数理解析研究所講究録
121巻 1971年 83-100



# On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations

立命大 理工　　中岡　明

## §1. 序

退化した楕円型方程式に対する境界値問題は、数多くの研究がなされているが、その一つの特徴的な困難さは、退化していない場合と比較して、統一的なとり扱いができないことである。例えば、次の二つの方程式を $\mathbb{R}^1_+$ で考えよう。

(1.1)　$-\rho(x)u'' + u = f(x)$

(1.2)　$-(\rho(x)u')' + u = f(x)$

ここで、$\rho(x)$ は非負で有界、そして $x=0$ のみで $\rho(x)=0$ となるものとする。もしも、$f(x)$ を $L^2(\mathbb{R}^1_+)$ とし、解を $L^2(\mathbb{R}^1_+)$ の subspace で求めるとすると、(1.2) に対しては、$u(x)$ 及び $\sqrt{\rho(x)}\,u'(x)$ が $L^2(\mathbb{R}^1_+)$ に属するようなものを求めるのが"自然"であろう。そしてこの時、結果として $(\rho(x)u')' \in L^2(\mathbb{R}^1_+)$ となる。さて、$\rho(x)$ を $x=0$ の近傍で $\sqrt{x}$ に等しい関数とし、$u(x)$ も $x=0$ の近傍で $\sqrt{x}$ に等しく、かつその support が有界な関数とすると

明かに，$u(x)$, $\sqrt{p(x)}u'(x)$, そして $(p(x)u')'$ は $L^2(R^1_+)$ に属するが，$p(x)u''(x)$ は $x=0$ の近傍で $x^{-1}$ であるから，$L^2(R^1_+)$ には属さない。このことは，(1.1) と (1.2) とを同じ関数空間でとり扱うことは適当でないことを suggest している。従って，退化した方程式を考える場合には，その方程式にうまく attach した関数空間を選ぶ必要があろう。

さて，$\Omega$ を $R^n$ の中の half-space 又は smooth な compact hypersurface で囲まれた領域としよう。我々は主として，$\Omega$ で定義された次のような2階の微分作用素 $A(x,D)$ を考える。即ち $A(x,D)$ は，おのおの十分小なる boundary patch において

(1.3)　$A(x,D) = -\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x)\,\partial_j\partial_k$ + first order operator,

と表わされるものとする。ただし，ここで

(1.4)　$$\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x)\,\xi_j\bar{\xi}_k \geqq c\,|\xi|^2 \qquad \xi=(\xi_0,\cdots,\xi_{n-1})\in C^n$$

$$(c>0,\quad \tilde{a}_{jk}=\overline{\tilde{a}_{kj}})$$

であり，　$\partial_0 = p(r)\dfrac{\partial^{(*)}}{\partial\nu}$,　$\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial\tau_j}$　$(j=1,2,\cdots,n-1)$

である。又，$r=r(x)$ は，$x\in\Omega$ から，$\Omega$ の境界 $\Gamma$ への距離である。$p$ については，§2 で詳しく述べる。

(*) $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ と $\dfrac{\partial}{\partial\tau_j}$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ は次のようにして定義する。$^\forall x_0\in\Gamma$ に対して，$x_0$ を原点として，$\Gamma$ 上に一つの curvi-linear coordinate system $\sigma(\Gamma)$ を考える。ここで，$x_0$ の

十分小さい近傍 $V(x_0)$ を考えると，$\forall x \in V(x_0)$ に対して，唯一つの点 $y$ が $\Gamma$ 上に存在して，$\overrightarrow{yx}$ が，$y$ における normal vector に一致する。次に $\Gamma_r = \{x \in V(x_0)\,;\ \cancel{\mathrm{dis}(x,\Gamma)}\ |\overrightarrow{yx}| \leq r\}$ とおき，$\Gamma_r$ には，$\Gamma = \Gamma_0$ の coordinate system $\sigma(\Gamma)$ によって induce された coordinate system $\sigma(\Gamma_r)$ が定義されているものとする。ここで，local coordinate $(\nu, \tau_1 \cdots \tau_{n-1})$ を $x \in V(x_0) \cap \Gamma_r$ $(r \geq 0)$ に対して次のように定める。

$$(1.5)\quad \begin{cases} \nu = |\overrightarrow{yx}| \\ \tau_j = \text{the } j\text{-th coordinate of } x \text{ through } \sigma(\Gamma_r). \end{cases}$$

従って $x = (x_1, \cdots, x_n)$ として

$$(1.6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \nu} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial x_k}{\partial \nu} \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \tau_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial x_k}{\partial \tau_j} \dfrac{\partial}{\partial x_k}, \qquad (j = 1, 2, \cdots, n-1) \end{cases}$$

である。

我々は，ここで，ある weight をもった Sobolev space において，Dirichlet problem に対する解の存在及び，その時の lower order terms について考察する。

§2. Half-space $\mathbb{R}^n_+$ における weighted Sobolev spaces.

