数理解析研究所講究録
118巻 1971年 1-12

場の量子論における Hamiltonian の定義

神戸大学理学部　麦林布道

「散乱理論とその周辺」研究会において，江沢さんが自由度無限大の系の量子力学としての場の量子論*の基本的なことがらを述べておられる。ここでは，本研究会の主題に則して QFT の Hamiltonian の Fock space における定義についてこれ迄に判っていることと，ならびにそれに関連した J. Glimm と K. Hepp の conjecture をお話して introductory talk としたい。

式を出来るだけ簡単にするため，中性スカラー場に限る。他の場が共存する場合への拡張可能性については後でふれる。

$x \in R^s$ とし，$t=0$ における field operator を

$$(1) \qquad \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int \frac{d^s k}{\sqrt{2\omega}} \left[a(-k) + a^*(k) \right] e^{-ikx}$$

の如く展開する。kx は R^s における通常の内積，また $\omega(k) = (k^2+m^2)^{1/2}$，$m$ は粒子の質量である。

---

* 以下 QFT (quantum field theory) と略記する。

$$[a(k), a^*(k')] = \delta^s(k-k'),$$

$$[a(k), a(k')] = [a^*(k), a^*(k')] = 0.$$

$\phi(f) = \int \phi(x) f(x) d^s x$, $f \in \mathcal{S}(R^s)$, は Fock space $\mathcal{F}$ の s.a. operator, Fock vacuum を Ω_0 とすると, $\prod_{i=1}^{n} \phi(f_i)\Omega_0$, $n < \infty$, $f_i \in \mathcal{S}(R^s)$, 及びこれらの一次結合の集合（それを D と記す）は $\mathcal{F}$ で dense である。

free Hamiltonian は

(2) $$H_0 = \int \omega(k) a^*(k) a(k) d^s k$$

で与えられ, D で ess. s.a. であることが示せる。$\lambda(\phi^n)_{s+1}$ 理論とは, 相互作用が全く形式的に ϕ の n 乗の形に

(3) $$V = \lambda \int :\phi^n(x): g(x) d^s x$$

と書かれるものをいう。ここに double colon は Wick 積, $g(x)$ は space cutoff を表わす十分滑らかな関数である。(3) を Fourier 変換すると

$$V = \sum_{p+q=n} V_{pq}$$

(4) $$V_{pq} = \int v_{pq}(k_1, \cdots, k_n) a^*(k_1) \cdots a^*(k_p) a(-k_{p+1}) \cdots a(-k_n) d^s k_1 \cdots d^s k_n$$

$v_{pq}(k_1,\cdots,k_n)$ は本質的には、$g(x)$ の Fourier 変換と、$\phi(x)$ の展開 (1) に現われる因子 $(2\omega_i)^{-1/2}$ との積である。V は一般に $\mathcal{F}$ 上の operator として定義できるとは限らない。V をどう考え、total Hamiltonian をどのように定義するかが QFT の Hilbert space formulation の第一の課題である。

周知の van Hove - Miyatake のモデル[1] は $n=1$, $s=3$ の場合に当る。その Hamiltonian の定義に関しては次のことが判っている[2]。v_{no} をかんたんに v_0 と書くと

(a) $D(H_{ren}) = D(H_0)$ iff $v_0 \in L_2$

このとき、$D(V) \supset D(H_0)$ であり、T. Kato の意味での type (A) の regular perturbation の理論* が適用できる。即ち

(5) $$\|V\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\| \quad (a<1) \quad \text{for } {}^\forall\psi \in D(H_0)$$

そして operator として $H_{ren} = H_0 + V + C$ と書ける。ここに、C は vacuum energy の shift を与える const. operator でこの場合有限

(b) $D(H_{ren}^{1/2}) = D(H_0^{1/2})$ iff $v_0/\omega^{\frac{1}{2}} \in L_2$

このとき、V は operator でなく、bilinear form としてしか定義できないが、regular perturbation の type (B) の条件**

* Ref. 3), p. 377

** Ref. 3), p. 398

(b) $|(\psi, V\psi)| \leq a(\psi, H_0\psi) + b(\psi,\psi) \quad (a<1) \quad \text{for } \forall\psi \in D(H_0^{1/2})$

を満たしているので、$(\psi, (H_0+V+C)\psi)$ を bilinear form とするような s.a. operator として H_{ren} が定義できる。尚 $D(H_{ren}) \cap D(H_0) = \{0\}$ であり、勿論 operator として $H_{ren} = H_0 + V + C$ とは書けない。この場合も C は有限になる。

