域で拡張する一つの方向 (多分唯一つの方向) を示す。

§1 双曲型作用素と Cauchy 問題の基本解

以下 Part II, Part III を通じて基本的な次の定理を浜田 [1] より引用しよう。

Theorem (Cauchy-Kowalevsky - 浜田)

$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) = (\partial/\partial t)^m + \dots$ は simple characteristic とする。今 $K_1(\xi), \dots, K_m(\xi)$ を $t=0, \langle x, \xi \rangle = 0$ を通る ^(P2) characteristic surface

とする時 $\langle x, \xi \rangle = 0$ で "pole" をもつ $t=0$ に与えられた初期 data に対して $Pu=0$ の解で $K_1 \cup \dots \cup K_m$ 以外で多価解析的な物で local に, unique に, 存在する。

注意] $P_m(t, x; \tau(t, x, \xi), \xi) = 0$ の解を $\{\tau_j\}_{j=1}^m$ とする時 $K_j = \{\varphi_j(t, x) = 0\}$ 但し $\varphi_j = t\psi_j(t, x) + \langle x, \xi \rangle$ ($\psi_j(0, 0) = \tau_j(0, 0, \xi)$) と表現できる。又 $u = \sum_{j=1}^m u_j$ $Pu_j = 0$, u_j は φ_j の逆中と $\log \varphi_j$ の正則函数を係数とする一次結合で現わされる。

例 1.1. 上の定理と同様の仮定で $t=0$ での初期 data を p 個 ($1 \leq p \leq m$) 与え, K_1, \dots, K_m の任意の p 個 (これを K_1, \dots, K_p としよう) を指定する時 $K_1 \cup \dots \cup K_p$ 以外で多価解析的な解が存在する。しかもこれらの存在域は, $\langle x, \xi \rangle = \langle y, \xi \rangle$ に pole をもつ data を与えて y について一樣な存在域を local に持つとしてよい。

証明] 浜田 [1] p. 23 頁. の殆んど同一の繰り返し故略する。

Th. 1.2. P が t 方向に双曲型であると仮定する。この時

$$\begin{cases} P(t, x; \partial_t, \partial_x) E_j(t, x; y) = 0 \\ (\partial_t)^k E_j(t, x; y) \Big|_{t=0} = \delta_{jk} \delta(x-y) \\ (0 \leq k \leq m-1), (0 \leq j \leq m-1), \end{cases}$$

を満足する $E_j(t, x; y)$ が存在する。この時 $E_j(t, x; y)$ は $t=0, x=y$ を通る bicharacteristic curves の全体 (ie characteristic conoid) を除いた所で実解析的である。特に Part I §1 Th. 1.1 により有限伝播速度の現象を示す。

証明 いずれの場合でも証明に変わりはないから最も重要な $j=m-1$ の時を扱おう。以下 E_{m-1} を単に E と記すことにする。

次のように Cauchy 問題を複素領域で考えよう。 ($\xi \in S^{n-1}$)

$$\begin{cases} P(t, z, \partial_t, \partial_x) E(t, x; y, \xi) = 0 \\ (\partial_t)^k E(t, z; y, \xi) = \delta_{k, m-1} \times \frac{1}{\langle z-y, \xi \rangle} \end{cases}$$

(n は $t=0$ の次元数) 但しここで $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ ($|t|, \|y\| \leq 1$) とする。このように E は流束の定理により, $K_0(y, \xi) \cup \dots \cup K_m(y, \xi)$

を除いて多価解析的に存在する。しかも今

P は t -方向に双曲型であり, $x, y \in \mathbb{R}^n$ 故,

$K_j(y, \xi)$ の定義方程式 $\mathcal{P}_j(t, x; y, \xi)$ は
 $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とすれば $\mathcal{P}_j(t, x; y, \xi) = 0$ なる点
 で $\text{Im} \mathcal{P}_j > 0$ なる領域で正則 ^(超函数の) bary value をとれる
 ように取っているとしてよい。(佐藤 [1], [2] 参照。)

($t \in \mathbb{R}$ としても a priori には $t \in \mathbb{C}$ としておいても
 どちらでもよいことは上の議論と p.2. の注意より

明らか) 今 p.2. の注意により, $E = \sum_{j=1}^{m_L} E_j(t, x; y, \xi)$

$PE_j = 0$, E_j は K_j の外で多価解析的とし,

$E_j(t, x; y, \xi)$ の定める超函数を $E_j(t, x; y, \xi)$

と記す。ここで S.S. $E_j(t, x; y, \xi)$

$\subset \{ (t, x, \tau, \eta) \mid \mathcal{P}_j(t, x; y, \xi) \}$

$(\tau, \eta) = c \text{grad}_{(t, x)} \mathcal{P}_j(t, x; y, \xi)$ ($c > 0$) と

なっていることは明らか。(S.S. は singular

support on \mathbb{S}^{n+1} の意) 今 $E_j(t, x; y, \xi)$

は (y, ξ) に real analytic に depend するよう

$E_j(t, x; y, \xi)$ が作られているとして構わないから

$E_j(t, x; y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|\xi|=1} E_j(t, x; y, \xi) \omega(\xi)$ と定める。

$E = \sum_{j=1}^m E_j(t, x; y)$ とすれば"これが"求める値

質をすべて持った解であることは容易に判る。
 ここで層 C における積分の正則性に関する
 佐藤の補題 (佐藤 [1] p. 28. [2], [3])
 が用いられた。(これについては更に一般の場合
 により詳しく §2 で論じる。)

注意] 上の証明から判るように初期 data を全く
 一般にすることを要しない。双曲性ばかりでも
 不要でない。これが §3 の発想の出発点であ
 る。

§2 Singular Solution の構成

Th. 2.1. P_m が real であるとする。このとき、 P の
 任意の bicharacteristic strip \mathcal{L} を一つ fix
 する時、 $Pu=0$ の $\phi \neq 0$ の s.s. $u \subset \mathcal{L}$ とする物が
 存在する。

証明] 適当に座標系をとって $\xi_0 \in ICS^{n-1}$ とし
 $(0,0; \tau_0, \xi_0)$ を通る bicharacteristic strip が \mathcal{L}
 となり、しかも $\tau(t, x; \xi)$ が $(0,0, \xi_0)$ の近傍で
 real と仮定して構わない。ここで §1 Th. 1.1.

