数理解析研究所講究録
114巻 1971年 5-17

場の量子論にあらわれる函数の解析性について

東大理 森本光生

§0. 場の量子論（[2], [5]）には、ある複素領域で整型（holomorphic）な函数の境界値として得られる超函数がしばしば登場する。一方，佐藤超函数論では，このような超函数が最も基本的な概念である。従って，場の量子論に現れる函数の解析性を調べるには，佐藤超函数論が有効な手段であるし，また逆に物理学者が開発したこれらの函数の理論は，我々の超函数論に良い例を提供する。実際，公理論的な場の量子論で有効に用いられている"くさびの刃の定理"は，佐藤超函数論に層Cの理論を産み出し，そしてこの定理の本質は層Cの考え方で明らかになった（[3]） 本稿では，場の量子論で解析接続の方法で得られているBargman-Hall-Wightman，Jostの定理を，超函数論の立場から見なおす。

§1. 超函数論の復習（[3], [4], [1]）

我々が考察する多様体は，ユークリッド空間$\mathbb{R}^N$である。$\mathbb{R}^N$上には実解析的函数のなす層$\mathcal{A}$，（佐藤）超函数のなす層

$\mathcal{B}$が定義されている．$\mathbb{R}^N$の余接球バンドルは$\mathbb{R}^N \times \tilde{S}^{N-1}$（$\tilde{S}^{N-1}$は $N-1$次元の球面）に同型であるが，この上にある層$\mathcal{C}$が定義されている．今πを$\mathbb{R}^N \times \tilde{S}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$なる自然な射影とする．$\mathcal{C}$の$\pi$による順像は（$\pi_* \mathcal{C}$ と書かれる）$\mathbb{R}^N$上の層である．

<u>定理1</u>．$\mathbb{R}^N$上の層の列として，次の列は完全である：

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \pi_* \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

またUを$\mathbb{R}^N$の任意の開集合とする．このとき次の線形空間の列は完全である：

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}(U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}(U \times \tilde{S}^{N-1}) \rightarrow 0,$$

ここで $\mathcal{A}(U)$はU上の実解析的函数のなす空間，$\mathcal{B}(U)$はU上の超函数のなす空間，$\mathcal{C}(U \times \tilde{S}^{N-1})$ は $U \times \tilde{S}^{N-1}$上の$\mathcal{C}$の断面のなす空間を表わす．

（写像α，β の定義については 文献[3]，[4]，[1]のどれかを参照されたい．）

$\tilde{\mathbb{R}}^N$で $\mathbb{R}^N$の双対空間を表わし，$\tilde{S}^{N-1}$は$\tilde{\mathbb{R}}^N$の単位球と考える．Γを$\mathbb{R}^N$ の開いた凸錐で頂点が原点にあるものとする．今Γ^+でΓの正の双対錐と$\tilde{S}^{N-1}$ の共通部分を表わす：

$$\Gamma^+ = \{ \eta \in \tilde{S}^{N-1} ; \langle y, \eta \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \Gamma \}$$

ここで $\langle y, \eta \rangle$ は $\mathbb{R}^N$ と $\tilde{\mathbb{R}}^N$の内積を表わす．Uを$\mathbb{R}^N$のある開集合，$F(x) \in \mathcal{B}(U)$とする．

<u>定義</u> Γに完全に含まれる開凸錐Γ_jの増大列でΓをとりつくすものを考える: $\Gamma_j \subset\subset \Gamma_{j+1} \subset\subset \Gamma$, $\Gamma_j \uparrow \Gamma$. 任意のjに対し, $\mathcal{U}$の複素近傍$\tilde{\mathcal{U}}_j$と

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{U}}_j \cap T(\Gamma_j) \quad , \quad T(\Gamma_j) = \mathbb{R}^N \times \sqrt{-1}\,\Gamma_j$$

で整型な函数fが存在して, $F(x) = \mathcal{B}\text{-}\lim_{y \downarrow 0} f(x+iy)$となるとき, Fは<u>Γ方向に解析的</u>という. ここで$\mathcal{B}\text{-}\lim$は(佐藤)超函数としての(コホモロジー的)極限を表わす.