(c) $D(H_{ren}) \subset \mathcal{F}$ iff $v_0/\omega \in L_2$

このとき、vacuum shift は ∞ になるが、これを引き去った後の H_{ren} は $\mathcal{F}$ 上で定義出来る。（H_0 と H_{ren} を結ぶユニタリ変換がつくれる）。$D(H_{ren}^{1/2}) \cap D(H_0^{1/2}) = \{0\}$

これらの結果は類似の相互作用の場合に一般化できるようで、Glimm[4] と Hepp[5] は次の如き conjecture を述べている。相互作用 Hamiltonian の Wick monomial (4) において、a, a^* は boson でも、fermion でもまた antifermion でもよいとする。更に

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \omega(k_i)$$

と定義する。

(a′) $D(H_{ren}) \subset D(H_0)$ iff $v_0 \in L_2$

$D(H_{ren}) = D(V) \cap D(H_0)$ は $\mathcal{F}$ で dense。この上で $H_{ren} = H_0 + V + C$ と書ける。C は有限の vacuum shift.

(b') $D(H_{ren}^{1/2}) \subset D(H_0^{1/2})$ iff $v_0/\gamma^{\frac{1}{2}} \in L_2$.

$H_{ren} = H_0 + V + C$ は bilinear form の意味に解せられる。

C は矢張り有限, $D(H_{ren}) \cap D(H_0) = \{0\}$.

(c') $D(H_{ren}) \subset \mathcal{F}$ iff $v_0/\gamma \in L_2$.

この時 C は無限大, $D(H_{ren}^{1/2}) \cap D(H_0^{1/2}) = \{0\}$.

この conjecture は既にいくつかのモデルについて成立つことが確認されている。しかし，その何れもがいわゆる superrenormalizable なモデルである。即ち C その他の counter term を λ の巾級数で求めると，ある次数以降は有限な答を与える。λ の dimension $[\lambda] = L^d$ の $d < 0$ の時 superrenormalizable であるという判定条件はよく知られている。

いくつかの理論について，上記の条件がどの段階までこわれているか，また d 及び superrenormalizability の程度はどうか，を表にすると次のようになる。

	(a')	(b')	(c')	d	
$(\phi^{2n})_2$				−2	すべての次数で有限
$(\phi^2)_3$	×			−2	
$(\phi^2)_4$	×	×		−2	
$(\phi^2)_5$	×	×	×	−2	
$(\phi^4)_3$	×	×	×	−1	4次以上で有限

$(\bar{\Psi}\Psi\phi)_2$	⊠	⊠		-1	3次以上で有限
$(\bar{\Psi}\Psi\phi)_3$	⊠	⊠	⊠	$-\frac{1}{2}$	7次以上で有限

この内，$\lambda(\phi^4)_2$ 及び $\lambda(\bar{\Psi}\Psi\phi)_2$ は最近 J. Glimm と A. Jaffe によって精力的にしらべられた。とくに $\lambda(\phi^4)_2$ では cutoff Hamiltonian の self-adjointness を証明するのに新たに "singular perturbation" の理論を展開し，axiomatic QFT, algebraic QFT において既に開発されていた手法を駆使して cutoff を取り除き，QFT の基本的要請を満たす理論をつくりあげることに成功した（constructive QFT）. その過程の主要点は，関根さん，池辺さん，荒木さんのお話に出てくる。ここでは constructive QFT の最近の論文を網羅して参考に資するに止めたい。

文　献

[1] L. van Hove, Physica 18 (1952), 145. O. Miyatake, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. 2A (1952), 89, 3A (1952), 145.

[2] H. Ezawa, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 545. Y. Kato and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 409.

[3] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer, 1966

[4] J. Glimm, Varenna Lectures, Course 45 (1968), 97-119.

[5] K. Hepp, *Théorie de la Renormalisation*, Springer, 1969.

Constructive Quantum Field Theory

1970 July

Lectures (including Surveys)

[G1] J. Glimm: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 97-119
Models for QFT

[G2] J. Glimm: Advances in Math. 3 (1969), 101-124
The foundations of QFT

[J1] A. M. Jaffe: *Contemporary Physics* Vol.2 (1968), pp. 463-470
Progress in constructive field theory

[J2] A. M. Jaffe: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 120-151
Constructing the $\lambda(\phi^4)_2$ theory

[J3] A. M. Jaffe: RMP 41 (1969), 576-580
Whither axiomatic field theory ?