の結果と Th. 1.2. の方法を用いて、

$$\left. \begin{array}{l} PE=0 \\ E(0, x, y, \xi) = \frac{1}{\langle x-y, \xi \rangle + i0}^n \end{array} \right\}$$

が $E(t, x, y, \xi)$ を構成できる。 ($\xi \in I$)

$E(t, x, y, \xi)$ を (t, x, y, ξ) の超函数と思、て

その S.S. を考えれば 明らかに

$$\text{S.S. } E \subset \{ \varphi(t, x, y, \xi) = 0 \} \text{ として}$$

$\text{grad}_{(t, x, y, \xi)} \varphi$ が方向 ξ . ここで $\mu(y)$ を $\{y=0, \xi=\xi_0\}$ へのみ support をもつ超函数として (たとえば $\frac{1}{\langle x, \xi_0 \rangle + i(x^2 - \langle x, \xi_0 \rangle^2) + i0}$)

$$\int E(t, x, y, \xi) \mu(y) dy \omega(\xi) = u(t, x) \text{ を考え}$$

れば、この積分は C での積分 (佐藤 [2], [3] 参照) として well-defined で、しかも ξ についての積分が行われているから 佐藤の補題により $\text{S.S. } u(t, x) \subset \emptyset$ しか構成法より明らかに $u(0, x) = f(x) \neq 0$ i.e. $\emptyset \neq \text{S.S. } u(t, x)$

注意] 我々の singular support の定義による $u(t, x)$ は bicharacteristic curve の外で real analytic であることは注目に値する。 (cf. Hörmander [1])

Ch. 8.)

注意] この定理の逆については Part III で論
 じる。

Th. 8.2. P is real coefficient と限らな^い作
 用素とし, $P_m = A_m + i B_m$, A_m, B_m is real coeff.
 とする。この時 $\text{grad}_\xi [P_m, \bar{P}_m] = 0$ on $P_m(x, \xi) = 0$ ----- (1) とし, 更に $P_m(x, \xi) = 0$ 上で
 $\text{grad}_\xi A_m(x, \xi)$ と $\text{grad}_\xi B_m(x, \xi)$ が "一次独立
 ----- (2) と仮定しよう。

この時

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = \text{grad}_\xi A_m(x, \xi) \\ \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} = \text{grad}_\xi B_m(x, \xi) \\ \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} = -\text{grad}_x A_m(x, \xi) \\ \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} = -\text{grad}_x B_m(x, \xi) \end{array} \right. \quad \text{なる偏微}$$

分方程式系は完全積分可能であり, 従って $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ として $(x(0, 0), \xi(0, 0))$ を与えれば "unique
 to "bicharacteristic surface" (という用語があ

るかどうかわからないか) を定める。この時、この bicharacteristic surface $P = \text{singularity}$ を持つ non-trivial な solution u が存在する。

証明] Th. 2.1. の方法をこの場合に適用することは可能と思われ、又それは §3 の結果を改良するためにも重要なのだが、また Th. 1.1. に相当する結果が証明されていないので、ここでは Hadamard [1] の方法を用いよう。(Th. 1.1. も Hadamard の方法で証明されているのだから同じことだが。) 条件 (2) を考えると $x_1 = x_2 = 0$ 内で $\langle x, \xi' \rangle = 0$ ($\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$) なる超平面を考え、ここを通る bicharacteristic surface の全体を考えると x -space 内で P のある real characteristic surface σ で parameter を ξ' に、もつものがある。その surface の方程式を $\{\varphi(x; \xi')\}$ とすれば、 $P_m(x, \text{grad } \varphi(x, \xi')) \equiv 0$ 故、 φ の (逆) 中 $\log \varphi$ の一次結合として $Pu = 0$ $u(x; \xi')$ 作れる。しかも $\varphi(x, \xi')$ が real 故、 $u(x; \xi')$ の境界値として $u(x; \xi')$ なる超函数を得、これを ξ' について積分すれば、求める singular solution が得られる。

注意] いくつかの例から考えて この定理の条件 (2) はもとゆるめらると思われ。

§3 I-双曲性 ——— 初期値問題の可解性への一つの approach ———

$$\text{Th. 3.1. } \begin{cases} P(t, x; D_t, D_x)u = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j u(t, x) \Big|_{t=0} = \mu_j(x) \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases}$$

が 任意の $\{\mu_j\}_{j=0}^{m-1}$ に対して 解けるなら $\forall \xi \in \mathcal{S}^{n-1}$ に対して $\exists \tau \in \mathbb{R}$ st. $P_m(0, x; \tau, \xi) = 0$

証明] 佐藤の基本定理 (佐藤 [1], [2]) による S.S. $u \subset \{P_m(t, x, \tau, \xi) = 0\}$ 従って \mathcal{C} における制限の理論 (佐藤 [2]) により, S.S. $u(0, x) \subset \{\xi \mid (\tau, \xi) \in \text{S.S. } u(t, x)\}$ 故明らか。

注意] 上の結論は当然 $P_m(0, x; \tau, \xi) = 0$ の根 τ は必ず \mathbb{R} と \mathcal{S}^{n-1} である。こゝに証明するには Pseudo-differential operator の一般論の

構成を要し (Part III §3) まだ一般の case には証明してない。P が定数係数有次の作用素の時は正しい。

$$\text{Th. 3.2. } \begin{cases} P(t, x, D_t, D_x) u = 0 \\ \text{(C.P.) } \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j u(t, x) \Big|_{t=0} = \mu_j(x) \quad (0 \leq j \leq m-1) \right. \end{cases}$$

において ω_ξ S.S. $\mu_j(x) \in IC S^{m-1}$ (ω_ξ とは ξ -方向への projection) とする。次の条件 (IH) が成り立つなら上の (C.P.) は solvable.

