

非一様な Burgers 乱流の数値解

航空宇宙技術研究所

山本 稀 義

§1 序 論

乱流はいろいろな流体现象の中でも特に非線型効果の著るしい現象であつて、その理論的構成には非常に複雑な数学的取扱いが成されるが、この様な複雑さを減少させるために通常用いられる手法は乱流の統計的一様性の仮定である。¹⁾しかし、しばしば実験的に観測される乱流、特に物体近くの乱流は非一様な場合が多く、一様性の仮定はその中で局所的にのみ成り立っている事が多い。また、完全に発達していない乱流は実験的には、層流と乱流が断続的に混在し、層流の中に乱流が局所的に存在する（またはこの逆の）事が知られてゐる。したがつて、この様な層流と乱流の境界近くにおける流れも一つの興味ある現象で、ここでは Burgers モデルを使つて、この様な境界近くの流れを初期値問題として数値解を求める。

Burgers モデルは速度場を支配する方程式が

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

で与えられる。ここで R は乱流の初期の状態で定まるレイノルズ数である。今非一様な初期の乱れとして次の様な初期条件を考える。

$$\langle u(x) \rangle_{t=0} = 0 \quad (1.2)$$

$$\langle u(x_1)u(x_2) \rangle_{t=0} = e^{-(x_1-x_2)^2} H(x_1)H(x_2) \quad (1.3)$$

ここで

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

とする。すなわち、初期の乱れは x の負の領域にのみ存在し、そのエネルギー分布は (1.3) より

$$\frac{1}{2} \langle u^2(x) \rangle_{t=0} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1/2 & x < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

となっている。そしてここまでは主として境界 ($x=0$) の近くの流れに関心を持つ。

§2. ではこの問題を (1.1) 式で取扱う前に (1.1) 式の非線型項を零とした線型問題として求める。§3. では (1.1) 式を用いた初期値問題の構成について述べ、§4. ではその計算結果を述べる。

§2 線型理論

Burgers モデル (1.1) を取扱う前にここでは (1.1) を線型化した線型問題として取扱う。すなわち基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

となる。(2.1) の解はよく知られている様に

$$u(x, t) = \left(\frac{R}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) \exp\left\{-\frac{R(x-x')^2}{4t}\right\} dx' \quad (2.2)$$

で与えられる。ここで $u(x, 0)$ は時刻 $t=0$ の速度場で、その集合が (1.2), (1.3) の乱れを作っていると考える。したがって $\langle u(x) \rangle_t$ は常に零であるが二点相関関数を作れば

$$\begin{aligned} \langle u(x_1)u(x_2) \rangle_t &= \frac{R}{4\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x'_1, 0)u(x'_2, 0) \rangle \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{R}{4\pi t}[(x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2]\right\} dx'_1 dx'_2 \\ &= \frac{R}{4\pi t} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \exp\left\{-(x'_1-x'_2)^2 - \frac{R}{4\pi t}[(x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2]\right\} dx'_1 dx'_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

が得られる。この式から単位長さ当りのエネルギー分布は

$$\frac{1}{2} \langle u^2(x) \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{R}{4t} \sqrt{\frac{2t}{8t+R}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{8t+R} x'^2} dx'$$

$$x \exp\left\{-\frac{R}{2t}(x+x')^2\right\} dx' \quad (2.4)$$

となる。そこで

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (2.5)$$

である。(2.4)式は誤差関数(2.5)を含む積分で、その値は数値的に求められるが、漸近的性質は次の通りである。

$$(i) \quad t \rightarrow 0 \quad \frac{1}{2} \langle u^2(x) \rangle_t \rightarrow \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$(ii) \quad |x| \rightarrow \infty \quad \frac{1}{2} \langle u^2(x) \rangle_t \rightarrow \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{2}(1+8t/R)^{1/2} & x < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

(i) については(1.5)を満足し、(ii)については $\frac{1}{2}(1+8t/R)^{1/2}$ は一様な乱れに対する線形理論によるエネルギー減衰則で $x \rightarrow -\infty$ でこの値に漸近する。(2.4)式を数値的に求めた結果を第1図に示す。図では縦軸に単位長さ当りの乱れのエネルギーの2倍 $\langle u^2(x) \rangle_t$ を取り、パラメータとしては t の代わりに t/R が使われている。図からわかるように $x > 0$ への乱れの波及とその結果としての x の負の領域でのエネルギーの減少が見られる。

§3. Burgers モデルの初期値問題

Burgers 方程式 (1.1) は Hopf²⁾ と Cole³⁾ によってその厳密解が次の様に与えられている。

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-x') \exp\left\{-\frac{R}{2} \int_0^{x'} u(x'',0) dx'' - \frac{R(x-x')^2}{4t}\right\} dx'}{t \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{R}{2} \int_0^{x'} u(x'',0) dx'' - \frac{R(x-x')^2}{4t}\right\} dx'} \quad (3.1)$$

そしてここでの問題は (3.1) を用いて (1.2), (1.3) で与えられる乱れの初期条件のもとで, すなわち (3.1) の $u(x,0)$ が

$$\langle u(x,0) \rangle = 0 \quad (3.2)$$

$$\langle u(x_1,0) u(x_2,0) \rangle = e^{-(x_1-x_2)^2} H(x_1) H(x_2) \quad (3.3)$$