[K1] J. R. Klauder: Acta Phys. Austr. Suppl. 6 (1969), 167-214
Hamiltonian approach to QFT

Announcements

[GJ1] J. Glimm and A. Jaffe: PRL 23 (1969), 1326
A model of Yukawa QFT

[GJ2] J. Glimm and A. Jaffe: Bull. AMS 76 (1970), 407-410
Rigorous QFT models

Originals

[CJ1] J. T. Cannon and A. M. Jaffe: Preprint
Lorentz covariance of the $\lambda(\phi^4)_2$ QFT
Corresponding theory of bounded observables satisfies all the Haag-Kastler axioms. The Poincaré group is represented by *-automorphisms of the C* algebra, the norm closure of $U_B \mathfrak{A}(B)$.

[E1] J.-P. Eckmann: Thesis, Genève (1970)

Hamiltonians of persistent interactions

($\phi_b^+\phi_b^- P(\phi_a)$) Hamiltonians with momentum cutoff self-adjoint for deg P = 1,2,4 and s = 1. Semibounded without cutoff for deg P = 2, s = 1. The model deg P = 1, s = 3 has an infinite mass renormalization. Self-adjointness of the Hamiltonians with no cutoff is shown by summing the Born series.

[F1] P. Federbush: JMP 10 (1969), 50-52

Partially alternative derivation of a result of Nelson

Proof of Nelson's result [N1] avoiding the use of functional integration.

[G3] A. Galindo: Proc. NAS 48 (1962), 1128-1134

On a class of perturbation in QFT

$(\phi^n)_4$, $n \geqq 3$. Expectation values of H_{tot} can be arbitrarily negative.

[G4] M. Guenin: CMP 3 (1966), 120-132

On the interaction picture

Escape from Haag's theorem - space cutoff, yet the Heisenberg field satisfies the correct equation of motion in a diamond-like region of space-time.

[G5] J. Glimm: CMP 5 (1967), 343-386

Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions I

$(\bar{\psi}\psi\phi)_2$ with space cutoff. H_{ren} defined as a bilinear form in Fock space.

[G6] J. Glimm: CMP 6 (1967), 61-76

Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions II

H_{ren} positive definite. Schrödinger equation for H_{ren} can be solved.

[G7] J. Glimm: CMP 8 (1968), 12-25

Boson fields with nonlinear self-interaction in two dimensions

$(P(\phi))_2$, even degree, positive leading coefficient with space cutoff. H_{tot} bounded from below due to the Feynman-Kac formula.

[G8] J. Glimm: CMP 10 (1968), 1-47

Boson fields with $:\Phi^4:$ interaction in three dimensions

[J4] A. Jaffe: CMP 1 (1965), 127-149

Divergence of perturbation theory for bosons

$(\Sigma a_j \phi^j)_2$, finite sum from $j = 3$, $a_j \geqq 0$. Perturbation of all orders finite, but the series diverges. Green's function not analytic in λ at $\lambda = 0$.

[J5] A. Jaffe: JMP 7 (1966), 1250-1255

Wick polynomials at a fixed time

$(P(\phi))_2$ with space cutoff. Smearing in space is sufficient to prove H_{tot} be densely defined symmetric by the use of Weinberg's asymptotic theorem.

[JLW1] A. Jaffe, O. Lanford and A. S. Wightman: CMP 15 (1969), 47-68

A general class of cutoff model fields

Existence of Heisenberg fields and Wightman functions. The Kato perturbation is applicable thanks to cutoff dominant boson self-interaction.

[JP1] A. Jaffe and R. T. Powers: CMP 7 (1968), 218-221

Infinite volume limit of a $\lambda\phi^4$ field theory

$(\phi^4)_4$ Wightman functional, with infinite volume, finite momentum cutoff. The infinite volume limit not given by a density matrix in Fock space.

[N1] E. Nelson: *Mathematical Theory of Elementary Particles* (1966), pp. 69-74

A quartic interaction in two dimensions

$(\phi^4)_2$ in a periodic box. H bounded from below.

[O1] K. Osterwalder: Preprint

Boson fields with $\lambda\phi^3$ interaction in two, three and four dimensions

$(\phi^3)_4$ can be renormalized.

[P1] S. Parrott: CMP 13 (1969), 68-72

Uniqueness of the Hamiltonian in QFT

Remarks on the uniqueness of self-adjoint extension, referring to [G5], [G6], [G8].

[P2] R. T. Powers: CMP 4 (1967), 145-156

Absence of interaction as a consequence of good ultraviolet behavior in the case of a local Fermi field

Under a certain regularity condition slightly stronger than the finite mass renorm., ICAR theorem asserts that a local relativistic Fermi field must be free.