<u>定理2</u> $F \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$に対する次の2条件は同値である:

1) FはΓ方向に解析的である;

2) $\mathrm{supp}\, \beta F \subset \mathcal{U} \times \Gamma^{+}$

ここで$\mathrm{supp}\, \beta F$は$\mathcal{C}$の断面βFの台を表わす. この定理に鑑み $\mathrm{sing\,supp}\, F = SSF = \mathrm{supp}\, \beta F$とおき, 超函数$F$の(分解された)特異台と呼ぶ. 以上の2定理は[3]に証明されている. また層$\mathcal{C}$の佐藤先生によるエレガントな定義と層$\mathcal{C}$の一般論については[3]または[4]を参照されたい. 次に佐藤の基本定理を述べる(証明は[3], [4])

<u>定理3</u> $F \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$とし, $P(x, D)$をm次の実解析的係数をもつ(線形)偏微分方程式とする. もし$P(x, D)F(x) = 0$ならば,

$$SSF \subset \{(x, \eta) \in \mathcal{U} \times \tilde{S}^{N-1} ; P_m(x, \eta) = 0\}$$

である. ただしP_mはPの主部を表わす.

§2. Bargman-Hall-Wightmanの定理, Jostの定理

この節では, 場の量子論で周知な上記の2つの定理を復習する. まず記号の約束からはじめる.

$\mathbb{C}^{4n}=\mathbb{C}^4\times\cdots\times\mathbb{C}^4$ (n個), $\mathbb{R}^{4n}=\mathbb{R}^4\times\cdots\times\mathbb{R}^4$ (n個)

を考える. $\mathbb{R}^{4n}$は必要に応じて$\mathbb{C}^{4n}$の実部とみなされる. 今$\mathbb{R}^4$に正の光錐

$$V_+=\{x\in\mathbb{R}^4;\ (x,x)>0,\ x^0>0\}$$

を考える. ここで

$$x=(x^0,x^1,x^2,x^3),$$

$$(x,x)=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2,$$

$$V_+^n=V_+\times\cdots\times V_+\ (n個)\subset\mathbb{R}^{4n},$$

$$T_n=T(V_+^n)=\mathbb{R}^{4n}\times\sqrt{-1}\,V_+^n\subset\mathbb{C}^{4n}$$ とおく.

公理論的な場の量子論には, T_nで整型な函数fで実のローレンツ群で不変なものが登場する(例えばWightman函数). fの境界値F, $F(x)=\lim_{y\downarrow 0}f(x+iy)$が物理的に意味のある量である. Bargman, Hall, Wightman; Jostの定理によると, この超函数FはJost点で解析的になることが結論できる. この辺の消息をもう少し精しく記述しよう.

Gを連結なローレンツ群, $G^{\mathbb{C}}$をその複素化とする. Gを$\mathbb{R}^{4n}$に, ($G^{\mathbb{C}}$を$\mathbb{C}^{4n}$に) 次のように作用させる;

$$G\ni g,\ \mathbb{R}^{4n}\ni(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto g(x_1,\cdots,x_n)=(gx_1,\cdots,gx_n)$$

$G^{\mathbb{C}} \ni g$, $\mathbb{C}^{4n} \ni (z_1, \cdots, z_n) \longmapsto g(z_1 \cdots z_n) = (gz_1, \cdots, gz_n)$.
柱状領域T_nはGで不変であるが$G^{\mathbb{C}}$ではそうでない. そこで"拡張された柱"T_n'を次のように定義する:

$$T_n' = \bigcup_{g \in G^{\mathbb{C}}} g T_n,$$

T_n'はもはや柱状領域でない. 次の2つの定理は周知である:

定理4 (Bargman-Hall-Wightman)

函数$f(z)$がT_nで整型かつローレンツ群Gで不変とする. このとき$f(z)$は"拡張された柱"T_n'にまで一価に解析接続され, 複素ローレンツ群$G^{\mathbb{C}}$で不変になる.

この定理で, 一価にという所が自明でない. この定理は本稿で用いないので, ここでは証明しない [2] または [5] を参照されたい.

