

準周期系について

東北大 理 中島文雄

まえがき

準周期系における準周期解の存在を示すためには、二つの立場がある。一つは概周期解の特別なものとして見る立場、他の一つは不変周期曲面との関連から見る立場である。著者の修士論文においては、これらの各々による存在定理が述べられている。しかしそのどちらの立場に立っても、条件として、“Hullの解の初期値に関する uniqueness”を仮定している。そこで、もしこの条件を仮定しない場合には、その結論はどう変わるであろうか。これに答えするため、特に後者の立場に立つならば、ある意味で準周期解に近い解の存在が示される。本稿の目的はこれを示すことである。そして同時にそれは二つの立場の違いがあると思われる。

記号

R^n : n 次元ユークリッド空間、以下、主に R^n の元、
 y , R^k の元を x で表わす。

$$R = (-\infty, \infty)$$

$R^n \ni y = (y^1, \dots, y^n)$ に対して、ノルム $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y^i|^2}$
を定義する。

$$e_j = (0 \dots 0 \overset{j}{1} 0 \dots 0) \in R^k, \quad \bar{t} = (t, t, \dots, t) \in R^k$$

$C(A; B)$ は A を定義域、 B を値域とする連続関数の
全体である。

定義 1

$(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_k})$ が一次独立とは、

$\frac{n_1}{w_1} + \dots + \frac{n_k}{w_k} = 0$ なり整数の組 $(n_1, \dots, n_k) \neq (0, \dots, 0)$ に
限る。

以下、 $\{w_1, \dots, w_k\}$ を固定して考え、 $(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_k})$ が一次独立の関係
にあるとする。

$$G(R^k) = \{ f(x) \in C(R^k; R^n) \mid f(x + w_j e_j) = f(x) \text{ for } j=1, 2, \dots, k \}$$

このとき $G(R^k)$ は sup-norm で完備空間となる。

定義 2

$f_0(t) \in C(R; R^n)$ が準周期関数 (quasi-periodic function) であるとは、

は、 $f(x) \in G(R^k)$ が存在して

$$f_0(t) = f(t, \dots, t) = f(\bar{t}) \text{ とかける。}$$

$K=1$ のとき、準周期関数は周期関数となる。

定義3

系 (1) $\frac{dy}{dt} = Y_0(t, y)$; $Y_0(t, y) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ が準周期的で

あるとは、ある関数 $Y(x, y) \in C(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ が存在して、

$$Y(x + w_j e_j, y) = Y(x, y) \text{ for } j = 1, 2, \dots, k, \text{ えて}$$

$$Y_0(t, y) = Y(\bar{t}, y) \text{ とおけている。}$$

次に \mathbb{R}^k の部分集合 $(H)_1$ を定義する。

$(H)_1 \ni x = (x^1, \dots, x^k) \iff \exists \xi \in \mathbb{R}$ と整数の組 (n^1, \dots, n^k) が存在して

$$x^j = \xi + n^j w_j, \dots, x^k = \xi + n^k w_k \text{ とおけている。}$$

$$\text{即ち } x = \bar{\xi} + (n^1 w_1, \dots, n^k w_k) \text{ である。}$$

補題1

$(H)_1$ は \mathbb{R}^k で dense である。

証明は略す。

$(H)_1$ の上の関数空間を定義する。

$$F((H)_1) = \left\{ \alpha(\theta) \in C((H)_1; \mathbb{R}^n); \alpha(\theta + w_j e_j) = \alpha(\theta) \text{ for } j = 1, 2, \dots, k \right. \\ \left. \begin{array}{l} \sup_{\theta \in (H)_1} \|\alpha(\theta)\| < \infty \end{array} \right\}$$

すると $F((H)_1)$ は $\sup\text{-norm } \|\alpha\| = \sup_{\theta \in (H)_1} \|\alpha(\theta)\|$ で完備空間となる。

$G(\mathbb{R}^k)$ との関係は

$$G(\mathbb{R}^k) \subset F((H)_1) \text{ である。}$$

次に3種の連続関数を考える。

(a) 概周期関数 (almost periodic function)

(b) 準周期関数 (quasi-periodic function)

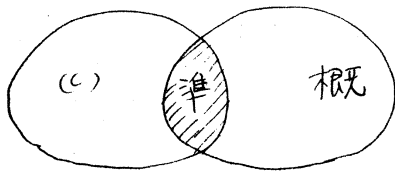
(c) $f(t) = \alpha(t)$ for some $\alpha(t) \in F(\mathbb{T})$.

