数理解析研究所講究録
120巻 1971年 124-135

Hopf 方程式の相互作用表示

東大 工 物工 桑原真二

§1. まえがき

古典統計力学の方法を無限連続次元の力学系 Navier-Stokes の方程式に適用したのが、Hopfの統計流体力学である。

この論文では、N.-S. 方程式の代りに、その一次元簡単化のBurgersモデルの波数空間における方程式

$$\frac{\partial v(k,t)}{\partial t}+i\int k'v(k-k')v(k')dk'+\nu k^2 v(k)=0 \qquad (1.1)$$

にもとづいて議論する。

乱流状態は $v(k)$ ー空間の1点で表わされ、位相空間（関数空間） $v(k)$ に確率密度汎関数 $P[v(k)]$ を導入することによって統計的あつかいができる。Pの Fourier 変換 $\Phi[z(k)]=\int e^{i(z,v)}P[v(k)]\delta v$ すなわち特性汎関数に対して、いわゆる Hopfの方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\iint k z(k+k')\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z dk\, \partial z' dk'}dk\,dk'$$

$$+\bar{\nu}\int k^2 z \frac{\partial \Phi}{\partial z\, dk} dk = 0 \qquad (1.2)$$

が成立する。$z(k)$については

$$|k| \to \infty \text{ のとき、 } |z(k)| \to 0 \qquad (1.3)$$

の条件が課せられる。

エネルギー・スペクトルは

$$E(k,t)\delta(k+k') = i^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, dk\, \partial z'\, dk'} \right)_{z=0} \qquad (1.4)$$

によってもとめられる。

§2. 初期値問題としての定式化

Hopf 方程式(1.2)を満足する $\Phi[z(k)]$ は次のような副条件を満さなければならない:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\quad \Phi[0] = 1 & 2)\quad |\Phi[z]| \leq 1 \\ 3)\quad \Phi[-z] = \Phi[z]^* & \\ 4)\quad \Phi[e^{ika} z] = \Phi[z] \quad a:\text{任意(一様性)} & \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

初期値問題を考える場合にはΦの初期値として

$$\Phi[z,0] \equiv \hat{\Phi}[z] = e^{-\frac{1}{2}\int \hat{E}(k) z z^* dk} \qquad (2.2)$$

とおく。$\hat{E}(k) = E(k,0)$は初期のエネルギー・スペクトルである。初期値として(2.2)をとる必然性はないが、(2.1)

を満足する最も簡単な汎関数であり、更に(1.4)すなわち、

$$\hat{E}(k)\delta(k+k') = i^2\left(\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial z\,dk\,\partial z'\,dk'}\right)_{z=0} \qquad (2.3)$$

を満足していることがわかる。微分してわかるように、(2.2)の偶数次のエネルギー・伝達関数は一般に0とならない。

§3. 相互作用表示

相互作用表示では、独立変数($z(k)$, t)を新しい独立変数($\zeta(k)$, s)に変換する:

$$\zeta(k) = z(k)e^{-\nu k^2 t}, \qquad s = t \qquad (3.1)$$

(1.2)はこの新変数によって

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial t} + A[\zeta(k), t]\Phi = 0 \\ &A[\zeta, t] = -\iint dk\,dk'\,k\,\zeta(k+k')e^{2\nu kk't}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,dk\,\partial\zeta'\,dk'} \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

とかきあらためられる。ここでsはtとかきなおしてある。エネルギー・スペクトルは(1.4)を変形して

$$E(k,t)\delta(k+k') = i^2 e^{-\nu(k^2+k'^2)t}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\,dk\,\partial\zeta'\,dk'}\right)_{\zeta=0} \qquad (3.3)$$

によってもとまる。

§4. 時間による展開

Φが時間について解析的であると仮定し、tの中で展開する。

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l \Phi_l \tag{4.1}$$

(4.1)を(3.2)に代入してΦ_lの漸化式

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{m+1}[\zeta] &= \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} (2\bar{\nu})^{m-l} \iint k_2^{m-l} k_1^{m-l+1} \\ &\qquad \mathcal{D}_{21} \Phi_m \, dk_2 \, dk_1 \, , \\ \mathcal{D}_{21} &= \zeta(k_2+k_1) D_2 D_1 \quad , \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial \zeta_1 dk_2} \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