定理5 (Jost)

$$T_n' \cap \mathbb{R}^{4n} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n};\ \text{任意の}\ \lambda_j \geq 0,\ \sum \lambda_j > 0\ \text{に対し}\ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\ \text{が空間的である.}\}$$

ここで$x \in \mathbb{R}^4$が空間的とは$(x, x) < 0$のことであり, またxが時間的とは$(x, x) > 0$のことである. 以後, $T_n' \cap \mathbb{R}^{4n}$の点をJost点と呼ぶことにする.

この二つの定理を組合せると次の系がいえる.

系 超函数$F(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$が与えられたとせよ. T_nで

整型な函数 $f(z)$ が存在して，$F(x)=\lim_{y\downarrow 0} f(x+iy)$ という形をしており かつ $F(x)$ が実のローレンツ群で不変だとせよ。この時，超函数 $F(x)$ は Jost 点で解析的である。

§3 我々の定理.

我々の目的は §2 の系を超函数論の層 $\mathcal{C}$ の考え方により見なおすことにある。佐藤の基本定理を用いる証明のアイデアは佐藤幹夫氏による。

<u>定理6</u>. $F\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$ が与えられたとする。このとき，

1) $S.S.F\subset\mathbb{R}^{4n}\times\{(V_+^n)^+\cup(-V_+^n)^+\}$

2) F がローレンツ無限小変換群で不変である

ならば，F は Jost 点で解析的である。

条件の 1) の意味は 超函数 F が V_+^n 方向に解析的な超函数と $-V_+^n$ 方向に解析的な超函数の和と表わされるということである。条件 2) の意味は次のとおりである：

<u>定義</u> $F(x)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$ がローレンツ無限小変換群で不変とは，ローレンツ群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 L に対し，

$$\sum_{j=1}^{n} {}^t(x_j)L\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)F(x_1,\cdots,x_n)=0$$

が成立することである。${}^t(x_j)=(x_j^0, x_j^1, x_j^2, x_j^3)$，${}^t\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j^0},\frac{\partial}{\partial x_j^1},\frac{\partial}{\partial x_j^2},\frac{\partial}{\partial x_j^3}\right)$，（$t$ は転置行列を表わす）という略記をした。

$\mathfrak{g}$の基底として

$$
\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & O & \\ 0 & & & \end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & O & \\ 0 & & & \end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & O & \\ 1 & & & \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

がとれるから，Fが無限小のローレンツ変換で不変とは，次の6個の方程式が成立することである．

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^0\frac{\partial}{\partial x_j^k}+x_j^k\frac{\partial}{\partial x_j^0}\right)F(x)=0,\quad k=1,2,3.$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^k\frac{\partial}{\partial x_j^l}-x_j^l\frac{\partial}{\partial x_j^k}\right)F(x)=0,\quad 1\leq k<l\leq 3.$$

§4. 定理の証明.

定理5の証明. (Jost点の幾何学的性質があとの理解に必要となるので，Jostの定理の証明をきちんと再現しておく.)

1° $n=1$ の場合.

$T_1'=\bigcup_{g\in G^{\mathbb{C}}} g\{z=x+\sqrt{-1}\,y\ ;\ y\in V_+\}$ とおくとき，

"$T_1'\cap\mathbb{R}^4=$ 空間的点全体" という等式を示せばよい．

まず包含関係 $\supset$ を示す．

$T_1' \cap \mathbb{R}^4 \ni gz$ とする. $z = x + iy$, $(y, y) > 0$, $y^0 > 0$ である.

実数 $= (gz, gz) = (z, z) = (x + iy, x + iy)$

$= (x, x) - (y, y) + 2\sqrt{-1}(x, y)$

であるから, $(x, y) = 0$. 今 y が時間的であるから, x は空間的であるか, 又はゼロである. いづれにしても.

$(gz, gz) = (z, z) = (x, x) - (y, y) < 0$.