これらについて次の関係が成立する。

命題1.

(c)型の関数が更に概周期関数ならば、それは準周期関数である。

これを図示すると



命題1により、(c)型の解は、準周期解に近いものを見出す。

以下、定理1において、まえかきに述べた“近い解”として

(c)型の解の存在定理を述べる。

o 不変周期曲面との関連.

定義3の系(1)に対応して、そこに現れる $Y(x, y)$ を用いて、

$$\text{系(2)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(x, y) & y \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^k \\ \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = I \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \end{cases} \quad \text{を考える。}$$

系(2)の解で、 $t=t_0$ で $x=\theta_0$, $y=y_0$ を通る解を

$$\begin{cases} y(t, t_0, \theta_0, y_0) \\ x(t, t_0, \theta_0, y_0) \end{cases} \quad \text{と書く.} \quad \theta_0 \in \mathbb{H}_1$$

すると x に関する方程式より

$$x(t, t_0, \theta_0, y_0) = \bar{x} - \bar{x}_0 + \theta_0 \quad \text{となる.}$$

定義4

$y = S(t, \theta) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{H}_1; \mathbb{R}^n)$ が系(2)に対する不変周期曲面
であるとは、

① $S(t, \theta + \omega_j e_j) = S(t, \theta)$ for $j=1, 2, \dots, k$.

② ある $\omega_0 > 0$ が存在して $S(t + \omega_0, \theta) = S(t, \theta)$

③ 系(2)の解で、 $y_0 = S(t_0, \theta_0)$ なるものは、

$$y(t, t_0, \theta_0, y_0) = S(t, x(t, t_0, \theta_0, y_0)) \quad \text{for } t \geq t_0$$

となる。

ここで、③は、集合 $\{(t, \theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}_1 \times \mathbb{R}^n \mid y = S(t, \theta)\}$ から出る解は、
この集合に留まっていることを示している。即ち不変がある。

補題2.

もし系(2)が不変周期曲面 $y = S(t, \theta)$ for $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{H}_1$ を持ち、更に
 $\omega_0 \in \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ ならば、系(1)は(C)型の解を持つ。

証明は略す。

定義5. 系(2)の y 解を用いて $F(\mathbb{H}_1)$ からそれ自身への作用素を定義する.

$F(\mathbb{H}_1) \ni \alpha(\cdot)$ に対し,

$$(T\alpha)(\theta) = \gamma(\omega_0, 0, \theta - \bar{\omega}_0, \alpha(\theta - \bar{\omega}_0)) \quad \text{for } \theta \in \mathbb{H}_1.$$

補題3.

$(T\alpha)(\theta) = \alpha(\theta)$ on \mathbb{H}_1 なる $\alpha(\cdot) \in F(\mathbb{H}_1)$ が存在すること.

系(2)が不変周期曲面を持つことは同値である.

証明は略す.

以上より系(1)が(C)型の解を持つためには.

$$(T\alpha)(\theta) = \alpha(\theta) \text{ on } \mathbb{H}_1, \quad \forall \omega_0 \in \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$$

なる $\alpha(\cdot) \in F(\mathbb{H}_1)$ の存在を示せばよい。

定義6.

$H(Y_0(t, y)) \ni g(t, y) \iff$ ある数列 $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ が存在して.