条件 (IH) $P_m(t, x; \tau, \xi) = 0$ の根 τ は $\xi \in I$ なる限りすべて real である。

証明] §1 Th. 1.2 のそれと同様である。

Th. 3.3 更に条件 (IH)' : $\text{Im}(\tau(t, x; \xi)) \geq 0$ でも同様の結論が成立する。

証明] 証明方法より明らか。

注意] 更に上の定理を $m \geq 3$ の時は精密化することも可能であるか。今ここでそれに深入りすることは、遊びになるだろう。Part II §1 を参照されたい。とこと同じ analysis か (ie. 曲面波を

用いる) 可能であることは容易に判らう。

$$\left. \begin{array}{l} \text{eg. 1. } P = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 \\ \text{(これは Volterra [1] の扱ったものである。)} \\ \text{eg. 2. } P = \frac{\partial}{\partial t} + it \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right\}$$

注意] 上のように 初期値に 特異性の制限をつけて 双曲性を考えることを 仮に I-双曲性と呼んでみた。このように mod \mathcal{O} で考えることは reflection の原理の 一つの新しい見方を与える。ただし それには $M \geq 3$ の時 浜田 [1] の結果をもう少し改良する必要がある。詳しくは次回に譲りたい。ただし $M=2$ の時は 浜田 [1] の結果で十分で、その考え方を Part III §1 の $n=2$ の時の 正則性定理の証明中に示しておいた。詳細は Part II §1 と重複するので省略する。

Part III (Pseudo)differential operator の局所理論

§0 この章では 偏微分作用素の可解性, 正則性等を論じる。又この章の考察は最近 Pseudodifferential operator の formalism をほぼ完成させたので 殆んどそのまま Pseudodifferential operator の拡張ができる。まず §1 では 基本解の構成について Part II §3 の考え方をまかした物を述べる。(他にも構成法はあるが、こゝが最もよい結果を与える。) 又同じ考え方の適用例として $m=2$ の時の正則性定理に証明を与える。§2 では §1 で構成された基本解の正則性を検討する。§3 では pseudodifferential operator に対して §1, §2 の結果の拡張を試みる。

§1 基本解の構成

lem. 1.1. 次に示す条件 (S) の下で

$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) E(t, x) = 1 / (\langle x, \xi \rangle + at + i0)^m$
を満たす $E(t, x)$ が存在する。

条件 (S): $\text{Im} \langle x, \xi \rangle > 0$ に含まれ \mathbb{R}^n 上で $\text{Im} \langle x, \xi \rangle = 0$ に接するある領域 U_ξ において 各 j に対して
 $x_j > \alpha \geq \alpha$ 又は $\beta \geq \alpha > x_j$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) ならば
 $\text{Re } \varphi_j(t, x; \lambda) = 0$ なる限り $\text{Im } \varphi_j(t, x; \lambda) > 0$ 。ここで

t と s の大小関係は各 j により異なってもよい。尚 $\varphi_j(t, z; s) = 0$ を $t = s$, $\langle z, \xi \rangle = 0$ を通る

characteristic surface の方程式とする。

証明] 今たとえは " $\xi_1 \neq 0$ としてもよいから ($\because \xi = 0$

は non-characteristic 故問題ない。) $T = t$,

$w_1 = at/\xi_1 + z_1$, $w_j = z_j$ なる座の変換をして考

えることによる

$I(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) E(t, x) = 1/\langle z, \xi \rangle + i0)^m$
 の解を求めれば十分である。

今初期 data を $t = s$ において

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\langle z, \xi \rangle^{m+1} \end{pmatrix}$$

で与えて Part II §1 Th. 1.1. を適用して $u(t, z; s)$
 $= \sum_{j=1}^m u_j(t, z; s)$ なる解を得る。ここで $j = 1, \dots, l$

に対しては $t > s \geq \alpha$ で $j = l+1, \dots, m$ に対しては

$\beta \geq s > t$ において $\operatorname{Re} \varphi_j = 0$ なる限り $\operatorname{Im} \varphi_j > 0$

となるように j は決めておく。ここで

$$E(t, z) = u_+(t, z) - u_-(t, z)$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^l \int_{\alpha}^t u_j(t, z, s) ds - \sum_{j=l+1}^m \int_t^{\beta} u_j(t, z, s) ds$$

と定めれば "これは $z \in U_\xi$ で" - 正則 "であり, しかも $P(t, z, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, z) = 1/\langle z, \xi \rangle^{m+1}$ が成立する。

実際, $u^0 = u$, $u^{(j)} = (\partial/\partial t)^j u$ とおいて - 階化した方程式を $\partial/\partial t \check{u} = \mathcal{Q} \check{u}$ ($\check{u} = \begin{pmatrix} u^0 \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{pmatrix}$)