を与える集合 $\{u(x,0)\}$ を構成する時の

$$\langle u(x,t) \rangle = \langle u(x) \rangle_t \quad (3.4)$$

$$\langle u(x_1,t) u(x_2,t) \rangle = \langle u(x_1) u(x_2) \rangle_t \quad (3.5)$$

を求める事と考える。ここで $\langle u(x) \rangle_t$, $\langle u(x_1) u(x_2) \rangle_t$ は時刻 t の平均速度, 二点相関関数を意味する。したがって (3.2) (3.3) を満足する集合 $\{u(x,0)\}$ を作る事が主たる問題となるが今 (1.2), (1.3) の代りに

$$\langle v(x) \rangle = 0 \quad (3.6)$$

$$\langle v(x_1)v(x_2) \rangle = e^{-(x_1-x_2)^2} \quad (3.7)$$

を与える集合 $\{v(x)\}$ を考えて、その各要素に対して

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ v(x) & x < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

とすれば (3.6), (3.7) から容易にわかるように集合 $\{u(x,0)\}$ は (3.2), (3.3) を満たす。このようにして得られた集合 $\{u(x,0)\}$ の各点に対して (3.1) は

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^0 \frac{(x-x')}{t} \exp\left\{-\frac{R}{2} \int_0^{x'} v(x'') dx'' - \frac{R(x-x')^2}{4t}\right\} dx' + I_1(x,t)}{\int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{R}{2} \int_0^{x'} v(x'') dx'' - \frac{R(x-x')^2}{4t}\right\} dx' + I_2(x,t)} \quad (3.9)$$

となる。ここで

$$I_1(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{x-x'}{t} \exp\left\{-\frac{R(x-x')^2}{4t}\right\} dx' = -\frac{2}{R} \exp\left\{-\frac{Rx^2}{4t}\right\} \quad (3.10)$$

$$I_2(x,t) = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{R(x-x')^2}{4t}\right\} dx' = \sqrt{\frac{t\pi}{R}} \left\{1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{R}{4t}} x\right)\right\} \quad (3.11)$$

である。(3.9) に含まれる $v(x)$ は一様な乱れ (3.6), (3.7) を作る集合であって、問題は (3.6), (3.7) のもとでの初期値問題に帰着したわけだ、細川と山本^{4), 5)} によって行なわれた特性汎関数による解法が利用出来る。すなわち (3.4), (3.5) は $\{v(x)\}$ に対する分布密度関数 $\rho_0(x)$ を用いて

$$\langle u(x) \rangle_t = \int u(x,t) p_0(v) \delta v \quad (3.12)$$

$$\langle u(x_1)u(x_2) \rangle_t = \int u(x_1,t) u(x_2,t) p_0(v) \delta v \quad (3.13)$$

で与えられる。ここで $p_0(v) \delta v$ は $v(x)$ が

$$v(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \sum_{j=1}^N [\sigma(k_j)]^{1/2} [\Lambda(k_j) \cos k_j x + M(k_j) \sin k_j x] dk_j \quad (3.14)$$

と Fourier 級数で与えられる時に

$$p_0(v) \delta v = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\Lambda^2(k_j) + M^2(k_j)] dk_j \right\} \\ \times \prod_{j=1}^N \left[d\Lambda(k_j) \left(\frac{dk_j}{2\pi} \right)^{1/2} dM(k_j) \left(\frac{dk_j}{2\pi} \right)^{1/2} \right] \quad (3.15)$$

となる。^{4), 5)} として $\sigma(k)$ は

$$\sigma(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \exp(ikx) dx = \pi^{1/2} \exp\left(-\frac{k^2}{4}\right) \quad (3.16)$$

である。(3.14), (3.15) は N が有限な場合はその意味で近似式であるが, 文献 4), 5) の中では N の値は実際の数値計算から最も効果的に決定された。したがってここでもその場合の値を用いて $N=30$ として計算を行う。(文献 4), 5) では一様乱流を取扱っているため平均速度は常に零であつて, $\langle u(x,t) \rangle_t$ は計算されなかつたが, §4 で述べるようにこの

問題では $\langle u(x) \rangle_t$ が有限の値を持つてくる。) しかし, $N=30$ としても (3.15) からわかるように, この計算には 60 回の多重積分が含まれるので, 数値計算はモンテカルロ求積法を使って行なわれた。

§4. 計算結果と検討

第2図および第3図に (3.13) から得られる乱れの単位長さ当りのエネルギー (またはレイノルズ応力) の分布に対する計算結果を示す。図では縦軸はエネルギーの2倍を表わし, 実線は第1図の線型理論を示す。第2図からわかる通り, この様な非一様な場合も一様な乱れと同様に, $R=1$ の結果は線型理論とよく一致する。^{4), 5)} そしてこのような粘性の効果の大きい流れでは粘性によるエネルギー散逸の効果の方が慣性項による対流の効果よりもはるかに大きくて, x の正の領域への乱れの波及は比較的少ない事を示している。第3図は対流の効果の比較的大きい $R=10$, $R=100$ の計算結果で, この場合は前図に比べて x の広い範囲に初期の非一様性の影響が及んでいる。また t が比較的小さい ($t \leq 1$) 時は x の正の領域に比べて x の負の影響領域が広い事と, x の正の領域に波及した乱れが x の増加する方向に急に減少する傾向を示すのが特徴的である。しかし $t=3$ ではこの傾向は少くなる。