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} Y_0(t + \tau_\ell, y) = g(t, y) \quad \text{uniformly on } R \times S \quad (S: \mathbb{R}^n \text{ の任意のコンパクト集合})$$

$$\text{系(3)} \quad \frac{dy}{dt} = g(t, y) \quad ; \quad g(t, y) \in H(Y_0(t, y)).$$

定義7.

系(1)の解 $y_0(t)$ が quasi-uniform-asymptotically stable in the large

on $[0, \infty)$ であるとは.

$\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0$ に対し, $T(\varepsilon, M) > 0$ が存在して.

$$\|z_0 - y_0(t_0)\| < M \text{ ならば}$$

$$\|y(t, t_0, z_0) - y_0(t)\| < \varepsilon \text{ for } t \geq t_0 + T(\varepsilon, M); t_0, z_0,$$

ここで $y(t, t_0, z_0)$ は系 (1) の解で $t=t_0$ で z_0 を通るものである。
以下簡単のため $y_0(t)$ は q - u - a - s - l on $[0, \infty)$ であると書く。

定理 1.

系 (1) 及び系 (3) において、

条件 (1) 系 (1) の解は初期値に関して唯一に定まる。

条件 (2) 各系 (3) において、全ての解は $t = \infty$ まで定義されている。

条件 (3) 有界な解 $y_0(t)$ ($\text{for } t \geq 0$) が存在して

$$q\text{-}u\text{-}a\text{-}s\text{-}l \text{ on } [0, \infty) \text{ である。}$$

このとき、系 (1) は唯一の (1) 型の解をもち、それは

$$q\text{-}u\text{-}a\text{-}s\text{-}l \text{ on } \mathbb{R} \text{ である。}$$

証明

補題 4 定理の条件が満たされているとき、系 (1) は \mathbb{R} 上で定義された解 $\psi(t)$ を持つ、

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t)\| \leq \sup_{t \geq 0} \|y_0(t)\|$$

かつ $\psi(t)$ は q - u - a - s - l on \mathbb{R} である。

証明は Kamke's lemma を用いればよい。

さて定理の証明に入る。

$\sup_{t \geq 0} \|y_0(t)\| \leq B < \infty$ とすると、補題4より、

$$\|y(t)\| \leq B \quad \text{on } R \quad \text{となる。}$$

定義5において $\omega_0 \in \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ なる T を定義すると、証明は

$(T\alpha)(\theta) = \alpha(\theta)$ on \mathbb{H} , なる $\alpha(\cdot) \in F(\mathbb{H}_1)$ の存在を示せばよい。

条件(1)と(2)より、作用素 T が $F(\mathbb{H}_1)$ 上で定義され、又それが $F(\mathbb{H}_1)$ に写すことが判る。

$$\therefore T: F(\mathbb{H}_1) \rightarrow F(\mathbb{H}_1)$$

従って、 $\alpha(\cdot) \in F(\mathbb{H}_1)$ を固定して、 $\{T^l \alpha(\cdot)\}_{l=1}^{\infty}$ を考えよと、

$$\{(T^l \alpha)(\cdot)\}_{l=1}^{\infty} \subset F(\mathbb{H}_1) \text{ である。}$$

I. この関数列が一様有界であることを示す。

$$(T^l \alpha)(\theta) = y(l\omega_0, 0, \theta - l\omega_0, \alpha(\theta - l\omega_0)) \text{ とかける。}$$

$$y(t, 0, \theta - l\omega_0, \alpha(\theta - l\omega_0)) = y(t, l, \alpha) \text{ とかくと、}$$

$$(T^l \alpha)(\theta) = y(t, l, \alpha) |_{t=l\omega_0} \text{ となる。}$$

$$y(t, l, \alpha) \text{ は } \begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(\bar{t} + \theta - l\omega_0, y) \\ y(0, l, \alpha) = \alpha(\theta - l\omega_0) \end{cases} \text{ の解となる。}$$