をうる。

汎関数微分(Volterra's derivative)は$F = F[z(k)]$ならば、zの増分$\delta z(k)$に対してFの増分δFが

$$\delta F = \int A(k) \delta z(k) dk + O(\delta z^2) \qquad \delta z : 任意 \tag{4.3}$$

で表わされるとき

$$A(k) \equiv \frac{\partial F}{\partial z(k) dk} \tag{4.4}$$

によって定義される。

今$F = z(k)$、すなわち

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} z(k') \delta(k-k') dk' \tag{4.5}$$

と考えると

$$\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \delta z(k') \delta(k-k') dk' + O(\delta z^2) \qquad (4.6)$$

であるから、(4.3)，(4.4) より

$$\frac{\partial z(k)}{\partial z(k') dk'} = \delta(k-k') \qquad (4.7)$$

がえられる。 それ故、多項式汎関数

$$F[z] = \int K(k_1, \cdots, k_\ell) z(k_1) \cdots z(k_\ell) dk_1 \cdots dk_\ell \qquad (4.8)$$

の汎関数微分は

$$\frac{\partial F}{\partial z\, dk} = \int \{ K(k, k_1, \cdots, k_{\ell-1}) + K(k_1, k, k_2, \cdots, k_\ell) + \cdots$$

$$\cdots + K(k_1, \cdots, k_{\ell-1}, k) \} z(k_1) \cdots z(k_{\ell-1}) dk_1 \cdots dk_{\ell-1} \qquad (4.9)$$

となる。

(4.2) によって Φ_ℓ を逐次に計算するためには、(4.9) の形の微分演算だけが現われる。 (2.2) の Φ の初期値に対して、

$$E(k,t) = e^{-2\bar{\nu} k^2 t} [\hat{E} - \frac{1}{2} k^2 t^2 (2\hat{E} - \hat{E} * \hat{E})$$

$$+ \frac{1}{4} (2\bar{\nu}) k^2 t^3 \{ 4C_1 \hat{E} + k^2 (\hat{E} * \hat{E}) - 2(k^2 \hat{E}) * \hat{E} \}$$

$$- \frac{1}{4!} t^4 \{ 2(6(2\bar{\nu})^2 C_2 - 8 C_0 C_1 + ((2\bar{\nu})^2 C_1$$

$$-6C_1^2)k^2)k^2\hat{E}-(\frac{7}{2}(2\bar{\nu})^2k^2-4C_1-14C_0k^2)k^2$$

$$\hat{E}*\hat{E}+2(7(2\bar{\nu})^2-2C_0)k^2(k^2\hat{E})*\hat{E}$$

$$-7(2\bar{\nu})^2(k^4\hat{E})*\hat{E}-4k^4(\hat{E}*\hat{E})*\hat{E}\}] \qquad (4.10)$$

$$=\hat{E}-2\bar{\nu}k^2t\hat{E}+\frac{1}{2}k^2t^2\{(2\bar{\nu})^2k^2\hat{E}-2\hat{E}+\hat{E}*\hat{E}\}$$

$$-\frac{1}{3!}(2\bar{\nu})k^2t^3\{(2\bar{\nu})^2k^4\hat{E}-6(C_1+k^2)\hat{E}$$

$$+\frac{3}{2}k^2\hat{E}*\hat{E}+3(k^2\hat{E})*\hat{E}\}$$

$$+\frac{1}{4!}t^4[\{(2\bar{\nu})^4k^6-(2\bar{\nu})^2(12C_2+26C_1k^2$$

$$+12k^4)+4C_0(4C_1+3C_0k^2)k^2\}k^2\hat{E}$$

$$+\{\frac{7}{2}(2\bar{\nu})^2k^2-4C_1-14C_0k^2\}k^2\hat{E}*\hat{E}$$

$$-2\{(2\bar{\nu})^2(7-6k^2)-2C_0\}k^2(k^2\hat{E})*\hat{E}$$

$$+7(2\bar{\nu})^2(k^4\hat{E})*\hat{E}+4k^4(\hat{E}*\hat{E})*\hat{E} \qquad (4.11)$$