この $\frac{1}{2}\langle u^2(x) \rangle_t$ は言わば一次元のレイノルズ応力と解釈されるので、次に述べる平均速度 $\langle u(x) \rangle_t$ に密接に関連する。

§3.の終りの所でふれた様に、この様な非一様な問題では初期において零とした平均速度が有限の値を持つ。この事を見るために (1.1) 式の平均を取ってみれば

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

となり、乱れが一様であればこの式の右辺は零となつて $\langle u \rangle_t$ は常に零であるが、非一様な場合には $\frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x}$ のため $\langle u \rangle_t$ が生じてくる。第4図にこの $\langle u(x) \rangle_t$ の分布の計算結果を示す。当然期待されるように τ が小さい時は非一様性の一番強い $x=0$ の値が最初に大きくなり、正の平均速度が現われる。しかし、第3図からわかるように $\frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x}$ の最大値は x の正の方向に動くので、 τ が大きくなると $\langle u \rangle_t$ の最大値は x の正の方向に動いていく傾向を示す。

この結果を別な見方をすれば次の様に解釈される。第5図、第6図に (3.12), (3.13) の数値計算が成された際のアンサンブルの個々の速度場の時間的発達の典型例を示す。第5図は之の中で特に初期に $x=0$ の近傍に $u(x)$ が負の山を持つものを選び、第6図は正の山を持つものを選んだのである。これらの図の中で $\tau=0.01$ の曲線は $x=0$ のごく近傍をのぞき

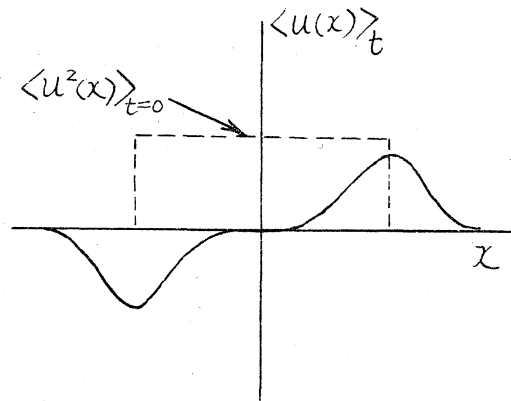
初期値 $u(x,0)$ と見てよい。Burgers 方程式 (1.1) の非線形項はこのような正の山、負の山を x の正の方向、負の方向へそれぞれ動かす働きをするが、図はこの運動を示している。

(粘性項のため減衰しながら) このために今 (3.8) の初期条件のもとでは x の正の領域には $u(x)$ の正の山のみが運ばれて来て、アンサンブルの平均をとれば、平均速度は正の値を持つことがわかる。この議論から推測すれば、(1.3) とは逆の初期条件、すなわち

$$\frac{1}{2} \langle u^2(x) \rangle_{t=0} = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

のもとでは $\langle u(x) \rangle_t$ は負の値を持つことが容易にわかる。

したがって今右図のように初期の乱流が流れの中に局所的に存在する場合を考えれば、図の^(赤線の)ような平均速度が生ずる。すなわちこのような局所的な乱れでは、乱れの内側から外側へ向う平均速度が発生する。