$\theta \in \mathbb{H}_1$ ならば、 $\theta - l\omega_0 \in \mathbb{H}_1$, 従って $\exists z \in R$ と整数の組 (n_1^z, \dots, n_k^z) が存在して

$$\theta - l\omega_0 = \bar{z} + (n_1^z \omega_1, \dots, n_k^z \omega_k) \text{ とかける。これを代}$$

入すると、 $\frac{dy}{dt} = Y(\bar{t} + \theta - l\omega_0, y) = Y(\bar{t} + \bar{z}, y) = Y_0(t + \bar{z}, y)$ となる。

$$y(t, l, \alpha) \text{ は } \begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y_0(t + \bar{z}, y) \\ y(0, l, \alpha) = \alpha(\theta - l\omega_0) \end{cases} \text{ の解となる。}$$

このとき補題 4 で述べた $\Psi(t+\xi_l)$ も前述の系の解で、かつ $g-u-a-s-l$ on R である。そして $\|\Psi(0, l, \alpha)\| = \|\alpha\| < \infty$ より $T(\|\alpha\|, 1)$ が存在して、

$$\|\gamma(t, l, \alpha) - \Psi(t+\xi_l)\| < 1 \quad \text{for } t \geq T(\|\alpha\|, 1) \text{ and } l=1, 2, \dots$$

$$\|\gamma(t, l, \alpha)\| < 1 + \|\Psi(t+\xi_l)\| \leq 1 + B$$

上式は $t = l\omega_0$ ($l \geq \frac{1}{\omega_0} \cdot T(\|\alpha\|, 1)$) でも成り立っているから、

$$\|\gamma(l\omega_0, l, \alpha)\| < 1 + B \quad \text{for } l \geq \frac{1}{\omega_0} \cdot T(\|\alpha\|, 1).$$

$$\|(T^l \alpha)(\theta)\| < 1 + B \quad \text{for } l \geq \frac{1}{\omega_0} \cdot T(\|\alpha\|, 1)$$

この式は θ に無関係に成り立っているから

$$\|(T^l \alpha)\| < 1 + B \quad \text{for } l \geq \frac{1}{\omega_0} \cdot T(\|\alpha\|, 1)$$

又、 $\{T^l \alpha\}_{l=1}^{\infty}$ ($F(\mathbb{H}_1)$) より

$$\max_{0 \leq l < l_0} \|T^l \alpha\| < \infty \quad \left(l_0 \geq \frac{1}{\omega_0} \cdot T(\|\alpha\|, 1) \right).$$

$\|T^l \alpha\| < M_0$ ($< \infty$) for $l=1, 2, \dots$ なる $M_0 > 0$ が存在する。

II

$\{T^l \alpha\}_{l=1}^{\infty}$ が基本列であることを示す。

任意の l_1, l_2 ($l_2 \geq l_1$) に対し、

$$(T^{l_2} \alpha)(\theta) - (T^{l_1} \alpha)(\theta) = (T^{l_1} \alpha)(\theta) - (T^{l_1})(T^{l_2-l_1} \alpha)(\theta)$$

$$= \gamma(l, \omega_0, 0, \theta - \bar{l}, \omega_0, \alpha(\theta - \bar{l}, \omega_0)) - \gamma(l, \omega_0, 0, \theta - \bar{l}, \omega_0, (T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha)(\theta - \bar{l}, \omega_0))$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \gamma(t, l_1, \alpha) \Big|_{t=l_1, \omega_0} - \gamma(t, l_1, T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha) \Big|_{t=l_1, \omega_0} \text{ とかける。}$$

$$\theta - \bar{l}, \omega_0 \in \mathbb{H}, \text{ より, } \theta - \bar{l}, \omega_0 = \bar{\xi} + (n^1 \omega_1, \dots, n^k \omega_k) \text{ とかける。}$$

従って, $\gamma(t, l_1, \alpha)$ と $\gamma(t, l_1, T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha)$ は,

$$\frac{dy}{dt} = Y(\bar{t} + \theta - \bar{l}_1, \omega_0, y) = Y(\bar{t} + \bar{\xi}, y) = Y_0(\bar{t} + \bar{\xi}, y)$$