次に包含関係 $\subset$ を示す. x が実で $(x, x) < 0$ とする. 適当な空間的回転によって,

$x = (x^0, x^1, 0, 0)$, $|x^0| < x^1$

としてよい. 今次の複素ローレンツ群 g_α を考える, $\hat{z} = g_\alpha z$:

$$g_\alpha : \begin{cases} \hat{z}^0 = \frac{1}{2} \cos\alpha \; z^0 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \sin\alpha \; z^1 \\ \hat{z}^1 = \frac{1}{2} \cos\alpha \; z^1 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \sin\alpha \; z^0 \\ \hat{z}^2 = z^2 \\ \hat{z}^3 = z^3 . \end{cases}$$

$(\mathrm{Im}\, g_\alpha x, \mathrm{Im}\, g_\alpha x) = \frac{1}{4} \sin^2\alpha \left((x^1)^2 - (x^0)^2 \right)$

$\mathrm{Im}\, (g_\alpha x)^0 = \frac{1}{2} \sin\alpha . x^1$

であるから, $0 < \alpha < \pi$ に対して $g_\alpha x \in T_1$ である.

<u>注意</u>. $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^4$ で任意の $j = 1, 2, \cdots, n$ に対し, $(x_j, x_j) < 0$ かつ $|x_j^0| < x_j^1$ が成立するとせよ. このとき $g \in G^{\mathbb{C}}$ が存在して,

$gx_j \in T_1$ が任意の j に対して成立するようにできる.

(∵) 上で考えた複素ローレンツ変換 g_α ですべての x_j は一せいに T_1 の中にうつる.

2° n が一般の場合.

包含関係 $\subset$ をまず示す. $(z_1, \cdots, z_n) \in T_n' \cap \mathbb{R}^{4n}$ とする. $g \in G^{\mathbb{C}}$ が存在して, $(gz_1, \cdots, gz_n) \in T_n$ となっている. 故に $gz_j \in T_1$. 今 T_1 が凸であるから

$\sum \lambda_j g z_j = g \sum \lambda_j z_j \in T_1$. つまり $\sum \lambda_j z_j$ は $T_1' \cap \mathbb{R}^4$ に属する. 1° により, $\sum \lambda_j z_j$ は空間的である.

次に包含関係 $\supset$ を示そう. $\forall \lambda_j \geqq 0$, $\sum \lambda_j > 0$ に対して $\sum \lambda_j z_j$ が空間的とする. このとき凸錐 K

$$K = \{\sum \lambda_j z_j \ ; \ \lambda_j \geqq 0, \ \sum \lambda_j > 0\}$$

は光錐と交らない. 故に2枚の超平面 α, β が存在して,

イ) α と β は光錐に接する.

ロ) α は凸錐 K と正の光錐を分離する.

ハ) β は凸錐 K と負の光錐を分離する

ようにできる. いま α と β の方程式をそれぞれ

$$\sum_{\mu=1}^{4} \alpha_\mu x^\mu = 0 \qquad \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu x^\mu = 0$$

とする. このとき,

$$\begin{cases} (\alpha, \alpha) = 0, \quad (\beta, \beta) = 0 \end{cases}$$

ii

$$\begin{cases} (\alpha, l) > 0 \quad \forall l \in V_+, \quad (\alpha, k) < 0, \ \forall k \in K \\ (\beta, l') > 0 \quad \forall l' \in V_+, \quad (\beta, k) < 0, \ \forall k \in K \\ (\alpha, \beta) < 0 \end{cases}$$

としてよい、いま回転によって

$$\alpha = (1, 1, 0, 0), \quad \beta = (-1, 1, 0, 0)$$

としてよい。このとき任意の $k \in K$ に対して、

$$k^0 - k^1 < 0 \quad かつ \quad -k^0 - k^1 < 0,$$

つまり $|k^0| < k^1$

が成立する。故に、1°の注意により $g \in G^{\mathbb{C}}$ が存在して一せいに $gz_1, \cdots, gz_n \in T_1$ となる。つまり

$$g(z_1, \cdots, z_n) \in T_n, \quad (z_1, \cdots, z_n) \in T_n'.$$

（証明おわり）

<u>定理6の証明</u>

$F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$ がローレンツ無限小変換群で不変ならば、佐藤の基本定理（定理3）により、

$$SS\,F \subset \left\{ (x, \eta) \in \mathbb{R}^{4n} \times \tilde{S}^{4n-1} ; \sum {}^t x_j L \eta_j = 0 \ \ \forall L \in \mathfrak{g} \right\}$$

