数理解析研究所講究録
115巻 1971年 148-160

多変数関数の補間および数値微分

京大工　市田浩三　津田孝夫

§1．はじめに

多次元空間で格子点に関数値（データ）が与えられているとき，格子点以外の点における関数の値を補間によって求める問題は，次元の数とともに格子点の数が指数関数的に増大するため，モンテカルロ法によるランダムサンプリングの考えによって解かれてきた〔1，2，3〕。ここでは〔3〕による多変数補間，区分的3次関数による補間およびそれらの補間式を用いた数値微分について述べる。

§2．多次元多項式による補間

$f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ を k 次元ユークリッド空間のある領域 D で定義された多変数関数とする。問題は領域 D の中で有限個の点に数値が与えられたとき D 内の任意の点における値を補間によって求めることである。簡単のため領域 D は単位超立

方体としデータは次のような $(n+1)^k$ 個の格子点において与えられているものとする。

$$x_r : x_r^{(0)}, x_r^{(1)}, \cdots, x_r^{(n)} \qquad (1)$$

$$(r = 1, 2, \cdots, k)$$

（各 x_r に対して n の値が等しくなくてもよい）。次のような直交条件を満足する多項式 $\varphi_i(x)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$ をとる。

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(x) = 1 \\ &\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

たとえば

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(x) = 1 \\ &\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2} \\ &\varphi_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ととることができる。データ点を通る補間式として次の多項式を用いる。

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{i_1=0}^{n} \cdots \sum_{i_k=0}^{n} L(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)}, \cdots, x_k^{(i_k)}) \qquad (4)$$

ここで

$$L(x_1, \cdots, x_k ; i_1, \cdots, i_k) = \prod_{r=1}^{k} \frac{\Delta(x_r, i_r)}{W_r} \equiv \prod_{r=1}^{k} L(x_r, i_r) \qquad (5)$$

$$W_r = \Delta(x_r^{(i_r)}, i_r) \qquad (6)$$

$$\Delta(x_r, i_r) = (-1)^{i_r} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_r) & \cdots & \varphi_n(x_r) \\ \varphi_0(x_r^{(0)}) & \cdots & \varphi_n(x_r^{(0)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_r^{(i_r-1)}) & \cdots & \varphi_n(x_r^{(i_r-1)}) \\ \varphi_0(x_r^{(i_r+1)}) & \cdots & \varphi_n(x_r^{(i_r+1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_r^{(n)}) & \cdots & \varphi_n(x_r^{(n)}) \end{vmatrix} \qquad (7)$$

（2）の関係により $w_r \neq 0$ である。補間値を求めるためには（4）の右辺を計算すればよいが，kとnが大きいと項の数が非常に多くなるから，その中から適当にサンプリングを行って補間値を推定することを考える。まず次の恒等式が成り立つ。

$$\sum_{i_1=0}^{n} \cdots \sum_{i_k=0}^{n} L(x_1, \dots, x_k; i_1 \cdots i_k) = 1 \qquad (8)$$

（8）が成り立つことはデータの値がすべてK（$\neq 0$）に等しければ補間値もKになることからわかる（〔3〕参照）。

（4）の各項を単純にサンプリングして加算するだけでは分散が大きすぎて容易に収束しない。そこで $L(x_1 \cdots x_k; i_1 \cdots i_k)$ のうちで符号が正のものを L'，負のものを L'' とし，

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k) &= \sum_{i_1}{}' \cdots \sum_{i_k}{}' L'(x_1 \cdots x_k; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \\ &\quad - \sum_{i_1}{}'' \cdots \sum_{i_k}{}'' L''(x_1 \cdots x_k; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \qquad (9) \end{aligned}$$

のようにLが正のものの和 $\Sigma' \cdots \Sigma'$ と，それが負のものの和 $\Sigma'' \cdots \Sigma''$ に分ける。上式の右辺の各項をサンプリングするのにLの正負に応じて確率

$$\left.\begin{aligned} p'(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k) &= \frac{L'(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k)}{\Sigma'\cdots\Sigma' L'(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k)} \\ p''(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k) &= \frac{L''(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k)}{\Sigma''\cdots\Sigma'' L''(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

