数理解析研究所講究録
116巻 1971年 45-60

楕円モジュラー曲面

東大 理　塩田徹治

Kを代数体又は一変数代数函数体，AをK上定義されたアーベル多様体とする。AのK-有理点のなす群A(K)について，A(K)は有限生成なアーベル群であることが知られている。(Mordell-Weilの定理，但しKが函数体のときAに多少条件がつく)。しかしながら，K，Aが与えられたとき，群A(K)，とくにrank A(K)，を求めることは(Aの次元が1の時でも)一般に非常に難しい問題であり，いくつかの興味ある予想が提出されている。(e.g. Cassels [1]，Tate [7])。

この小文では，Kが複素数体$\mathbb{C}$上の一変数函数体，AがK上の楕円曲線のときに，上の問題及びそれとある意味でdualな問題――Aのprincipal homogeneous spacesの群に関する――を，楕円曲面の立場から考察する。基礎体を$\mathbb{C}$に限る代りに，必ずしも代数的でない解析的曲面をも考え，その中で，代数的なものが，どう分布しているかも問題とする。

次に，楕円モジュラー群から自然に定義される楕円モジュラー曲面について，これらの問題を考える。この楕円モジュラー曲面は，基礎体の標数が正のときにも，定義され，それらは，曲面の数論的研究のために，意味ある例を与えるものと思われるが，これについては別の機会にゆずりたい。

§1. 準備　この節では，楕円曲面の一般論（小平[4]による）から以下に必要な部分を復習し，あわせて記号を定める。

a) S を楕円曲面とする。定義により，代数曲線 Δ と，S から Δ への正則写像 Φ とがあって，$\Delta \ni u$ 上の fibre $C_u = \Phi^{-1}(u)$ は，有限個の u を除いて，楕円曲線となる。除外された u の集合を $\Sigma \subset \Delta$ とする。$v \in \Sigma$ のとき，C_v は singular fibre とよばれ，S 上の divisor として，次のようにかかれる：

$$(1.1) \qquad C_v = \sum_{i=0}^{n_v} m_{v,i} \Theta_{v,i}$$

ここに，$m_{v,i} \geq 1$，$\Theta_{v,i}$ は S 上の既約曲線，n_v+1 で C_v の既約成分の数を表わす。singular fibres の type は，完全に分類されている（[4]. §6）。以下では，常に各 fibre は第一種例外曲線を含まないとする。更に，S が Δ 上の holomorphic section $o : \Delta \longrightarrow S$ （$\Phi \circ o = id_\Delta$）をもつとき，S を basic type の楕円曲面とよび，S の代りに，文字 B を用いる。

B は代数曲面となる．この場合 singular fibre C_v を (1.1) のように表わすとき 曲線 $o(\Delta)$ と交わる唯一つの成分 $\Theta_{v,i}$ を $\Theta_{v,0}$ とかくことにする：$\Theta_{v,0} \ni o(v)$，$m_{v,0}=1$．

b). 次に 楕円曲面 $B \to \Delta$ の homological invariant, functional invariant を夫々 G, $\mathfrak{J}$ で表わす．$\mathfrak{J}$ は Δ 上の函数で generic fibre の楕円曲線の j 変量に対応する。G は Δ 上の層で $G|_{\Delta'}$（但し $\Delta' = \Delta - \Sigma$）は locally constant その stalk は次のように与えられる：

$$G_u = H^1(C_u, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2, \quad u \in \Delta'$$

(1.2)
$$G_v \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & v \in \Sigma,\ C_v:\ \text{type } I_b\ (b \geq 1) \\ 0 & \text{〃} \quad \text{〃}:\ \text{他の type} \end{cases}$$

G は Δ' の基本群 $\pi_1(\Delta')$ の $SL(2,\mathbb{Z})$ への表現を定め 逆にそれで定まる。さて Δ 上の data $\mathfrak{J}$, G を固定して これを functional 及び homological invariant としてもつ Δ 上の楕円曲面の族（を適当な同値関係でわけたもの）を $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{J}, G)$ とかく。B から出発するとき B は Δ 上 global section をもつ $\mathfrak{F}$ の unique member として特徴づけられる。逆に $\mathfrak{J}$, G がある compatibility 条件をみたすとき $\mathfrak{F}(\mathfrak{J}, G)$ に属す basic type の楕円曲面が存在する（[4] §8）.

c) B に対して Δ 上の section o を identity section とする group scheme（又は 複素 Lie 群の fibre system）$B^{\#}$