がえられる。(4.11)は(4.10)の $e^{-2\bar{\nu}k^2t}$ を展開したものであり、他の方法でやったものと一致する。ここで$*$は合成積(convolution)をあらわし、又

$$C_l=\int_{-\infty}^{\infty}k^{2l}\hat{E}(k)dk \qquad (4.12)$$

である。

特に二重δ関数形初期エネルギー・スペクトル

$$\hat{E}(k)=\frac{1}{2}\{\delta(k+1)+\delta(k-1)\} \qquad (4.13)$$

に対しては、

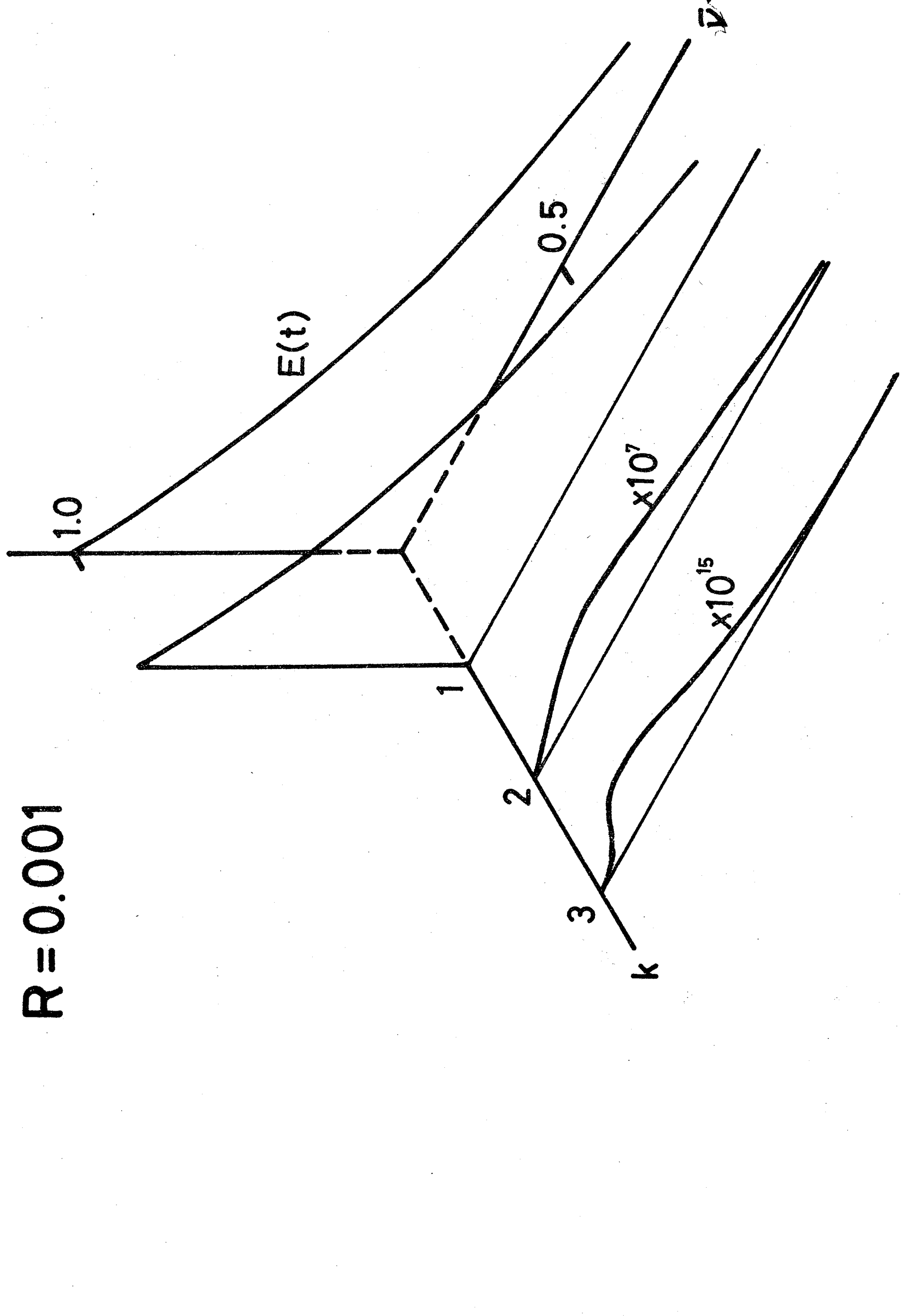
$$E(k,t)=\hat{E}(1)e^{-2\bar{\nu}t}-t^2(\hat{E}(1)e^{-2\bar{\nu}t}+\hat{E}(2)e^{-8\bar{\nu}t})$$
$$+2\bar{\nu}t^3(\hat{E}(1)e^{-2\bar{\nu}t}+\hat{E}(2)e^{-8\bar{\nu}t})$$
$$-\frac{1}{4!}t^4\{(14(2\bar{\nu})^2-31)\hat{E}(1)e^{-2\bar{\nu}t}$$
$$-\frac{7}{2}((2\bar{\nu})^2-32)\hat{E}(2)e^{-8\bar{\nu}t}-81\hat{E}(3)e^{-18\bar{\nu}t}\} \quad (4.14)$$