と略記する。今

$$\mathcal{P}(t, z) \stackrel{\text{df.}}{=} \sum_{j=1}^l \int_{\alpha}^t \check{u}_j(t, z, s) ds$$

$$- \sum_{j=l+1}^m \int_t^{\beta} \check{u}_j(t, z, s) ds \quad \text{と定めれば, 定義}$$

$$\text{により } \partial/\partial t \check{u}_j = \mathcal{Q} \check{u}_j \quad \text{BZ}$$

$$\partial/\partial t \int_{\alpha}^t \check{u}_j(t, z, s) ds = \check{u}_j(t, z, t) + \int_{\alpha}^t \partial/\partial t \check{u}_j ds,$$

$$\partial/\partial t \left(- \int_t^{\beta} \check{u}_j(t, z, s) ds \right) = \check{u}_j(t, z, t) -$$

$$\int_t^{\beta} \partial/\partial t \check{u}_j ds$$

が成立つから

$$(\partial/\partial t - \mathcal{Q}) \mathcal{P}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\langle z, \xi \rangle^{m+1} \end{pmatrix}$$

が $u(t, z, s)$ の初期条件の予え方により成立する。

この方程式系の最下行に注目して, 初期条件の予え

方により成立する $v_j = (\partial/\partial t)^j v_0$ を代入すれば

$$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) v_0(t, z) = 1/\langle z, \xi \rangle^{n+1}$$

しかも定義により $v_0(t, z) = E(t, z)$

$$\text{従って } P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, z) = 1/\langle z, \xi \rangle^{n+1}$$

故に条件により $E(t, z)$ の境界値を考えて

$$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, x) = 1/(\langle x, \xi \rangle + i0)^{n+1}$$

解 $E(t, x)$ が求まる。

系. 今 \mathcal{P}_j に対してについての一種の positivity を要求したか。実は一つの \mathcal{P}_j についての条件でその方向の solution が出ていることは明らかである。実際

$$E(t, z) = \sum_{j=2}^l \int_a^t u_j(t, z, s) ds + \sum_{j=l+1}^m \int_t^b u_j(t, z, s) ds$$

すなわち $E_1(t, z)$ とすれば $E_1(t, z)$ の定める超函数 $E_1(t, x)$ に対して $P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, x)$

$$= 1/(\langle at + \langle x, \xi \rangle + i0 \rangle^{n+1}) \text{ が } (\tau_0, \xi) \text{ の nbd } \mathcal{C}$$

成立つからである。尚、と直接的にこの事実を示せるか

それには 須田 [1] をもう少し改良する必要がある。

更に上では 平面波による δ 函数の分解による基本解を作ったが、これでは適用範囲が狭くなる。そこで 曲面波による δ 函数の分解を与える次の 佐藤の公式

を用いよ。 (佐藤 [3] 参照)

公式 (佐藤)

今 $\varphi(x, \xi)$ が $(0, \xi)$ で positive type と
す。 $\varphi(x, \xi) = \sum x_j \varphi_j(x, \xi)$ ($\varphi_j(x, \xi)$ は
 ξ について positively homogeneous) と分解して

$$\int_{S^{n-1}} \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \omega(\xi) = \frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!} \delta(x)$$

この公式により characteristic surface として

$t=s$ で $\varphi(x, \xi)=0$ を通る物を考えよ。 Part II

§1 Th. 1.1. を initial data として

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} / \varphi^n \end{array} \right]$$

を予えて用いよは "条件 (S) の下で" Lem 1.1. が
成立つことは明らかである。

従って前章系により, 適当な φ を選ぶことによ
り, そこを通る characteristic surface の
厚さを精密に調べられる。 あるいは Mironberg =
Treines [1] の方法が役に立つので それを次元以降で
(座標変換の)

検討しよう。

適当な実の座標変換により、 $t=0$ での initial data を $\langle x, \xi \rangle + i \sum x_j^2$ として与えた characteristic equation の solution $w(t, x)$ が、下の条件 (NT) の下に、 $t > 0$ または $t < 0$ ($t \in \mathbb{R}$) において \tilde{X} における原点のある近傍において $w(t, x) \neq 0$ とできることを証明する。このようにして条件 (NT) の下に基本解の構成は完了する。

(条件 NT) を述べる前に Nirenberg - Trèves に従って operator の normal form を求めておく。

$P_m(x, \xi)$ は simple characteristic とするから、
 $P_m(x, \xi) = Q(x, \xi) (\xi_{m+1} - a - ib)$ (a, b は positively homogeneous order 1) と仮定してよい。以下 ξ_{m+1} を τ a_{m+1} を t と書くことにする。この時

(条件 NT) $\mathcal{C}_{(0,0, \xi^0)}$ は $\tau - a(x, t, \xi^0)$ の bicharacteristic strip に沿って偶数次の零点を持つか、あるいは奇数次の零点を持つとすれば、そこで微係数は正 ($\neq 0$) である。ここで 0 は偶数と見なす。

次に座標変換により、 a を消すこととする。それは、Nirenberg Trèves [1] に実行されているか、復習しておこう。これは実際 $J(y/x)$ を $y = y(x)$ の Jacobian

matrix として.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y &= J(y/x) \operatorname{grad}_{\xi} a(t, x, {}^t J(y/x) \xi^0) \\ y|_{t=0} &= x \end{aligned} \right\} \text{を とけば } \delta u. \quad t=s \text{ として}$$

$(t, x) \mapsto (s, y)$ はもちろん原点の複素近傍での解析的変換である。(原点の Jacobian = 1)

$\frac{\partial}{\partial s} = 0$ とすれば.

$$\sigma = \tau - \langle \operatorname{grad}_{\xi} a(t, x, {}^t J(y/x) \xi^0), {}^t J(y/x) \eta \rangle$$

故に $\tau - a(t, x, \xi)$ は

$$\sigma - \tilde{a}(s, y, \eta) = a(x(y, s), s, {}^t J(y/x) \eta) - \langle \operatorname{grad} a(s, x(y, s), {}^t J(y/x) \xi^0), {}^t J(y/x) \eta \rangle$$

従って $\operatorname{grad}_y \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0$ 従って

$$\tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0 \quad \therefore \left\{ \begin{aligned} \operatorname{grad}_y \tilde{a}(s, y, \xi^0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \tilde{a}(s, y, \xi^0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