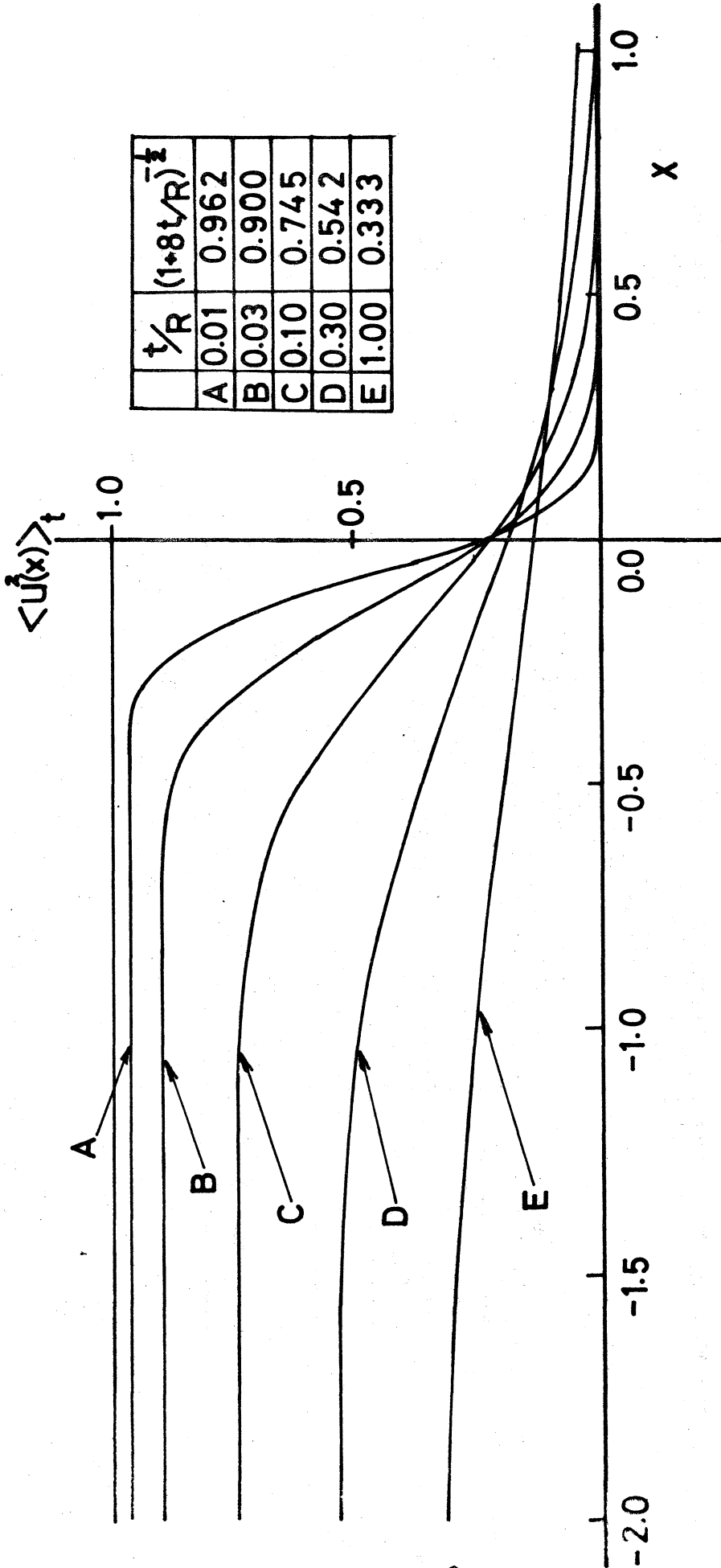
第7図に Skewness および Flatness Factor の計算結果を示す。しかしこの解法では文献5) と違って初期条件 (1.3) に合わせるため初期のアンサンブルの速度分布 $\{v_i(t)\}$ では

なく $\{u(x,0)\}$ を非常に歪ませているので, $x=0$ の近傍では図のように正規分布から非常にずれる事がわかる。しかし $x \rightarrow -\infty$ では当然一様な場合の値に漸近している。⁵⁾

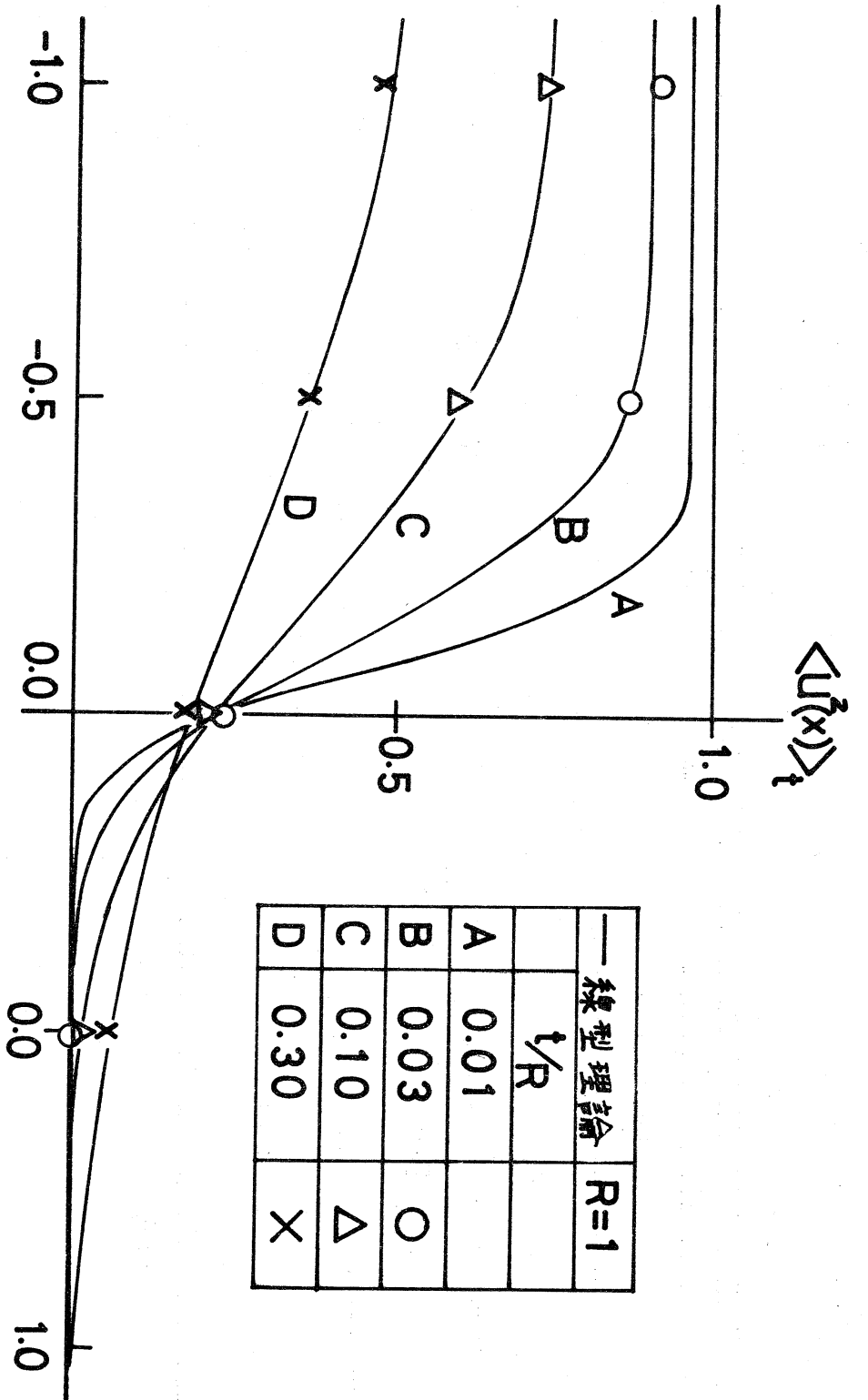
ここまで, Burgers 乱流の非一様な初期条件 (1.2), (1.3) のもとでの初期値問題の数値解について述べてきたが, (1.2), (1.3) 以外の初期条件についてもこの解法は応用出来る。