の解である。

従って補題 4 から, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $T(M_0, \varepsilon/2) > 0$ が存在して,

$$\|\gamma(t, l_1, \alpha) - \psi(t + \bar{\xi})\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } t \geq T(M_0, \varepsilon/2).$$

$$\|\gamma(t, l_1, T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha) - \psi(t + \bar{\xi})\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } t \geq T(M_0, \varepsilon/2).$$

ここで $\gamma(t, l_1, \alpha)$, $\gamma(t, l_1, T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha)$ の初期値は, 各々 $\alpha(\theta - \bar{l}, \omega_0)$, $T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha(\theta - \bar{l}, \omega_0)$ であり, その sup-norm は M_0 より小さいことを用いた。

$$\therefore \|\gamma(t, l_1, \alpha) - \gamma(t, l_1, T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha)\| < \varepsilon \quad \text{for } t \geq T(M_0, \varepsilon/2).$$

そして, 上式は, $l_1 = 1, 2, \dots$ に対して成立してゐる。

$$\therefore \|\gamma(l_1, \omega_0, l_1, \alpha) - \gamma(l_1, \omega_0, l_1, T^{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} \alpha)\| < \varepsilon \quad \text{for } l_1 \geq \frac{1}{\omega_0} T(M_0, \varepsilon/2)$$

$$\text{即ち } \|(T^{\bar{l}_1} \alpha)(\theta) - (T^{\bar{l}_2} \alpha)(\theta)\| < \varepsilon \quad \text{for } \bar{l}_2 \geq \bar{l}_1 \geq \frac{1}{\omega_0} T(M_0, \varepsilon/2).$$

ここで, 上式は全ての θ について成立してゐるから,

$$\|(T^{\bar{l}_1} \alpha) - (T^{\bar{l}_2} \alpha)\| < \varepsilon \quad \text{for } \bar{l}_2 \geq \bar{l}_1 \geq \frac{1}{\omega_0} T(M_0, \varepsilon/2).$$

以上より $\{T^{\bar{l}} \alpha\}_{\bar{l}=1}^{\infty}$ は基本列である。

III

$\{T^{\bar{l}} \alpha\}_{\bar{l}=1}^{\infty} \subset F(\mathbb{H})$, かつ $F(\mathbb{H})$ は完備であるから, $\alpha_0(\theta) \in F(\mathbb{H})$ が

存在して, $\lim_{\bar{l} \rightarrow \infty} \|(T^{\bar{l}} \alpha) - \alpha_0\| = 0$ となる。

さて, $y(t, 0, \theta - \bar{\omega}_0, y_0)$ は, $\frac{dy}{dt} = Y(\bar{t} + \theta - \bar{\omega}_0, y)$ の解で, $t=0$ で y_0 を通るものである.

条件 (1) より上の系では, $\theta \in (H)$ であるから, 解は初期値に関して唯一つ定まり, 従って y_0 の連続関数となる.

$$\begin{aligned} \alpha_0(\theta) &= \lim_{l \rightarrow \infty} T_l(T^l \alpha)(\theta) = \lim_{l \rightarrow \infty} y(\omega_0, 0, \theta - \bar{\omega}_0, (T^l \alpha_0)(\theta - \bar{\omega}_0)) \\ &= y(\omega_0, 0, \theta - \bar{\omega}_0, \alpha_0(\theta - \bar{\omega}_0)) = (T \alpha_0)(\theta) \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha_0(\theta) = (T \alpha_0)(\theta) \quad \text{for any } \theta \in (H).$$

以上より, (C) 型の解が存在する. 更に $\Psi(t)$ の安定性を考慮すると, $\Psi(t)$ とこの (C) 型の解は一致して, 唯一つしか存在しないことを判る.

証明は終る.

特に定理 1 において, 条件 1 に加えて, 更に,

“各系 (3) の解が初期値に関して唯一つ定まる”

を仮定すれば, 準周期解の存在定理が得られる.