となる。ここで $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n}$ と $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \tilde{S}^{4n-1} \subset \tilde{\mathbb{R}}^{4n}$ の成分は列ベクトルとして表わされている。x を Jost 点とすると定理5の証明により、

$\forall j$ に対して $|x_j^0| < x_j^1$ ------ (※)

が成り立つとしてよい．今 $L=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1\ 0\ 0 \\ \hline \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} & O \end{array}\right)$ に対して

$\sum_{j=1}^{n} {}^t x_j L \eta_j$ を計算する．まず $\eta\in(V_+^n)^+$ とすると，

$\eta_j^0 \geqslant |\eta_j^1|$，$\forall j$，かつ $\exists j_0$ に対し $\eta_j^0>0$ (#)

が成立している．(☆)と(#)を用いると次の評価ができる．

$$\sum {}^t x_j L\eta_j = \sum(x_j^0\eta_j^1 + x_j^1\eta_j^0)$$
$$\gneqq \sum_{j=1}^{n}(x_j^0\eta_j^1 + |x_j^0|\eta_j^0)$$
$$\geqq \sum(x_j^0\eta_j^1 + |x_j^0||\eta_j^1|) \geqq 0$$

次に $\eta\in(-V_+^n)^+$ とすると

$\eta_j^0 \leqslant -|\eta_j^1|$ $\forall j$ かつ $\exists j_0$ に対し，$\eta_{j_0}^0<0$ (b)

が成立している．(☆)と(b)を用いて

$$\sum {}^t x_j L\eta_j = \sum(x_j^0\eta_j^1 + x_j^1\eta_j^0)$$
$$\lneqq \sum(x_j^0\eta_j^1 + |x_j^0|\eta_j^0)$$
$$\leqq \sum(x_j^0\eta_j^1 - |x_j^0||\eta_j^1|) \leqslant 0.$$

故に ローレンツ無限小変換で不変な $F\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ の特異台 S.S.F は正と負の"光錐"$(V_+^n)^+$，$(-V_+^n)^+$ と交らない．
一方仮定より（Jの台の上で）F の特異台 SSF は $\mathbb{R}^n\times(V_+^n)^+$ と $\mathbb{R}^n\times(-V_+^n)^+$ に含まれている．よって Jの台の上には F の

特異台は存在しない。よって定理1により F は Jost 点で解析的である。 (証明おわり)

文献

[1] 柏原正樹 超函数の構造について 数学のあゆみ 15-1 (1970) pp. 9-71.

[2] Jost, R. The General Theory of Quantized Fields, AMS, Providence, Rhode Island (1965)

[3] MORIMOTO, M. Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J Fac. Sci, Univ. Tokyo (吉田記念号) (近刊)

[4] 佐藤幹夫-河合隆裕 超函数の構造について. 堅田シンポジウム報告集「Hyperfunctions への応用をみこんだ代数幾何の Symposium」(1970) pp. 4.1-4.30.

[5] Streater, R.F - Wightman, A.S PCT, Spin, Statistics and all That, Benjamin, New York (1964)

おわびと訂正

河合隆裕・柏原正樹

このシンポジウムの際、2人とも'佐藤によるδ函数の曲面波展開'(当報告 Part III p.35.)に関して"結果は正しいけれど佐藤先生の証明はいささか疑わしい"と一度ならず申しましたが、まことに恥しいことに、佐藤先生の証明は全く正しく、この発言は両人の計算洞察力(*)の不足を示す以外の何物でもありませんでした。謹しんでおわびと訂正をさせて頂くとともに佐藤先生には改めて"やっぱり違うなー"という賛嘆の言葉を呈じておわびにかえさせて頂きたいと存じます。

(*) ある所で斉次式に関するEulerの等式が使われていることを見抜けなかった。)