文 献

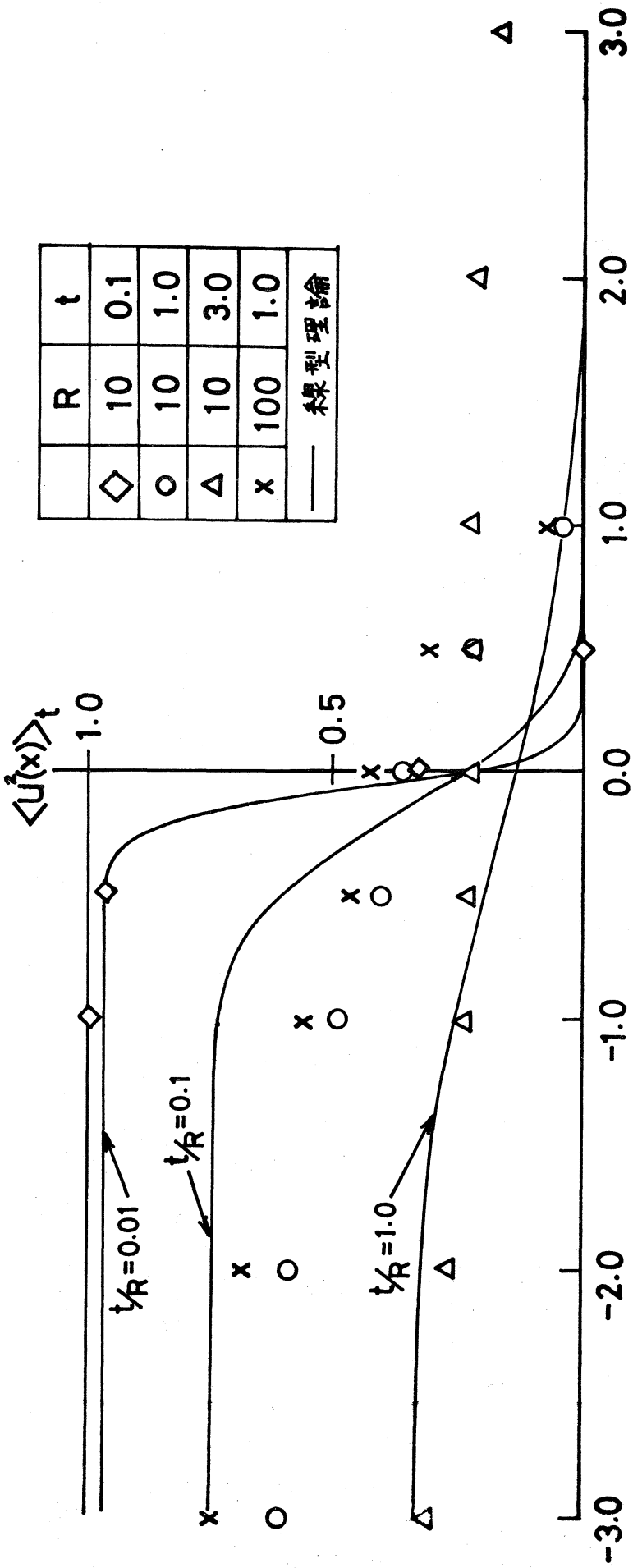
- 1) G.K. Batchelor : Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press (1953).
- 2) E. Hopf : Commun. Pure Appl. Math. 3 201 (1950).
- 3) J. D. Cole : Quart. Appl. Math. 9 225 (1951).
- 4) 細川 叡, 山本 稀義 : 数理解析研究所講究録 80 45 (1970).
- 5) I. Hosokawa and K. Yamamoto : Phys. Fluids 13 1683 (1970).