さてこのような座標変換の後に $s=0$ で

$$\tilde{w}(0, y) = i \langle \xi^0, y \rangle - \sum_{j=1}^n y_j^2 \text{ に対する初期値問題に対する}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{w}(s, y) = \tilde{a}(s, y, \operatorname{grad}_y \tilde{w}) + i b(s, y, \operatorname{grad}_y \tilde{w})$$

の解 (これは既に unique に存在すること は判っていること

(一階偏微分方程式の一般論により
(収束する))

に注意) \tilde{w} の漸近展開を行い その最初の数項の評価を行うことにより \tilde{w} について p.6. で述べた性質

を証明する。即ち $\tilde{w}(s, y) = \langle \xi^0, y \rangle - \sum y_j^2 + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(s, y)$ 但し $u_k(s, y)$ は y について k 次斉次多項式 \tilde{w} を展開する。もし $s=0$ の初期条件により $u_k(0, y) = 0$ ($\forall k$) である。同様に

$l(s, y, \eta) = \tilde{u}(s, y, \eta) + \tilde{v}(s, y, \eta) = \sum T_R(s, y, \eta)$
 (T_R は y について R 次斉次, η について 1 次斉次) と展開しておく。 $\partial/\partial s \tilde{w} = T(s, y, \text{grad}_y \tilde{w})$ の y についての展開の係数を比べよう。

$$(0) \quad \partial/\partial s u_0 = T_0(s, y, \xi^0 + \text{grad}_y u_1)$$

$$(1) \quad \partial/\partial s u_1 = T_1(s, y, \xi^0 + \text{grad}_y u_1) + \langle \text{grad}_y T_0(s, y, \xi^0 + \text{grad}_y u_1), \text{grad}_y u_2 - 2y \rangle$$

ここで $u_2(s, y)$ を known function と考えようから上の (0), (1) なる 微分方程式 の解の評価を行う。

即ち

$$\frac{d}{ds} u_1 = T_1(s, y, \xi^0) + \langle \text{grad}_y T_0(s, y, \xi^0), \text{grad}_y u_2 - 2y \rangle + \Phi_1(s, y, u_1) \quad (\Phi_1 \text{ は解析的})$$

$$u_1 = \sum u_{1j} y^j \quad \text{とする。}$$

$$\text{かつ } \Phi_1(s, y, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{よるに 定義により, } & \text{grad}_y T_0(s, y; \xi^0) \\ &= \text{grad}_y T(s, 0; \xi^0), \quad T_1(s, y, \xi^0) \\ &= \langle y, \text{grad}_y T(s, 0, \xi^0) \rangle \text{ 故} \end{aligned}$$

ここで $\text{grad}_y \tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0$, $\partial/\partial s \tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0$,

$\text{grad}_y \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0$ を思い出し

$$d/ds u_1 = i \langle y, \text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0) \rangle$$

$$+ i \langle \text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0), \text{grad}_y u_2 - 2g \rangle$$

$$+ \Phi_1(s, y, u_1). \quad \text{ここで } u_2 \text{ は } y \text{ について}$$

の 2 次斉次多項式, $\Phi_1(s, y, 0) \equiv 0$ 故

$$|d/ds u_{ij}| \leq C_0 \left(\sum_k |u_{1k}| + |\text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0)| \right)$$

(C_0 は y_1 のみよる)

ここで 次の評価 (A) が成り立つと仮定しよう。(この評価については後述)

(A) $\tau - a(t, x, \xi)$ の lisch. strip の上で

$$|\text{grad } b|^2 \leq \text{const} |b|.$$

この仮定の下に.

$$|d/ds u_{ij}| \leq C_1 \left(\sum |u_{1k}| + |\tilde{b}(s, 0, \xi^0)|^{1/2} \right)$$

故に $|s| \ll 1$ とし

$$|u_{ij}| \leq C_2 \int_0^s |\tilde{b}(s', 0, \xi^0)|^{1/2} ds'$$

従って (条件 NT) $_{(0,0,0,\xi^0)}$ により,

$$\tilde{b}(s, 0, \xi^0) = -b_0 s^{k_0} + O(s^{k_0+1})$$

ここで (i) k_0 は偶数, 又は (ii) k_0 が奇数ならば

$$b_0 \leq 0.$$

よす case (i) の場合に話を進めよう。

$$|u_{ij}| \leq C_3 |s|^{(k_0+2)/2}$$

$$\therefore |u_i| \leq C_3'' |y| |s|^{(k_0+2)/2}$$

$$\leq C_3' |s|^{1/2} (|y|^2 + |s|^{k_0+1})$$

(0) $i=j$)

$$|d/ds u_i| = T_0(s, y, \xi_0) + \langle \text{grad}_y T_0(s, y, \xi_0), \text{grad}_y u_i \rangle$$

$$+ O(|\text{grad}_y u_i|^2)$$

$$\therefore |d/ds u_0| + b(s, 0, \xi_0)$$

$$\leq |\langle \text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi_0), \text{grad}_y u_1 \rangle| + C_4 |\text{grad}_y u_1|^2$$

再 $O(A) = d$ じ

$$\leq C_5 (|\tilde{b}(s, 0, \xi_0)|^{1/2} |s|^{k_0+2/2} + |s|^{k_0+2})$$

よす \tilde{b} の展開によ

$$= C_6 |s|^{k_0+1}$$

$$\therefore |u_0 - b_0' s^{k_0+1}| \leq C_7 |s|^{k_0+2}$$

$$\times \|u_1\| = |u_2(s, y)| \leq C_8 |s| |y|^2$$

$$\therefore \tilde{w}(s, y) = i \langle \xi_0, y \rangle + \sum y_j^2 + u_0 + u_1 + u_2 + O(|y|^3)$$

$$\therefore |\tilde{w}(s, y) - i \langle \xi_0, y \rangle + \sum y_j^2 - (b_0' s^{k_0+1})|$$

$$\leq \text{const.} \left\{ |s|^{k_0+2} + |s|^{1/2} (|y|^2 + |s|^{k_0+1}) + \frac{|s| |y|^2}{|y|^3} \right\}$$

$$\leq \text{const.} (|y| + |s|^{1/2}) (|y|^2 + |s|^{k_0+1}) \quad (\because |s| \ll 1)$$