が定義される：$B^\# \subset B$。$v \in \Delta$ について，$C_v^\# = C_v \cap B^\#$ は $o(v)$ を単位元とする群で，その単位元の成分 $C_{v,0}^\#$ は，楕円曲線，$\mathbb{C}^\times$（乗法群），$\mathbb{C}$（加法群）のいづれかである（$\mathrm{rank}\, G_v = 2, 1, 0$ に対応して）。更に $C_v^\# / C_{v,0}^\#$ は有限可換群で，その位数 $c_v = \#\{i \geq 0 \mid m_{v,i} = 1\}$ である．（[4] p.604）。さて $\Omega(B^\#)$ で $B^\#$ の Δ 上の（holomorphic）sections の sheaf を表わし，cohomology 群 $H^q(\Delta, \Omega(B^\#))$ $(q=0,1)$ を考える。$q=0$ のとき，$H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ は B の Δ 上の section のなす群に他ならない．Functional invariant $J \neq$ const. のとき，これは Mordell-Weil の定理により有限生成な群である．$q=1$ については，前の楕円曲面の族 $\mathfrak{F}(\mathfrak{J}, G)$ と $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ との間に 1対1の対応がある．即ち，各元 $\eta \in H^1$ に対し B を η で twist した楕円曲面 B^η が定義され，$\mathfrak{F}(\mathfrak{J}, G) = \{B^\eta \mid \eta \in H^1\}$ となる（[4] Th.10.5）更に B^η が代数曲面 $\Longleftrightarrow$ η が有限位数 となることが証明されている（同 Th.11.5）。

d）Δ 上の line bundle $\mathfrak{f}$.（[4] §11）．$\mathfrak{f}$ の $v \in \Delta$ での stalk $\mathfrak{f}_v$ は $C_{v,0}^\#$ の $o(v)$ での tangent space である。$\mathfrak{f}$ の holom. sections の sheaf $\Theta(\mathfrak{f})$ について，次の完全列が成立つ：

$$(1.3) \qquad 0 \longrightarrow G \xrightarrow{i} \Theta(\mathfrak{f}) \xrightarrow{h} \Omega(B_0^\#) \longrightarrow 0.$$

B の canonical bundle K は，Δ のそれを $\mathfrak{k}$ として $K = \Phi^*(\mathfrak{k} - \mathfrak{f})$ であたえられる。とくに B の geometric genus $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Delta, \Theta(\mathfrak{f}))$.

§2. Sectionsの群とNéron-Severi群　以下 $J \neq \mathrm{Const}$ と仮定する。楕円曲面 B の Δ 上の sectionsの群 $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ は有限生成だから その rank を r とする。さて group scheme $B^\#$ の単位元成分を $B^\#_0$ とし sheaf $\Omega(B^\#)$ の subsheaf $\Omega(B^\#_0)$ による商を Q とかく。Q は $\Sigma (\subset \Delta)$ 上に support をもち、その stalk $Q_v = C^\#_v / C^\#_{v,0}$ である。完全列

$$(2.1)\qquad 0 \longrightarrow \Omega(B^\#_0) \longrightarrow \Omega(B^\#) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

より次のことは容易に分る。(i). $H^0(\Delta, \Omega(B^\#_0))$ は $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ の有限指数の部分群。従って その rank も r である。

(ii) $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#_0))$ の有限群による商となる。

そこで §1. d) の (1.3) から導かれる cohomology の完全列

$$(2.2)\qquad 0 \longrightarrow H^0(\Delta, \Omega(B^\#_0)) \longrightarrow H^1(\Delta, G) \xrightarrow{i^*} H^1(\Delta, \mathcal{O}(\Phi)) \xrightarrow{h^*} H^1(\Delta, \Omega(B^\#_0)) \longrightarrow H^2(\Delta, G) \longrightarrow 0 .$$

を考える。

Lemma.1. $G \neq$ trivial のとき

1) $H^1(\Delta, G)$ は有限生成で rank $4g-4+2t-t_1$

ii) $H^2(\Delta, G)$ は有限群

但し g は Δ の genus, t は B の singular fibres の総数 t_1 は type I_b $(b \geq 1)$ の singular fibres の数。