第1図 乱れのエネルギー分布(線型理論)

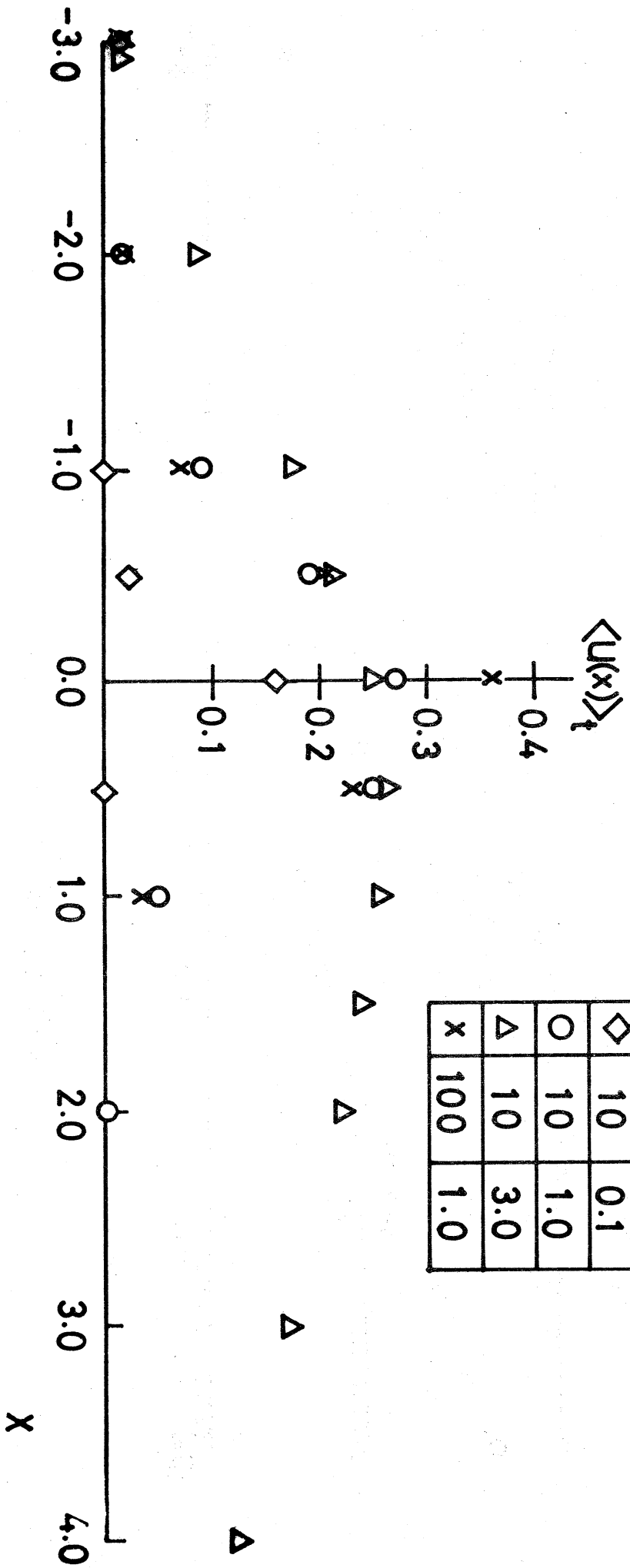


第2図 乱れのエネルギー分布 (R=1)