$$=\hat{E}(1)-2\bar{\nu}t\hat{E}(1)+\frac{1}{2!}t^2\{(2\bar{\nu})^2\hat{E}(1)-2\hat{E}(2)$$
$$+2\hat{E}(2)\}-\frac{1}{3!}(2\bar{\nu})t^3\{(2\bar{\nu})^2\hat{E}(1)-12\hat{E}(1)$$
$$+18\hat{E}(2)\}+\frac{1}{4!}t^4[\{(2\bar{\nu})^4-50(2\bar{\nu})^2+31\}\hat{E}(1)$$
$$+\frac{1}{2}\{391(2\bar{\nu})^2-224)\hat{E}(2)+81\hat{E}(3)] \quad (4.15)$$

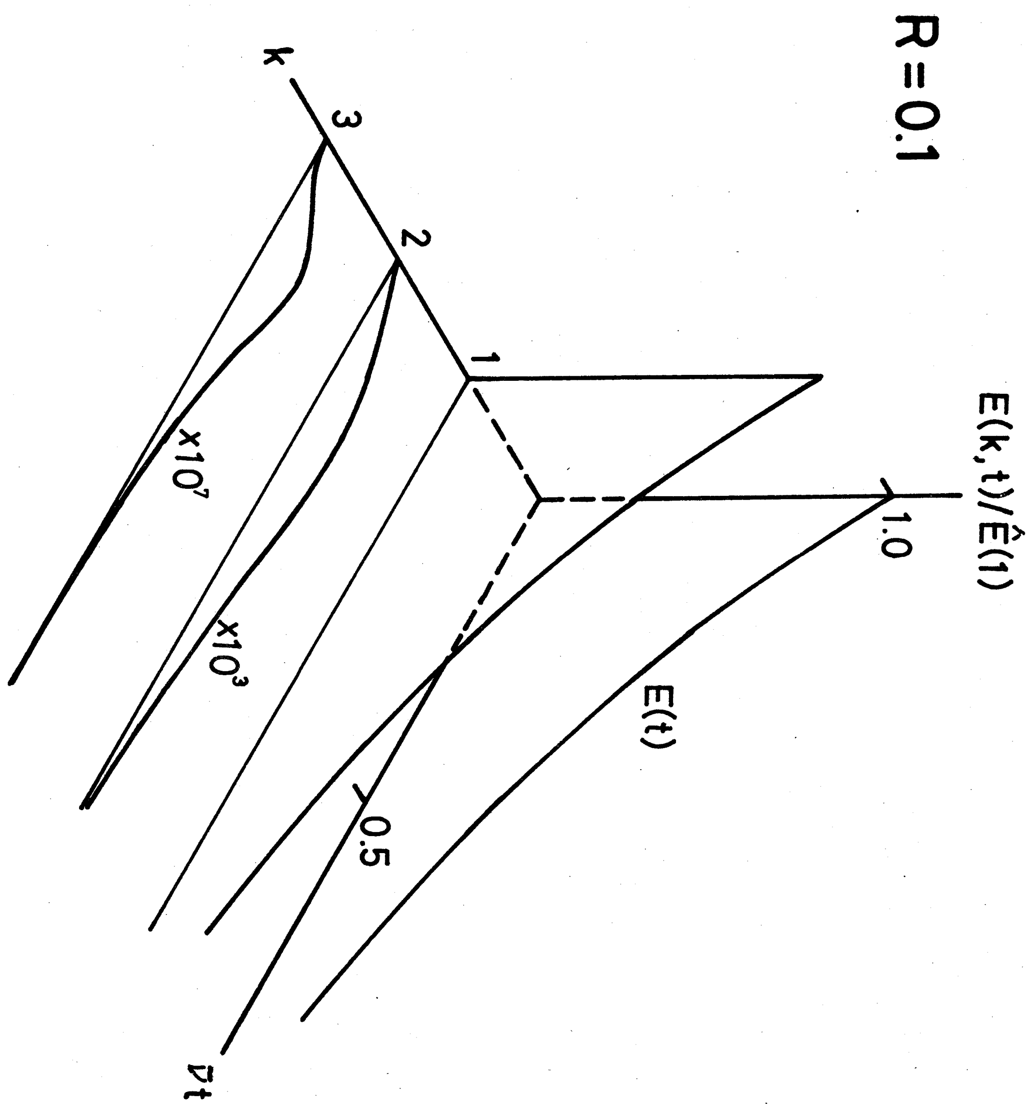
がえられる。 ここで

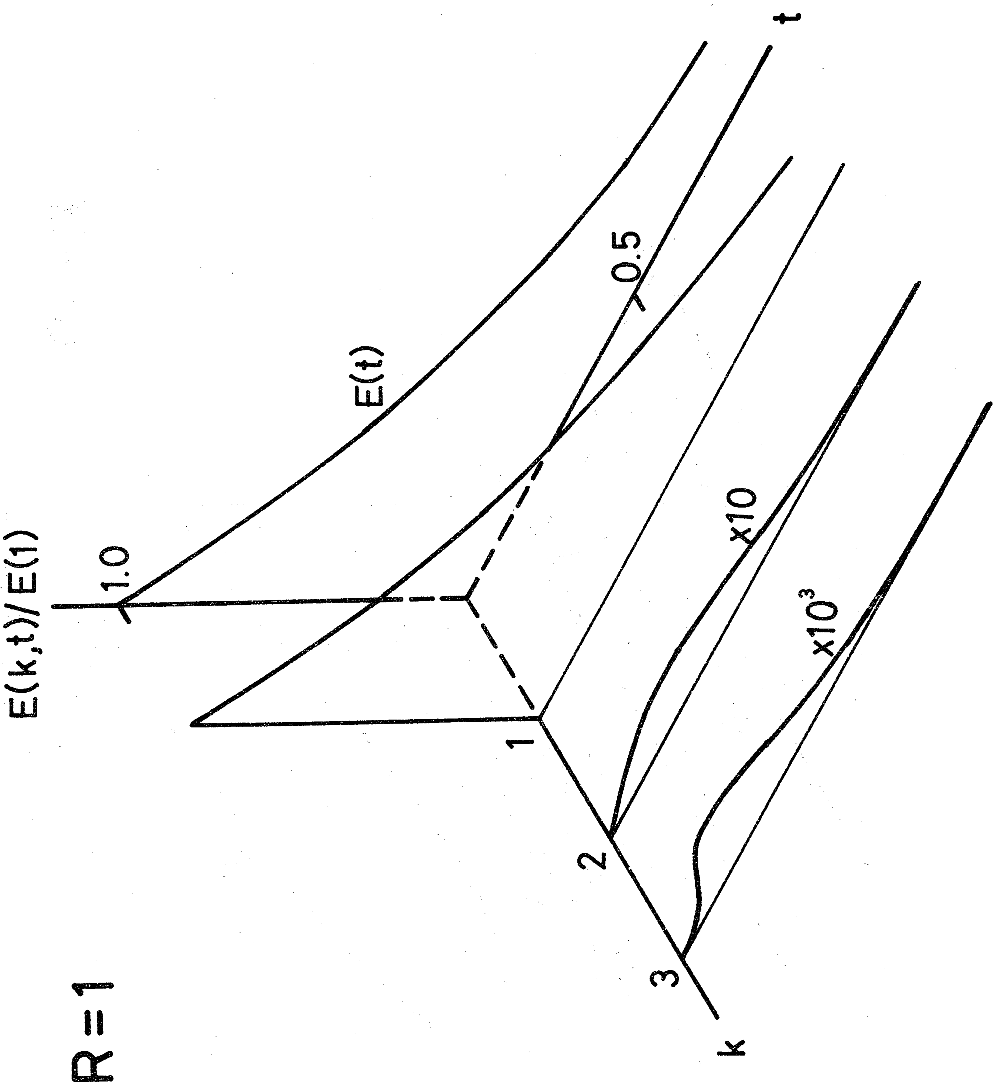
$$\hat{E}(l)=\frac{1}{2}\{\delta(k+l)+\delta(k-l)\} \quad (4.16)$$