のいずれかにより $f(x_1^{(i_1)}\cdots x_k^{(i_k)})$ をサンプリングすればよい。

そのために

$$\left.\begin{aligned} \Sigma'\cdots\Sigma' L'(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k) &= \mathcal{L}' \\ \Sigma''\cdots\Sigma'' L''(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k) &= \mathcal{L}'' \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

を求める必要がある。(8)より

$$\prod_{r=1}^{k}\sum_{j=0}^{n} L(x_r, j) = \sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_k=0}^{n} L(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k) = \mathcal{L}' - \mathcal{L}'' = 1 \qquad (12)$$

また $L(x_r, j)$ をすべてその絶対値でおきかえた左辺の値を $\mathcal{L}$ とすると

$$\prod_{r=1}^{k}\sum_{j=0}^{n} |L(x_r, j)| = \mathcal{L}' + \mathcal{L}'' = \mathcal{L} \qquad (13)$$

(12)(13)より

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}' &= (\mathcal{L}+1)/2 \\ \mathcal{L}'' &= (\mathcal{L}-1)/2 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

従って $\mathcal{L}$ を計算しておけば $\mathcal{L}'$ と $\mathcal{L}''$ が求められる。(9)は

$$f(x_1\cdots x_k) = \mathcal{L}'\,\Sigma'\cdots\Sigma'\, p'(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k)\, f(x_1^{(i_1)}\cdots x_k^{(i_k)})$$
$$- \mathcal{L}''\,\Sigma''\cdots\Sigma''\, p''(x_1\cdots x_k;\, i_1\cdots i_k)\, f(x_1^{(i_1)}\cdots x_k^{(i_k)}) \qquad (15)$$

実際の計算は次のようにする。まず変数 x_1 について確率

$|L(x_1, i_1)| / \sum_{j=0}^{n} |L(x_1, j)|$ により $L(x_1, 0), \cdots L(x_1, n)$ の中から $L(x_1, i_1)$ をえらぶ。他の変数 $x_2, \cdots, x_k$ についても $L(x_2, i_2) \cdots L(x_k, i_k)$ をえらぶ。そして

$$L(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) = \prod_{\nu=1}^{k} L(x_\nu, i_\nu)$$

の符号が正であれば $\alpha' f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)})$ を加え，符号が負であれば $\alpha'' f(x_1^{(i_1)}, \cdots x_k^{(i_k)})$ を引いて

$$\begin{aligned} f(x_1 \cdots x_k) = \frac{\alpha'}{N'} \Sigma' \cdots \Sigma' f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \\ - \frac{\alpha''}{N''} \Sigma'' \cdots \Sigma'' f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \end{aligned} \qquad (16)$$

によって補間値を推定する。N', N'' はそれぞれ和 $\Sigma' \cdots \Sigma'$, $\Sigma'' \cdots \Sigma''$ に含まれる項の中からのサンプリング数である。一般に $\alpha > 1$ で α' と α''，従って N' と N'' もあまり差はない。(16) の分散は右辺の $\Sigma' \cdots \Sigma'$，$\Sigma'' \cdots \Sigma''$ の分散をそれぞれ $(\sigma')^2$，$(\sigma'')^2$ とすれば

$$\sigma^2 = (\sigma')^2 + (\sigma'')^2 \qquad (17)$$

となる。

§3. 区分的3次関数による補間

まず1変数の場合を考える。区間 [0, 1] の中で次のように分点

$$x:\quad 0 = x^{(0)} < x^{(1)} < \cdots < x^{(n-1)} < x^{(n)} = 1$$

をとる。それに対する関数値を

$$y:\quad y^{(0)},\ y^{(1)},\ \cdots\ ,y^{(n-1)},\ y^{(n)}$$

とする。上の点を通る区分的3次関数を $S(x)$ とすると，

$$S''(x) = M_{j-1}\frac{x^{(j)}-x}{h_j} + M_j\frac{x-x^{(j-1)}}{h_j} \qquad (18)$$