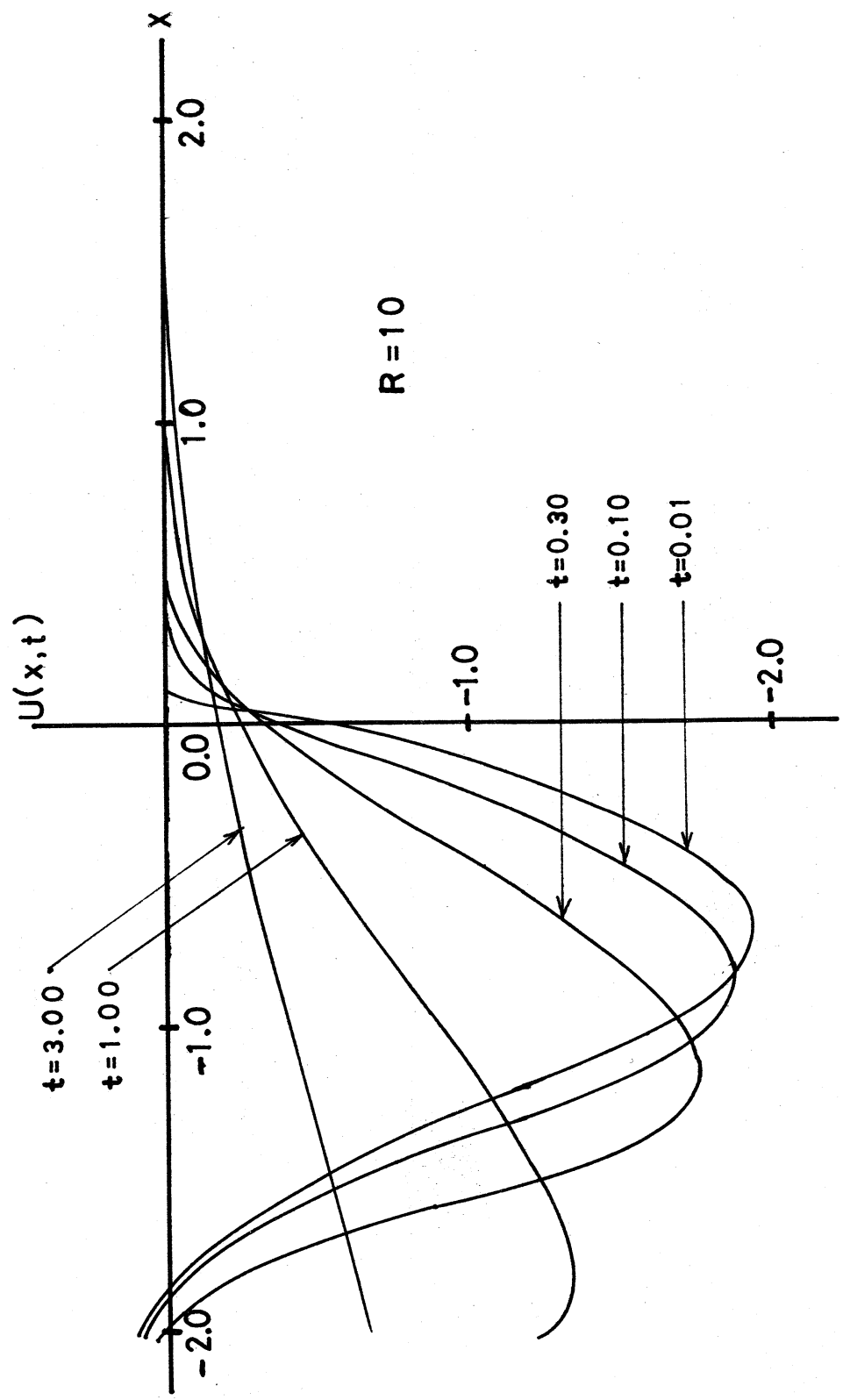


第3図 乱れのエネルギー分布

	R	t
◇	10	0.1
○	10	1.0
△	10	3.0
x	100	1.0

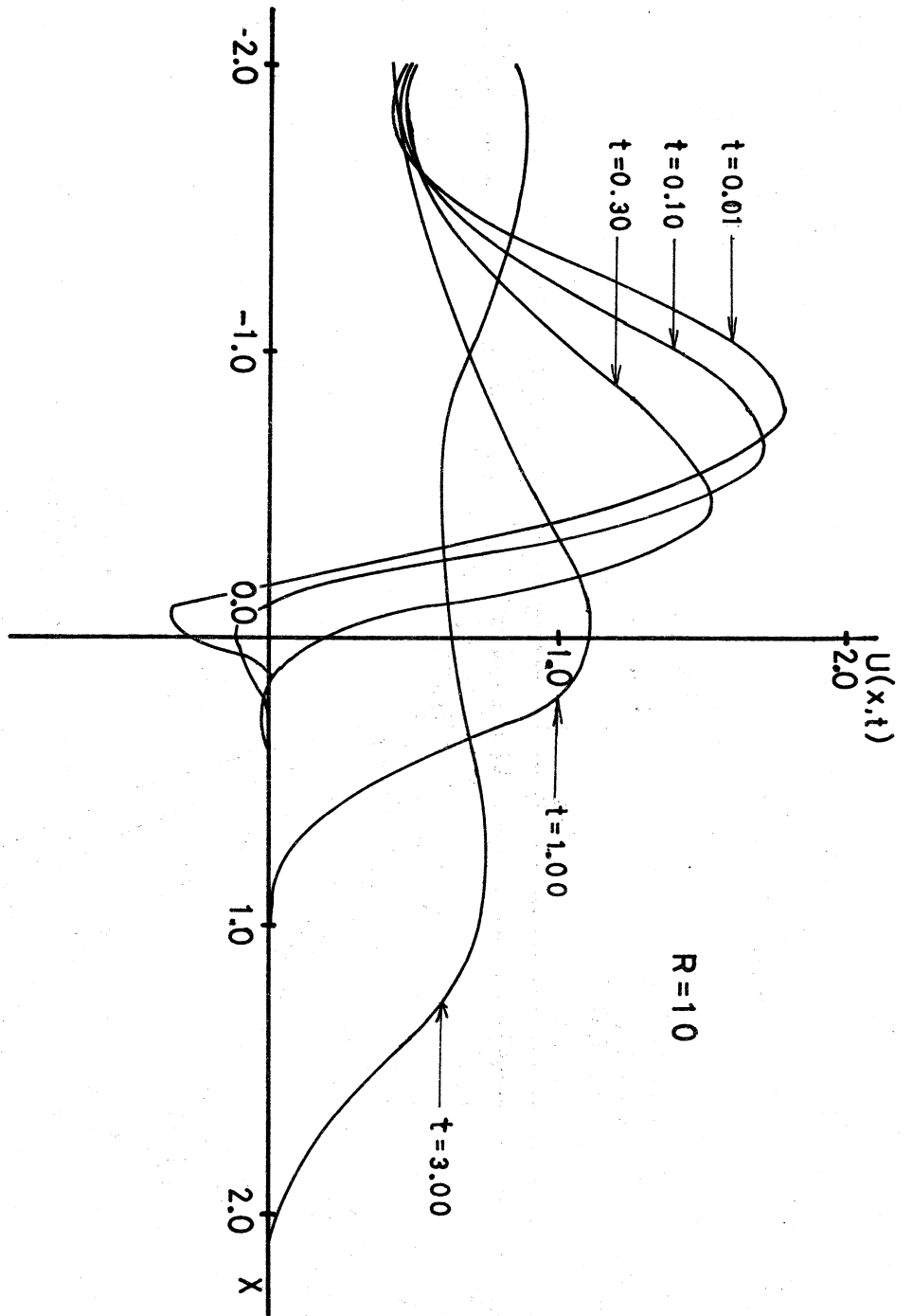