証明略

今、$r' = \mathrm{rank}\ i^* H^1(\Delta, G)$ とおく。(2.2)と Lemma から

明らかに

(2.3) $$r + r' = 4g - 4 + 2t - t_1.$$

更に r' は $H^1(\Delta, \Omega(B^{\#}_0))$ が $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\nu}$ に同型な部分群を含むような最大の ν として定義してもよい。式(2.3)は Ogg - Šafarevič の公式とよばれるものの特別な場合である。($2t - t_1 = \sum_v \varepsilon_v$, $\varepsilon_v = 2 - \mathrm{rank}\, G_v = 0, 1, 2$ に注意)。

次に曲面 B の Néron-Severi 群 NS(B) を考える。これは B 上の因子の群を代数的同値でわったものとして定義される。$\mathbb{C}$ 上の代数曲面の場合には NS(B) は 2 次整係数 homology 群 $H_2(B, \mathbb{Z})$ (或は cohomology 群 $H^2(B, \mathbb{Z})$) の部分群とみなされる。その rank ρ (= B の Picard 数) は basic type の楕円曲面のとき次式で与えられる。

Th. $$\rho = r + 2 + \sum_{v \in \Sigma} n_v .$$

ここに r は上の通り $= \mathrm{rank}\, H^0(\Delta, \Omega(B^{\#}))$, n_v は C_v の既約成分の個数 -1.

より詳しく次のことが分る。$H^0(\Delta, \Omega(B^{\#}))$ mod torsion の basis を $s_1, \cdots, s_r$ とする。一般に section s の定める B 上の曲線 $s(\Delta)$ を (s) とかくことにすると $r + 2 + \sum n_v$ の因子

$$C_u,\ (o)\ ;\ (s_\alpha) - (o)\ (\alpha = 1, \cdots, r)\ ;$$

$$\Theta_{v,i}\quad (v \in \Sigma,\ i \geqq 1)$$

は互に独立で $NS(B)$ の有限指数の free submodule を生成する。(その指数は $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ の位数に等しい)。

この定理は次の Lemma と generic fibre の楕円曲線上の Abel の定理を用いて証明される。

Lemma 2. $^\forall u_1, u_2 \in \Delta$ について $C_{u_1} \approx C_{u_2}$ (代数的同値)

とくに $C_u \approx \Theta_{v,0} + \sum_{i\geq 1} m_{v,i}\Theta_{v,i}$.

Lemma 3. B 上の因子 D, D' の交点数を (DD') とかくとき、次の整係数二次形式

$$\sum_{i,j=1}^{n_v} (\Theta_{v,i}\Theta_{v,j})\, x_i x_j \qquad , v \in \Sigma$$

は負定値で、その判別式の絶対値は $c_v = |C_v^\# / C_{v,0}^\#|$ である。

証明は、前者は代数的同値の定義より明らか、後者は singular fibre の各 type について確められる。例えば type II^* の singular fibre は 8 変数で判別式 1 なる負定値整係数二次形式を与える。

Cor. $NS(B)$ mod torsion の basis を $D_1, \cdots, D_\rho$ とすると

$$\frac{|\det(D_i D_j)|}{|NS(B)_{tor}|^2} = \frac{d \cdot \prod c_v}{|H^0(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}|^2}.$$

ここに $d = \left|\det\left((\widehat{(S_\alpha)-(0)}) \cdot (\widehat{(S_\beta)-(0)})\right)\right|_{1\leq \alpha,\beta \leq r}$.

Remark. $NS(B)$ は実際は torsion-free である。又 $H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ も torsion-free で $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ の free part を与える。

さて，B の ν 次 Betti 数を b_ν とかくと，$b_1 = 2g$ であり b_2 は $2 - 2b_1 + b_2 = c_2$ （B の Euler 標数）で与えられる。c_2 は [4] §12 より，B の singular fibres によって計算される。Ogg - Šafarevič の式 (2.3) を用いて，次を得る。

Th. $\quad b_2 - \rho = r'$.

更に，$b_2 = \sum_{i+j=2} h^{i,j}$，$h^{0,2} = h^{2,0} = p_g$，$h^{1,1} \geq \rho$ （Lefschetz-Hodge）だから，

Cor. $\quad r' \geq 2p_g$，又は

$$r \leq 4g - 4 + 2t - t_1 - 2p_g.$$

Remark. rank r について，底曲線 Δ （又はその函数体 K）（の genus g）だけによる universal な上限はない。（Lapin；代数体の場合，Tate - Šafarevič，Soviet Math. Dokl. 1967）ついでにいえば，torsion part の位数 $|H^0(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}|$ については，g のみによる上限がある。（Levin，Amer. J. 1968）

§3. Density of $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ in $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$. まず $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ に次のように位相を入れる。(2.2) より

$$H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \simeq H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))/i^* H^1(\Delta, G) \times H^2(\Delta, G).$$

であるが，$H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての自然な位相をもつから，上式の右辺に（商位相）×（discrete 位相）なる位相を入れ，同型で左辺のそれを定める。又 §2 初めに

注意したように $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は $H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ の有限部分群による商だから これに商位相をいれる.