H_{ren} densely defined symmetric (positivity ?). Infinite vacuum energy, mass renorm. and wave function renorm. $(\phi^4)_3$ with space cutoff.

[GJ3] J. Glimm and A. Jaffe: CMP 11 (1968), 9-18

A Yukawa interaction in infinite volume

$(\bar{\psi}\psi\phi)_4$ with momentum cutoff on ψ, but without space cutoff. Existence of Heisenberg fields.

[GJ4] J. Glimm and A. Jaffe: PR 176 (1968), 1945-1951

A $\lambda\phi^4$ QFT without cutoffs I

$(\phi^4)_2$ with space cutoff. $H_{tot}(g)$ defined as a self-adjoint operator in Fock space. $H_{tot}(g)$ proved self-adjoint by singular perturbation. Heisenberg picture dynamics discussed à la [G4]. The theory is local. Formally, Lorentz covariant; non-trivial S-matrix.

[GJ5] J. Glimm and A. Jaffe: Ann. Math. 91 (1970), 362-401

The $\lambda(\phi^4)_2$ QFT without cutoffs II. The field operators and the approximate vacuum

Existence of a unique vacuum Ω_g: $H(g)\Omega_g = E_g\Omega_g$. $H(g)$ compact in $[E_g, E_g + m_o - \varepsilon]$. $\mathfrak{A}(B)$ satisfies the Haag-Kastler axioms except the Lorentz covariance (the exception is removed in [CJ1]).

[GJ6] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

The $\lambda(\phi^4)_2$ QFT without cutoffs III. The physical vacuum

The limit $g(x/n)$ tending n to infinity in the states ω_g. GNS construction then getting the physical space.

[GJ7] J. Glimm and A. Jaffe: JMP 10 (1969), 2213-2214

Infinite renormalization of the Hamiltonian is necessary

Unrenormalized H unbounded from below whenever first-order perturbation theory indicates that this is true.

[GJ8] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

Self-adjointness of the Yukawa_2 Hamiltonian

$(\bar{\psi}\psi\phi)_2$. Momentum cutoff makes $\delta m^2(g,K)$, $E(g,K)$ finite. To renormalize as required by perturbation theory. $H(g,K) \to H(g)$ as $K \to \infty$, in the sense of resolvent. $H(g)$ has a vacuum.

[GJ9] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

The Yukawa_2 QFT without cutoffs

Heisenberg picture dynamics. All cutoffs are removed in the field operators. The fields are local and formally Lorentz covariant.

[R1] L. Rosen: CMP 16 (1970), 157-183

A $\lambda\phi^{2n}$ field theory without cutoffs

$(P(\phi))_2$. Remove box, momentum and space cutoffs. H, positive self-adjoint, has a physical vacuum.

[SE1] K. Sinha and G. G. Emch: Bull. APS 14 (1969), 86

Adaptation of Powers' no-interaction theorem to Bose field

Space dimension n = 3.

Mathematical Tools

Feyman-Kac Formula

M. Kac: *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Intersci. 1959

J. Glimm: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 227-233

Integration in function space

Trotter Product Formula

H. F. Trotter: Pacific J. Math. 8 (1958), 887-919

Approximation of semi-groups of operators

H. F. Trotter: Proc. AMS 10 (1959), 545-551

On the product of semi-groups of operators

I. Segal: Proc. NAS 57 (1967), 1178-1183

Note towards the construction of nonlinear relativistic quantum fields I. The Hamiltonian in two dimensions as the generator of a C* automorphism group

Analytic Vector

E. Nelson: Ann. Math. 70 (1959), 572-615

Analytic vectors

H. J. Borchers and W. Zimmemann: NC 31 (1964), 1047-1059

On the self-adjointness of field operators

V. P. Gachok: DAN 178 (1968), 1033-1035

A description of all self-adjoint extensions of the field operators

Singular Perturbation

J. Glimm and A. Jaffe: CPAM 22 (1969), 401-414
Singular perturbations of self-adjoint operators

Regular Perturbation

T. Kato: *Perturbation Theory of Linear Operators,* Springer, 1966

Weinberg's Asymptotic Theorem

S. Weinberg: PR 118 (1960), 838-849
High energy behavior in QFT

GNS Construction

R. F. Streater and A. S. Wightman: *PCT Spin ~~and~~ & Statictics and All That,* Benjamin, 1964, P. 117 ff.

M. A. Naimark: *Normed Rings,* Noordhoff, 1959, Chap. IV.