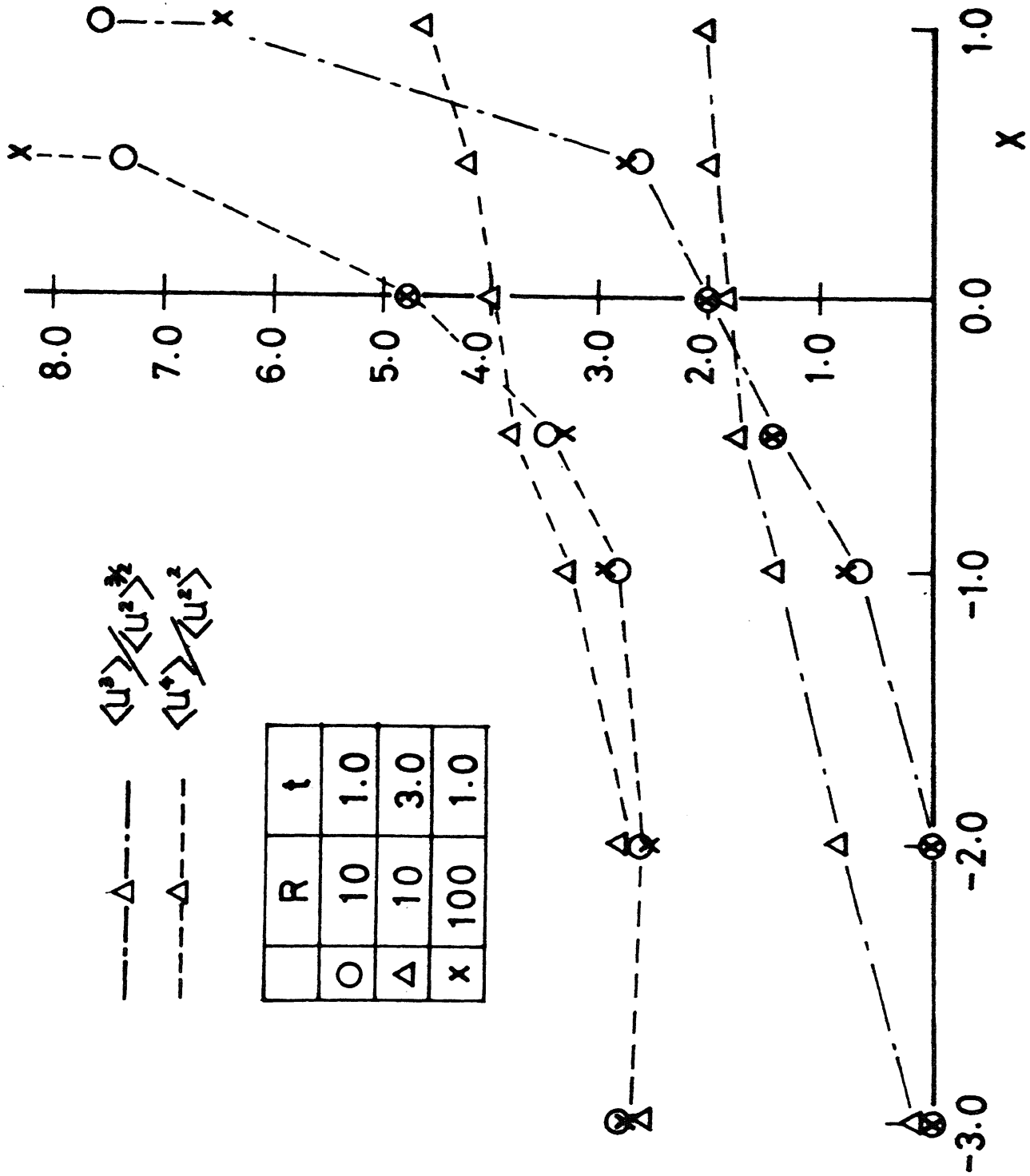
第4图 平均速度 $\langle U(x) \rangle_t$ の分布



第5圖 速度場の時間の経過

第6圖 速度場の時間の経過





第7図 Skewness Factor と Flatness Factor の計値値