問題. $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ (= torsion subgroup) は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ において dense か?

上の位相の入れ方から 明らかに次の(1),(2)は同値である.

(1) $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ で dense。

(2) $i^* H^1(\Delta, G)$ は $\mathbb{R}$ 上 $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ を生成する.

更に §1.c) で述べたように, B を一員とする楕円曲面の族 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(g, G)$ は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ で parametrize され, $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{tor}$ は丁度 $\mathcal{F}$ に属する代数曲面をあらわすから (1)は次のようにいいかえられる.

(3) $\mathcal{F}$ の中で 代数曲面は稠密に分布する.

この問題は B が後述する楕円モジュラー曲面の場合 [6] において 志村 [5] の結果に帰着させて解決された。一般の場合には まず B 上の層の完全列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times \to 0$ を考える。対応する cohomology 列において $H^1(B, \mathcal{O}^\times)$ の $H^2(B, \mathbb{Z})$ への像は 前節で考えた $NS(B)$ と同一視されるから 次の完全列を得る:

$$0 \longrightarrow NS(B) \longrightarrow H^2(B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} H^2(B, \mathcal{O}) \longrightarrow$$

一方 (2.2) より

$$0 \longrightarrow H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \longrightarrow H^1(\Delta, G) \xrightarrow{i^*} H^1(\Delta, \mathcal{O}(f)) \longrightarrow$$

Lemma: $H^2(B, \mathcal{O})$ から $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ への同型写像 ψ が存在し $\psi\, j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ と $\tau^* H^1(\Delta, G)$ は ($H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ において) commensurable である。

証明は $\Phi : B \longrightarrow \Delta$ に関する Leray の spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(\Delta, R^q\Phi_*(\mathcal{O})) \Longrightarrow H^*(B, \mathcal{O})$ と $R^1\Phi_*(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}(f)$ (or $R^1\Phi_*(\mathbb{Z}) \simeq G$) を用いてなされる。

従って 上の (2) と 次の (4) とは同値である。

(4) $j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ は $\mathbb{R}$ 上 $H^2(B, \mathcal{O})$ を生成する。

Th. (1), ~ (4) は成立する。

証明 (4) が成立つことを示す。それには自然な準同型 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}$ からひきおこされる $H^2(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\kappa} H^2(B, \mathcal{O})$ が上への写像であることをいえばよい。$H^2(B, \mathbb{R}) \ni c$ に対し c を代表する B 上の real d-closed 2-form を η とし η の $(0,2)$-成分を η' とおく。すると $\bar{\partial}$-closed form η' は Dolbeault isomorphism により $\kappa c \in H^2(B, \mathcal{O})$ に対応する。これより κ が上への写像なことは明らか。

Cor. $r' = 2p_g$ のとき, $\tau^* H^1(\Delta, G)$ は $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ の lattice.
(同様に $\rho = h^{1,1}$ のとき $j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ は $H^2(B, \mathcal{O})$ の lattice)
従って $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は 複素トーラス(×有限群)の構造をもつ.

§4. 楕円モジュラー曲面. この節では、一変数保型函数論の知識(e.g. 河田[3])を仮定する。Γ を $SL(2,\mathbb{Z})$ の有限指数の部分群とする。よく知られているように、Γ は上半平面 $\mathfrak{H}=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(\tau)>0\}$ に $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}: \tau\longmapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ で作用し、商空間 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ は有限個の cusps をつけ加えることにより Compact な Riemann 面となる。これを $\Delta=\Delta_\Gamma$ とかく。我々は、Δ を底曲線とする自然な楕円曲面を定義したいのだが、その為に以下"$\Gamma\not\ni -1_2$"と仮定する。

$$\mu=[SL(2,\mathbb{Z}):\Gamma\cdot\{\pm 1_2\}]$$

$$g=\Delta_\Gamma \text{ の genus}$$

$$t'=\Gamma \text{ の cusps の数}$$

$$s=\Gamma \text{ の elliptic points の数}, \quad t=t'+s$$

とおく。各 elliptic point を代表する Γ の元は、位数3で $SL(2,\mathbb{Z})$ の中で $\begin{pmatrix} -1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{\pm 1}$ に共役である。又、各 cusp を代表する Γ の元は $\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\pm 1}$ 又は $\begin{pmatrix} -1 & -b\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{\pm 1}$ $(b\geq 1)$ の形の元に共役である: 前者の場合、第一種の cusp といい、後者を第二種の cusp という。t_1 (又は t_2) で第一種(又は第二種)の cusps の数を表わす: $t'=t_1+t_2$.