従って $\overline{w =}$ を考えれば、これは characteristic equation の solution であり、 $s=0$ で $\langle \xi, y \rangle + i \sum y_j^2$ かつ $\text{Im } w \geq C(\sum y_j^2 - b' s^{k_0+1})$, 故に k_0 が偶数故 $b' > 0$ なら $s < 0$, $b' < 0$ なら $s > 0$ とすればよい。

しかも、今 $\lambda=0$ で考えたけれど、 $\omega = \lambda' \neq 0$ を原点として考えれば、そこで ω の λ に関する展開の初項は $b' \lambda^{k_0}$. 故に $b' > 0$ なら $\lambda < \lambda'$, $b' < 0$ なら $\lambda > \lambda'$ としてよい。従って $\int_{\alpha}^t F(t, z, \lambda) d\lambda$ とし

基本解を求めよう。

次に case (ii) を考えよう。この時

$b_0 > 0$ 故、 $\lambda' > 0$ ならそこで case (i) の $b' > 0$ の状況が適用されて、 $\int_0^t F(t, z, \lambda) d\lambda$ が well-defined.

又、 $\lambda' < 0$ ならそこで $b' < 0$ の状況が適用されてやはり

$\int_0^t F(t, z, \lambda) d\lambda = - \int_t^0 F(t, z, \lambda) d\lambda$ が well-defined.

従って $\int_0^t F(t, z, \lambda) d\lambda$ で基本解を求めよう。

よって (条件A) の検討が残るのみである。しかも (条件A) は今逆述べて来た所より判るように、 k_0 が偶数で ≥ 2 の時にのみ検討がめればよい。実際、 $k_0=0$ の時は問題なく、又 k_0 が奇数で、 $b_0 > 0$ の時には上のような評

面を必要としなければ"ある。しかるに k_0 が 2 以上の偶数であれば"この条件が必ず"成立することは Nirenberg-Treves [1] の Lem. 1.1 を用いて判る。以上により証明は終る。 $T=$ 。

以上述べた所から 条件(NT)の下で"基本解が構成された。従って

Th. 1.2. (x_0, ξ_0) の近傍で (NT) が成立していれば $P(x, D_x) u(x) = \mu(x)$ が とける。ここで

S.S. μ は (x_0, ξ_0) の十分小さい近傍に含まれるとする。

証明] $\mu(x) \in (C_M)_*$ は $(B_{S^*M} / A_{S^*M})_*$ の元で表現されるから それに $\chi_I(x, \xi)$ (I は (x_0, ξ_0) の適当な nbd.) をかけることは well-defined であるから その元を $\mu_I(x, \xi)$ とし、これを \mathcal{B} の flabbiness を用いて $\mu_I(x, \xi) = \mu_+(x, \xi) + \mu_-(x, \xi)$ 且し $\text{Supp } \mu_+(x, \xi) \subset [\text{(NT) の条件中 } \xi$ の s に関する展開の最初の項の係数が負の閉包] $\overline{A_+}$ $\text{Supp } \mu_-(x, \xi) \subset [\text{(NT) の条件中 } \xi$ の s に関する展開の最初の項の係数が正の閉包] $\overline{A_-}$ とする。

上の分解を用いて $\varphi_+(z, \xi) \overline{A_+}$
 $= \int F_+(z, y, \xi) \mu_+(y, \xi) dy$ と定めれば、

$F_+(z, y, \xi)$ の構成法により $\varphi_+(z, \xi)$ は $z \in \Omega$ (ie. (z_0, ξ_0) の \tilde{X} における nbd.) において正則な超函数 (in ξ) である。 $\varphi_-(z, \xi)$ も同様にして定めて $\varphi(z, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_+(z, \xi) + \varphi_-(z, \xi)$ とすれば $\int \varphi(z, \xi) \omega(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} U(z)$ は $z \in \Omega$ で

正則故 その境界値を考へることか出来る。これを $u(x)$ とする。すると

$$\begin{aligned} & P(z, D_z) U(z) \\ &= \iint \frac{1 + i \langle z-y, \xi \rangle}{(\langle z-y, \xi \rangle + i|z-y|^2)^n} (\mu_+(y, \xi) + \mu_-(y, \xi)) dy \omega(\xi) \\ &= \iint \frac{1 + i \langle z-y, \xi \rangle}{(\langle z-y, \xi \rangle + i|z-y|^2)^n} \mu(y, \xi) dy \omega(\xi) \end{aligned}$$

両辺は Ω で正則故 ここで境界値に移して

$$(z_0, \xi_0) \text{ の nbd. で } P(x, D_x) u(x) = \mu(x) \quad \text{Q.E.D.}$$

尚、今迄我々は Nirenberg Trèves 式の条件の与え方をしてきた。上の考察では その $k = \infty$ の case しかまだ cover されてない。(近傍で $k = \infty$ ならば 53 頁

といけれど) これは $n=2$ の時には容易に判るように
 今迄の理論で cover されるか $n \geq 3$ の時はまだうまく
 証明できない。そこで Nirenberg Trèves 型
 の条件は実にうまいぎりぎりの所を捕え切ったもので
 あるが、naturalness の点でやや不備がある。これを
 補うものとして考えられたのが 佐藤の条件 (佐藤 [3]
 参照) であるが、これについて次の Th. が成り立つこと
 を注意しておく。