である。 (4.14) によって計算された結果がいろいろの $R=\bar{\nu}^{-1}$ について図に示されている。 図中の $E(t)$ は全エネルギーである。

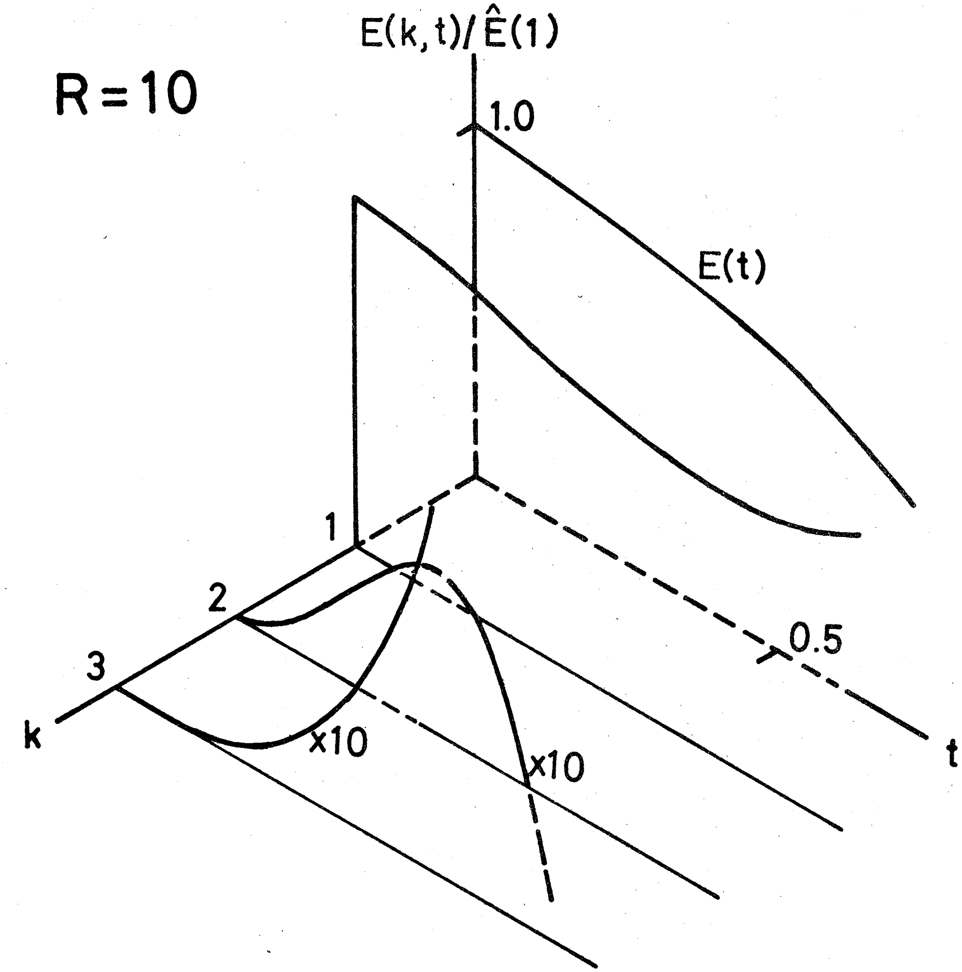


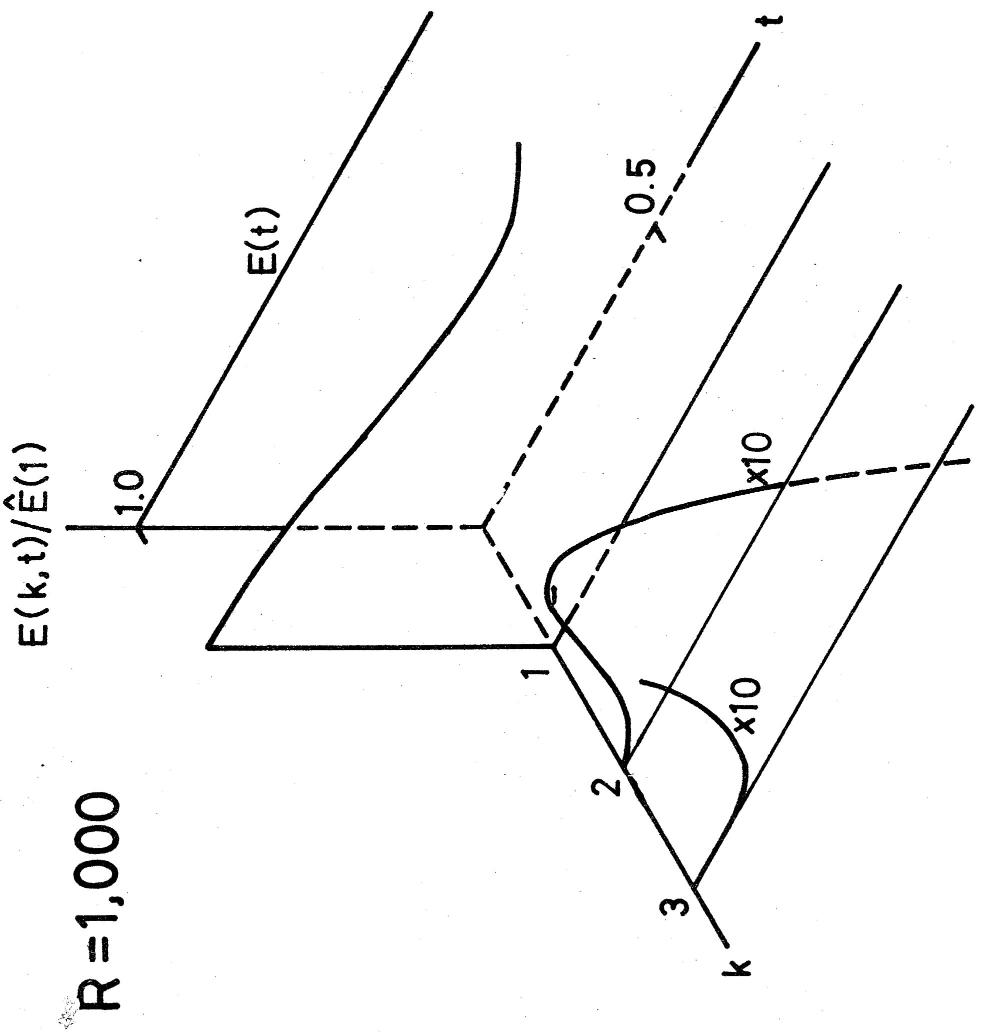
8


R=0.1
E(k,t)/Ê(1)
k
3
2
1
1.0
0.5
E(t)
x10^7
x10^3
νt


E(k,t)/E(1)
1.0
E(t)
0.5
t
1
2
3
k
x10
x10³
R=1

R = 10




R = 1,000
E(k,t)/Ê(1)
1.0
E(t)
0.5
t
x10
x10
1
2
3
k