Γ の cusps と elliptic points の集合を Σ, $\Delta'=\Delta-\Sigma\subset\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ とおくと、Δ' の基本群 $\pi_1(\Delta')$ から $\Gamma\subset SL(2,\mathbb{Z})$ への自然な表現 φ が定まる。(とくに、Γ が torsion-free のとき

$\pi_1(\Delta') \simeq \Gamma$)。 φ から Δ 上の sheaf G で Δ' 上 locally constant (fibre $\simeq \mathbb{Z}^2$) なるものがつくられる。次に $\Gamma \hookrightarrow SL(2,\mathbb{Z})$ によって自然な写像 $\Gamma\backslash\mathfrak{H} \longrightarrow SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ があるが、これは $\mathcal{J} : \Delta_\Gamma \longrightarrow \Delta_{SL(2,\mathbb{Z})} \underset{j}{\simeq} \mathbb{P}^1$ なる Δ_Γ 上の有理型函数に延長される（ j は普通の楕円モジュラー函数）。この $\mathcal{J}, G$ の対は §1. b) の最後の所でふれた条件をみたすから $\mathcal{J}, G$ を夫々 functional, homological invariant としてもつ Δ_Γ 上の basic type の楕円曲線 $B = B_\Gamma$ が一意的に存在する。この B_Γ を（Γによって定まる）楕円モジュラー曲面 (elliptic modular surface) とよぶことにする。

B_Γ の singular fibres は Σ 上にあって第一種の cusp 上には type I_b $(b \geq 1)$, 第二種の cusp 上には type I_b^* $(b \geq 1)$ 又 elliptic points の上には type IV^* の singular fibre がある (cf [4] p604)。従って t, t_1 は §2 Lemma 1 に使われた記号と同じ意味をもつ。

さて Δ_Γ と $\Delta_{SL(2,\mathbb{Z})}$ の invariant measure を比較して

$$2g - 2 + t' + \left(1 - \frac{1}{3}\right)s = \frac{1}{6}\mu$$

次に [4] p.14 (12.6) により ($p_a = B_\Gamma$ の arithmetic genus)

$$12(p_a + 1) = \mu + 6t_2 + 8s$$

従って $p_g = p_a + g$ は次式で与えられる

$$p_g = 2g - 2 + t - \frac{t_1}{2} \qquad (t = t' + s)$$

§2. Lemma 1 より $p_g = \frac{1}{2}\operatorname{rank} H^1(\Delta, G)$. 又は (2.3) により

$$r + r' = 4g - 4 + 2t - t_1 = 2p_g$$

一方 §2. 最後の Cor. により $r' \geqq 2p_g$。故に

Th. 楕円モジュラー曲面 B_Γ については

$$r = 0 \quad , \quad r' = 2p_g .$$

§3. 末の Cor. により

Cor. $H^1(\Delta_\Gamma, \mathcal{O}(\mathfrak{f}))/\iota^* H^1(\Delta_\Gamma, G)$ (又は $H^1(\Delta_\Gamma, \Omega(B_\Gamma^\#))$) は p_g 次元複素トーラス (× 有限群) の構造をもつ。

Remark. この複素トーラスは [6] で示したように weight 3 の Γ-cusp forms の空間 $\mathfrak{S}_3(\Gamma)$ から 志村 [5] の方法でつくった複素トーラスと同じものである。[5] では一般に weight m が偶数のとき、$\mathfrak{S}_m(\Gamma)$ からつくられたトーラスが (Petersson の内積を用いて) アーベル多様体となることが証明されているが、この方法は m が奇数のときは適用できない。しかし 志村先生によれば 適当な Γ に対しては m が奇数でも 問題の複素トーラスの準同型環を考察することにより それがアーベル多様体となることがいえるとのことである。