Th. 1.3 (佐藤の条件) $\Rightarrow P$ は (α, β) で
 "non solvable"

ここで (non) solvable の意味は次のように
 (少しずるいけれど) 定義する。

① $(\frac{\cdot}{P} \rightarrow C)$ が solvable

$$\Leftrightarrow PE(x, y) = \delta(x - y) \text{ が } S.S.E \notin \{(0, \gamma)\}$$

としてとける。(但し γ は dy 座標)

証明は殆んど自明故省略する。ここで上のように
 parameter を入れて solvable を定義しがいと
 一般には $\text{supp } \text{Cok } C^P$ が closed かどうか (少

なくとも *a priori* には) 不明故上のずるい
定義にも一理あるとの *advice* を柏原君から
頂いた。

ここで 佐藤の条件と (NT) の条件は多分 *equivalent*
であろうと予想されることを付記しておく。(但し直接
証明はかなり難しいであろう。)

さて次に正則性の問題についてはかなり問題は
微妙でこれには Nirenberg-Trèves 流の *formulation*
以外今一考えつかない。(我々の間にあつたある予
想が最近 柏原君の反例により $n \geq 3$ の時崩れた
ので)。

正則性については A_+ , A_- の内点では今迄述べ
てきた所で証明は済んでいるが $(x_0, \xi_0) \in \partial A_+$
の時 は微妙でまだよく判らない。

ただ $n=2$ の時のみは *characteristic surface*
と *bicharacteristic curve* が一致すること
等の特殊事情のため理論は簡明になる。次頁
以降でそのことを示す。 $n \geq 3$ の時のこの方法の拡張は
後田 [1] の拡張と共に現在考えている所である。

$m=2$ の時の正則性定理

Th. 1.3. $m=2$ とする。この時

$$\text{Ker } C^P \ni (x_0, \xi_0) \iff \exists k(x) \text{ s.t.}$$

$$P_m(x, \text{grad } k) \equiv 0, \quad k(x_0) = 0,$$

$$\text{grad } k|_{x_0} = \xi_0. \quad \text{Im } k \geq 0 \text{ if } \text{Re } k = 0$$

証明(\Rightarrow)を行えばよい。 $x_0 = (0, 0)$ とする。

$x_1 = t, \quad x_2 = x$ とし、 x の複素座標を τ で記す。対偶を証明するのであるが、それには k に関する条件を少し言いかえた形で行う。
上の仮定

$P_m(t, x, 1, 0) \neq 0$ が考えている所で成り立っているとして一般性は失われない。又

$P(t, x, D)u = 0$ ならば、佐藤の基本Th.

により、 $u = \sum_{j=1}^m u_j$ s.t. $u_j \in \{ (t, x, \tau_j(t, x), \xi_j(t, x)) \mid P_m(t, x, \tau_j, \xi_j) = 0 \}$, $Pu_j = 0$ としよ。

ここで仮定より $\xi_j \neq 0$ である。今 $(\tau_1(0, 0), \xi_1(0, 0)) = \xi_0$ と仮定して u_1 が $(0, 0)$ の近傍で実

解析的であることをいいた。今 $(0, 0, \xi_0)$ を通る

characteristic curve の方程式 $k(t, x) = 0$

を x についてとる。 $\tau = \varphi(t)$ とする。 $\tau/\xi_1 > 0$ とする。

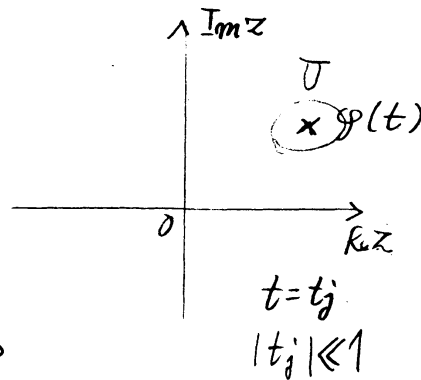
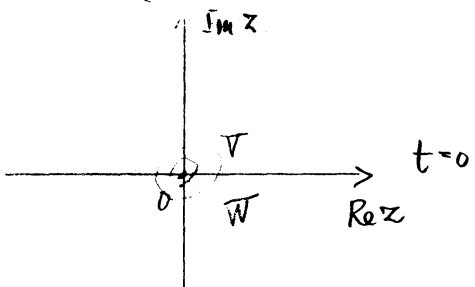
ここで我々は 次のことを証明する。

$$(R) \exists t_j \rightarrow 0 \quad \text{s.t.} \quad \text{Im} \varphi(t_j) > 0$$

$$\Rightarrow \text{S.S.U.} \not\equiv (0,0)$$

実際 (R) が成り立つとしよう。

[14]



$z=0$ の如何なる近傍 V に對しても

($\varphi(t)$ の十分小さな近傍 U を考えれば,

$z \in U$ とし (ε, z) を通る characteristic curves は ただ一本を除き $\{0\} \times V$ と

交わらないとしてよい。何故なら $t = \varepsilon z$

$z_0 \in U$ を初期 data とし Hamilton-Jacobi

の方程式をとき $t=0$ における z の値を

$z(z_0)$ とすれば, $z(z_0)$ は local homeo,

特に U を十分小とし homeomorphism とし

よくなる。従つて Part II Th. 1.1.1. によつ

($n=2$ 故) $U(0, z)$ は $V \times \mathbb{R}$ 正則である。

($\because z_0 \in \partial U \Rightarrow z(z_0)$, which enters in V , never enters in $W \ni 0$)