と表わせる。（$''$ は2階微分）。ただし $x^{(j-1)} \leq x \leq x^{(j)}$, $h_j = x^{(j)} - x^{(j-1)}$ であり M_{j-1}, M_j は定数である。2回積分して積分定数をきめると

$$S(x) = M_{j-1}\frac{(x^{(j)}-x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x-x^{(j-1)})^3}{6h_j}$$
$$+\left(y^{(j-1)} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x^{(j)}-x}{h_j} + \left(y^{(j)} - \frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x-x^{(j-1)}}{h_j} \qquad (19)$$

これより

$$S'(x) = -M_{j-1}\frac{(x^{(j)}-x)^2}{2h_j} + M_j\frac{(x-x^{(j-1)})^2}{2h_j} + \frac{y^{(j)}-y^{(j-1)}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_j \qquad (20)$$

$x^{(j)}$ における $S'(x)$ の連続性より（$S'(x^{(j)}-) = S'(x^{(j)}+)$）

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{y^{(j+1)}-y^{(j)}}{h_{j+1}} - \frac{y^{(j)}-y^{(j-1)}}{h_j} \qquad (21)$$

(21) は $j = 1, 2, \cdots, (n-1)$ に対して成り立つから，これから M_j（$j = 0, 1, \cdots, n$）を求めるにはあと2つの条件が必要である。ここでは $M_0 = M_n = 0$ とする。（区間 $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$ では1次

関数になる)。

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} = 1 - \mu_j \quad (j = 1, 2, \cdots, (n-1)) \tag{22}$$

とおくと(21)は,

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = 6\,\frac{\{(y^{(j+1)} - y^{(j)})/h_{j+1}\} - \{(y^{(j)} - y^{(j-1)})/h_j\}}{h_j + h_{j+1}} \tag{23}$$

行列の形で表わすと,

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & & & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & & & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \tag{24}$$

d_j $(j = 1, 2, \cdots, (n-1))$ は(23)の右辺である。(24)の行列は $\mu_j + \lambda_j = 1$, $0 < \mu_j, \lambda_j < 1$ であるから逆行列が存在し(24)は一意的に解ける。いま等間隔の場合を考えると,

$$\lambda_j = \mu_j = \frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \cdots, (n-1)) \tag{25}$$

(23)は $(h_j = h, \ j = 1, 2, \cdots, (n-1))$,

$$\frac{1}{2} M_{j-1} + 2M_j + \frac{1}{2} M_{j+1} = 3\,\frac{y^{(j+1)} - 2y^{(j)} + y^{(j-1)}}{h^2} \tag{26}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, (n-1))$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & & & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & & & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_j \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \tag{27}$$

いま $n \times n$ 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & & & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & & & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \qquad (28)$$

とすると

$$D_n = \frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{3}} \qquad (29)$$

(27)を簡単に

$$AM = d \qquad (30)$$

と書くと $|A| = D_{n-1}$ であり A^{-1} の要素は

$$\left.\begin{aligned} A_{ij}^{-1} &= \frac{(-1)^{i+j} D_{i-1} D_{n-1-j}}{2^{j-i} D_{n-1}} \quad (1 \leq i \leq j \leq n-1) \\ A_{ij}^{-1} &= \frac{(-1)^{i+j} D_{j-1} D_{n-1-i}}{2^{i-j} D_{n-1}} \quad (1 \leq j \leq i \leq n-1) \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

(30)より

$$M_i = \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}^{-1} d_j = \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}^{-1} \frac{y^{(j+1)} - 2y^{(j)} + y^{(j-1)}}{h^2/3} \equiv \sum_{j=0}^{n} a_{ij} y^{(j)} \qquad (32)$$