最後に 具体的な例を考えよう。

例 $\Gamma(N)$ を level N の主合同部分群 $\{\gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv 1_2 \bmod N\}$ とする。$N \geqq 3$ のとき $\Gamma(N)$ は torsion-free

かつ，$\Gamma(N)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ の正規部分群であるから，$\Gamma(N)$ の全ての cusps は第一種となる。$(s=0,\ t=t_1)$。$\Gamma(N)$ で定まる楕円モジュラー曲面を $B(N)=B_{\Gamma(N)}$ とかくことにする。$B(N)$ の singular fibre は全て type I_N である。$B(N)$ に関する numerical character $g,\ p_g, \cdots$ を $g(N),\ p_g(N), \cdots$ とかけば (cf. 河田[3].I. p.92)

$$\mu(N) = \frac{1}{2} N^3 \prod_{p \mid N} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

$$g(N) = 1 + \frac{N-6}{12N}\mu(N), \quad t(N) = \frac{1}{N}\mu(N).$$

$$\rho(N) = 2 + (N-1)\cdot t(N)$$

$$p_g(N) = \frac{N-3}{6N}\mu(N), \qquad b_2(N) = 2p_g(N) + \rho(N).$$

小さい N について

N	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	0	0	1	3	5	10	13
t	4	6	12	12	24	24	36	36
ρ	10	20	50	62	146	170	290	326
p_g	0	1	4	6	16	20	36	42
b_2	10	22	58	·	·	·	·	410.

さて $\Delta_{\Gamma(N)}$ は level N structure をもつ楕円曲線の moduli (の compact 化) を与え，$B(N)$ は，そういう楕円曲線の universal family の一つの compact 化である。$B(N)$ については，rank $r=0$ のみならず

$$H^0(\Delta_{\Gamma(N)},\ \Omega(B(N)^{\#})) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

が証明される。$N=3$ のとき，$B(3)$ は有理曲面で，$3^2=9$ 個

の sections は互いに交らない 9 個の第一種例外曲線を与える。$N=4$ のとき $B(4)$ は K3 曲面で $p_g=1$ 次元の複素トーラスは座数乗法 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ をもつ楕円曲線である。

Remark. $\Delta_{\Gamma(N)}$ の函数体 K_N は $\Gamma(N)$ に関する モジュラー函数体に他ならない。$B(N)$ の generic fibre を $E(N)$ とかくと $E(N)$ は K_N 上定義された楕円曲線で、その K_N-有理点の群は $E(N)$ の N 等分点の群 $E(N)_N$ $(\simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2)$ に等しい。故に $E(N)/K_N$ は $N=2,3$ に関する次の事実（井草 [2] p.464）の一般の N への拡張（但し $k=\mathbb{C}$ として）を与えるものと解釈される。

(i) k を標数 $\neq 2$ の体、λ を k 上の変数、$K_2=k(\lambda)$ とする。K_2 上の楕円曲線 $E\ (\subset \mathbb{P}^2)$：$y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$，原点$=(0,1,0)$，について、$E$ の K_2-有理点の群 $E(K_2)=E_2=\{(0,1,0),(0,0,1)$ $(1,0,1),(\lambda,0,1)\}$.

(ii) k を標数 $\neq 3$ の体で 1 の 3 乗根を含むとする。μ を k 上の変数、$K_3=k(\mu)$ とすると $E^{\subset \mathbb{P}^2}$：$x^3+y^3+z^3-3\mu xyz=0$,（その base point の一つ, e.g. $(1,-1,0)$, を原点として）について、$E(K_3)=E_3=\{9$ つの base points$\}$。$k=\mathbb{C}$ のとき $\mathbb{P}^2$ からこの 9 つの点を blowing-up して得られる曲面は上記 $B(3)$ に同型である。

文献

1. J. W. S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, Jour. London Math. Soc. 41, (1966) pp. 193−291.
2. J. Igusa, Fibre systems of Jacobian varieties III. Amer. J. Math. 81 (1959) pp 453−476.
3. 河田敬義, 一変数保型函数の理論 I, II. (東大セミナリー・ノート).
4. K. Kodaira, On compact analytic surfaces II−III. Ann. of Math. 77 (1963) pp 563−626., 78 pp 1−40.
5. G. Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, Jour. Math. Soc. Japan 11 (1959) pp. 291−311.
6. T. Shioda, Elliptic modular surfaces, I, II. Proc. Japan Acad. 45 (1969) pp 786−790, 833−837.
7. J. Tate, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Sem. Bourbaki n°306 (1965/66) pp 1−26.