逆に条件 (R) が成立たないならば、明らかに singular solution が存在する。

さて条件 (R) を characteristic surface の言葉に言い直しておこう。

$k(t, x) = \lambda - \varphi(t)$ 故 $\varphi(t) = \theta(t) + i\psi(t)$
 として $\exists t_j \rightarrow 0$ s.t. $\psi(t_j) > 0$ 一方
 $\operatorname{Re} k(t, x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) とすると $x - \theta(t) = 0$
 特に $t = t_j$ として $x_j = \theta(t_j)$ の時 $\psi(t_j) > 0$
 即ち $\operatorname{Im} k < 0$ 言い換えれば $\exists (x_j, t_j) \rightarrow 0$
 s.t. $\operatorname{Re} k(t_j, x_j) = 0$ かつ $\operatorname{Im} k(t_j, x_j) < 0$

逆に $\operatorname{Re} k = 0$ かつ $\operatorname{Im} k < 0$ ならば $\psi(t) > 0$
 は明らか故 条件 (R) は characteristic surface の言葉で言い換えられた。

注意 このように characteristic surface の言葉で regularity が記述できるのは $n=2$ の特殊性にかなり強く依存していることを最近 柏原君が反例により示した。

§2 基本解の正則性

この節では §1 で作られた基本解の正則性を調べる。この節の事実の証明は柏原君の advice によりかなり短くなった。私の最初の証明は複素領域での analysis をもとに要した。柏原君に厚く感謝します。

Th. 2.1. $P_m(x, D)$ は real coefficients であるとする。この時 §1 で作られた基本解の $\text{sing. support} \neq S$. S . E は \mathbb{R}^n 上の集合 S に含まれる。

$S = \Delta^a \cup \{(x, x', \xi, -\xi') \mid (x, \xi) \text{ と } (x', \xi') \text{ は同一の bicharacteristic strip に乗っていて } x_1 > x_1'\}$

証明] 今 P_m は real coefficients としているから

$$E(x, x') = \int_{x_1}^{\infty} d\omega(\xi) \int_x^{\infty} E(x, x', \xi, s) ds \quad \text{において}$$

$$S.S. E(x, x', \xi, s) \subset \{ \text{grad } \varphi \mid \varphi = 0 \}$$

としてよい。ここで φ は $x_1 = s$ で $\langle x - x', \xi \rangle$

とある characteristic equation の solution

$$\text{故. } \partial/\partial x_1 \varphi = (x - x_1') \quad \text{又. } \text{grad}_\xi \varphi \big|_{t=x_1} = x - x'$$

$$(\partial/\partial x_1 + \partial/\partial t) \varphi \big|_{t=x_1} = \xi_1, \quad \text{grad}_x \varphi \big|_{t=x_1} = -\xi$$

は明らかである。従って積分の正則性に関する

佐藤の補題 (佐藤 [1] p.28 [2], [3]) を $\int dw(x)$ と $\int dx$ に適用すれば直ちに結果が得られる。実際半空間に入っていることは、

$\varphi(x, y) = 0$ として $x = x_1'$ 一方積分範囲から見て $x < x_1$ 故 $x_1' < x_1$ が従うからである。

注意] この定理により Part II §2.の結果が best possible であることが判る。

§3 Pseudodifferential operator の calculus について。

漸近展開とは何かを反省するとそれは Formal power series の空間 (又はその部分空間) に適当な位相を入れて考察することの代数的表現であることがわかる。これと Fourier 変換とを結びつけることにより我々は自然に (スロトIV分解された) pseudodifferential operator の概念に到達する。これは、定義のみあって定理がないと言われてきた hyperfunction における pseudodifferential operator の概念 (佐藤 [1], [2]) に肉付けを与える物である。時間があれば pseudodiff. op. の可解性 その他に関する定理, 予想等を話したい。又基本解の構成もこの方法で可能であるか、詳しくは次回に譲る。

文献

- Hamada [1] PRIM. '69 p. 21~41
- Zerner [1] C.R. 250 (1960)
- Hörmander [1] Linear P.D.O. Springer
[2] Conference at Tokyo. '69
- Volterra [1] Rivista di Matematica (1894) p.1~14.
- 河合 [1] To appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
[2] '69. 11月 Symposium 報告集
- 佐藤 [1] 堅田ミニホロジウム 報告集
[2] 数学の歩み 15-1 (1970) p.9-72.
[3] To appear
- Martineau [1] Math Annalen (Köthe 記念⁽⁵⁾)
- Schapiroa [1] Bull. Soc. math. France (1969)
- 小松 [1] Conf. at Tokyo '69
- Nirenberg-Treves [1] C.P.A.M. '70-1.

追記

このミニホロジウム 後に、次の notes が出ておきますので
御参考迄い。

T. KAWAI. Proc. Japan Acad. 46. p. 912-916.

M. Kashiwara and T. Kawai. " p. 1130-1134.

T. Kawai. Proc. Japan Acad. 47 p.19. - 23

(このトト申 p.20. Th.1. 中の $P'(z, D_z)$ は

$$P'(z, D_z, D_s) \left(\frac{1}{i\hbar} P(z, D_s + D_{z_1}, D_{z_1}) - P(z, D_z) / D_s \right)$$

の誤りです。尚同上. 47.-2 の T. Kawai の

(To appear)

Construction of a local elem. sol (II) を

御覧下さい。

更に Pseudo-diff. op. に関する部分は間もなく出ます
12月 Tokyo Symp. の報告集で述べる予定です。

尚本報告集, 今としましては (1971年2月) 飽き足らぬ
部分も多いのです。私に今加筆訂正をする時間的
余裕が御座居ませんので, 1971年3月のシンポジウムの私の
お話や, 現在準備中の "Construction of a local
elem. sol. for linear p.d.o. I, II." (上の Proc.
Japan Acad はその resumé です。) 及び 相原-河合
の (間もなく resumé のみは出す予定) pseudo-diff. op.
についての考察等を御覧頂ければ有難く存じます。