ここで

$$\frac{3}{h^2} a_{ij} = A_{i,j+1}^{-1} - 2A_{ij}^{-1} + A_{i,j-1}^{-1} \qquad (33)$$

$$A_{i,-1}^{-1} = A_{i,0}^{-1} = A_{i,n}^{-1} = A_{i,n+1}^{-1} = 0$$

$x^{(i-1)} \leq x \leq x^{(i)}$ に対して

$$S(x) = M_{i-1}\left\{ \frac{(x^{(i)}-x)^3}{6h} - \frac{x^{(i)}-x}{6}h \right\} + M_i\left\{ \frac{(x-x^{(i-1)})^3}{6h} - \frac{x-x^{(i-1)}}{6}h \right\}$$

$$+ y^{(i-1)} \frac{x^{(i)}-x}{h} + y^{(i)} \frac{x-x^{(i-1)}}{h}$$

$$= b_i \sum_{j=0}^{n} a_{i-1,j}\, y^{(j)} + b_{i-1} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, y^{(j)} + \frac{x^{(i)}-x}{h} y^{(i-1)} + \frac{x-x^{(i-1)}}{h} y^{(i)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(b_i a_{i-1,j} + b_{i-1} a_{ij} \right) y^{(j)} + \frac{x^{(i)}-x}{h} y^{(i-1)} + \frac{x-x^{(i-1)}}{h} y^{(i)}$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{n} a(x, j)\, y^{(j)} \qquad (34)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} b_i &= \frac{(x^{(i)}-x)^3}{6h} - \frac{x^{(i)}-x}{6} h \\ b_{i-1} &= \frac{(x-x^{(i-1)})^3}{6h} - \frac{x-x^{(i-1)}}{6} h \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

(34) を多変数の場合に拡張する。$x_1^{(j_1-1)} \leq x_1 \leq x_1^{(j_1)}$, $x_2^{(j_2-1)} \leq x_2 \leq x_2^{(j_2)}$, $\cdots$, $x_k^{(j_k-1)} \leq x_k \leq x_k^{(j_k)}$ に対して

$$S(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i_1=0}^{n} \cdots \sum_{i_k=0}^{n} a(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)}, \cdots x_k^{(i_k)}) \qquad (36)$$

ここで

$$a(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) = \prod_{r=1}^{k} a(x_r, i_r) \qquad (37)$$

であり $a(x_r, i_r)$ は (34) で与えられるものである。(9) と同様に係数 a を正のものと負のものに分けて

$$\begin{aligned} S(x_1, \cdots, x_k) &= \Sigma' \cdots \Sigma' a'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \\ &\quad - \Sigma'' \cdots \Sigma'' a''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \\ &= A' \Sigma' \cdots \Sigma' p'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \\ &\quad - A'' \Sigma'' \cdots \Sigma'' p''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)}, \cdots x_k^{(i_k)}) \end{aligned} \qquad (38)$$

ここで

$$A' = \Sigma' \cdots \Sigma' a'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)$$

$$\left.\begin{aligned}
A'' &= \Sigma'' \cdots \Sigma'' \, a''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) \\
p'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) &= a'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) \,/\, A' \\
p''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) &= a''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) \,/\, A''
\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

以下多項式の場合と同様に考えられるが，区分的3次関数の場合は次のような特長がある。

(i) 変動が少ない補間式である。(34)からわかるように線形補間から少しずれた形になっている。

(ii) (31) (33) (35)から(34)の線形項以外の項は線形項より係数が小さく，補間したい点からはなれた格子点における係数 $a(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)$は非常に小さくなる。従って多項式のときより係数の和A', A''が小さくなり分散が小さい。

§4. 数値微分

(4)または(36)を用いると領域D内の任意の点における微分値を求めることができる。たとえば$\partial f / \partial x_1$を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \sum_{i_1=0}^{n} \cdots \sum_{i_k=0}^{n} L(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) \, f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \right\}$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n} \cdots \sum_{i_k=0}^{n} \frac{\partial L(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)}{\partial x_1} f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \qquad (40)$$

ここで

$$\frac{\partial L(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \prod_{r=1}^{k} L(x_r, i_r) = \frac{\partial L(x_1, i_1)}{\partial x_1} \prod_{r=2}^{k} L(x_r, i_r) \qquad (41)$$

$\partial L(x_1, i_1)/\partial x_1$ は (5)(6) により容易に計算できるから (40) の係数が求められる。あとは補間のときと同様にして，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \Sigma' \cdots \Sigma' \frac{\partial L'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)}{\partial x_1} f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)})$$

$$- \Sigma'' \cdots \Sigma'' \frac{\partial L''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)}{\partial x_1} f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \qquad (42)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} \Sigma' \cdots \Sigma' \frac{\partial L'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)}{\partial x_1} &= \delta_1' \\ \Sigma'' \cdots \Sigma'' \frac{\partial L''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)}{\partial x_1} &= \delta_1'' \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

とおくと

$$\sum_{i_1=0}^{m} \cdots \sum_{i_k=0}^{m} \frac{\partial L(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k)}{\partial x_1} = 0 \qquad (44)$$

より

$$\delta_1' = \delta_1'' \quad \left(= \frac{\delta_1}{2} \right) \qquad (45)$$

となり

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\delta_1}{2} \{ \Sigma' \cdots \Sigma' g'(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)})$$

$$- \Sigma'' \cdots \Sigma'' g''(x_1 \cdots x_k ; i_1 \cdots i_k) f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \qquad (46)$$

と書くことができるから補間のときと同様にして微分値が推定できる。しかし (46) を用いて実際に計算しても容易に収束しない。この理由として，

(i) 係数を正と負に分けるため，全体の分散はそれぞれの分散の和になること。

(ii) 同じくらいの大きさの数字を引くため頭の方が桁落ちすること。

(iii) 補間のときの α より微分のときの α_1 の方が値が大きく従って分散が大きいこと。

などが考えられる。そこで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \sum_{i_2}{}' \cdots \sum_{i_k}{}' L'(x_2 \cdots x_k ; i_2 \cdots i_k) \left\{ \sum_{i_1=0}^{n} \frac{\partial L(x_1, i_1)}{\partial x_1} f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \right\} \\
&\quad - \sum_{i_2}{}'' \cdots \sum_{i_k}{}'' L''(x_2 \cdots x_k ; i_2 \cdots i_k) \left\{ \sum_{i_1=0}^{n} \frac{\partial L(x_1, i_1)}{\partial x_1} f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \right\} \\
&= \alpha_1' \sum_{i_2}{}' \cdots \sum_{i_k}{}' P_1'(x_2 \cdots x_k ; i_2 \cdots i_k) \left\{ \sum_{i_1=0}^{n} \frac{\partial L(x_1, i_1)}{\partial x_1} f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \right\} \\
&\quad - \alpha_1'' \sum_{i_2}{}'' \cdots \sum_{i_k}{}'' P_1''(x_2 \cdots x_k ; i_2 \cdots i_k) \left\{ \sum_{i_1=0}^{n} \frac{\partial L(x_1, i_1)}{\partial x_1} f(x_1^{(i_1)} \cdots x_k^{(i_k)}) \right\} \quad (47)
\end{aligned}
$$

として変数 $x_2, \cdots, x_k$ についてサンプリングを行い $\{\cdot\}$ を計算して平均をとれば収束する。補間のときにおいても，もしある変数についての関数の変化が大きいことがわかっていれば(47)のやり方を用いれば有効である。

§5．例題

$f(x_1, \cdots, x_{10}) = \exp\left\{ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \right\}$ および $\partial f / \partial x_1$ について $x_r = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ $(r = 1, 2, \cdots, 10)$ にデータが与えられているとき $(0.6, 0.3, \cdots, 0.6, 0.3)$ における値を計算した（区分的3次関数を用いた）。

サンプリング数	f (正解)		∂f / ∂x₁ (正解)	
1000	1.565		0.1552	
2000	1.580		0.1576	
3000	1.572	(1.568)	0.1575	(0.1568)
4000	1.575		0.1579	
5000	1.578		0.1576	
10000	1.572		0.1563	

参考文献

〔1〕 Hammersley, J. M. Monte Carlo methods for solving multivariable problems, Ann. New York Acad. Sci. 86 (1960) 844–874

〔2〕 Tsuda, T. and Matsumoto, H. A note on linear extrapolation of multivariable function by the Monte Carlo method, J. ACM 13 (1966) 143–150

〔3〕 Tsuda, T. and Ichida, K. Nonlinear Interpolation of multivariable functions by the Monte Carlo method J. ACM 17 (1970) 420–425