我々が問題を扱う空間を設定するには，まず $\mathbb{R}^n_+$ における

それから考えた方が便利である。そこで，$\mathbb{R}^n_+$ における weighted Sobolev spaces を導入しよう。

$\rho(x)$ を次のような real-valued function としよう。

i) $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^1_+})$

ii) $0 \leqq \rho(x) \leqq M$ で $\rho(x)$ は $x=0$ のみで $0$ になる。

iii) $c_1 x^\alpha \leqq \rho(x) \leqq c_2 x^\alpha$ かつ $|\rho^{(m)}(x)| \leqq c_m x^{\alpha-m}$ $(m=1, 2, \cdots)$ が $x=0$ の近傍で成りたつ。 $(0<\alpha<1)$

iv) $0 < \gamma \leqq \rho(x)$ かつ $|\rho^{(m)}(x)| \leqq K_m$ $(m=1, 2, \cdots)$ が $x \to \infty$ のとき成りたつ。

さて，$\rho(x)$ を $x<0$ に対しては，$\rho(-x)$ で拡張し，その拡張された関数を $\tilde{\rho}(x)$ であらわす。又，$\phi(x)$ 及び $\tilde{\phi}(x)$ を次の式によって定義する。

$$(2,1) \qquad \phi(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\rho(\xi)}$$

$$(2,2) \qquad \tilde{\phi}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\tilde{\rho}(\xi)}.$$

定義 2.1. $\mathbb{R}^n_+ = \{(x, y);\ x>0,\ y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ 上の distribution $u(x, y)$ が $W^m(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ に属しているとは

$$(2,3) \qquad \|u\|^2_{m,\phi} = \sum_{j+|k| \leqq m} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D_\rho^j D_y^k u|^2 \, d\phi \, dy$$

が有限の場合を云う。ただし，$D_\rho = -i\rho(x)\frac{\partial}{\partial x}$ であり

$D_y^k = (-i)^{|k|}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\right)^{k_{n-1}}$ であり，$m$ は非負整数である。

定義 2.2. $\mathbb{R}^n$ 上の distribution $u(x,y)$ が $W^m(\mathbb{R}^n,\tilde{\phi})$ に属しているとは，

$$(2,4)\quad \|u\|_{m,\tilde{\phi}}^2 = \sum_{j+|k|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u|^2 d\tilde{\phi}\, dy$$

が有限の場合を云う。ただし，$D_{\tilde{\rho}} = -i\tilde{\rho}(x)\frac{\partial}{\partial x}$ である。

明らかに，$W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ 及び $W^m(\mathbb{R}^n,\tilde{\phi})$ はノルム (2,3) 及び (2,4) によって Hilbert spaces を作る。又，自然な制限によって $W^m(\mathbb{R}^n,\tilde{\phi}) \subset W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ である。

$W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ については，通常の Sobolev space と同様の性質を示すことができる。即ち

命題 2.1 $u(x,y)\in W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ とすると，$D_\rho^j D_y^k u$ $(j+|k|\leq m)$ の trace $D_\rho^j D_y^k u(0,y) = \lim_{x\downarrow 0} D_\rho^j D_y^k u(x,y)$ が $H^{m-j-|k|-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ の中に存在して

$$(2,5)\quad |D_\rho^j D_y^k u(0,\cdot)|_{m-j-|k|-1/2} \leq \text{const}\,\|u\|_{m,\phi}$$

$$(2,6)\quad |D_\rho^j D_y^k u(0,\cdot)|_s \leq \text{const}\,(\varepsilon\|u\|_{m,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi})$$

$$(s < m-j-|k|-1/2,\quad \forall\varepsilon>0)$$

がなりたつ。

命題 2.2. 1) $u(x,y)$ と $D_\rho^m u(x,y)$ が $W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ に属しているとすると，$D_\rho^k u(x,y)$ $(1 \leqq k \leqq m-1)$ も $W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ に属しており

$$(2.7) \quad \| D_\rho^k u \|_{0,\phi} \leqq C(k,m)\left(\varepsilon \| D_\rho^m u\|_{0,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}\right)$$

が $\forall \varepsilon > 0$ に対してなりたつ。

2) もしも，$D_y^k u$ $(|k| \leqq m)$ と $D_\rho^m u$ とが $W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ に属しているとすると，$u \in W^m(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ であり，$\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(2.8) \quad \sum_{j+|k|<m} \| D_\rho^j D_y^k u \|_{0,\phi} \leqq \varepsilon \sum_{j+|k|=m} \| D_\rho^j D_y^k u\|_{0,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}$$

がなりたつ。

次の補題は低階の項を扱うのに重要である。

補題 2.1. $u(x,y) \in W^2(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ で $\alpha < 1/3$ とする。このとき，$\frac{\partial u}{\partial x} \in W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ であり $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(2.9) \quad \| \partial u / \partial x \|_{0,\phi} \leqq \varepsilon \|u\|_{2,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}$$

がなりたつ。

Remark もしも $\alpha \geqq 1/3$ とすると，$\partial u/\partial x \notin W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ となるような $u(x,y) \in W^2(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ がある。例えば，$x=0$ の近傍で，$\phi(x)g(y)$ $(g(y) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ に等しいような関数を考えればよい。

定義 2,3. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ の $W^m(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ での completion を $W^m_0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ で表わす。

次の命題は，命題 2,1. より明かである。

命題 2,3. $u(x, y) \in W^m_0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ とする。このとき，$D_\rho^j D_y^k u$ $(j+|k| \leq m-1)$ の trace は全て $0$ である。

さて，$D_\rho$ は $W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ の内積に関して，formally self-adjoint であるが，$-i\frac{\partial}{\partial x}$ のそれは

(2,10) $\quad -i\frac{\partial}{\partial x} + (-i)\rho'\rho^{-1}$

で与えられる。そして $\rho'\rho^{-1}$ は $x=0$ の近傍で $x^{-1}$ の order である。次の補題がなりたつ。

補題 2,2. もしも $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}^n_+, \phi) \cap W^1_0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ で $\alpha < 1/3$ ならば，$u/x \in W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ であり，$\forall \varepsilon$ に対して

(2,11) $\quad \| u/x \|_{0,\phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}$

がなりたつ。更に，$\alpha \geq 1/3$ なら $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}^n_+, \phi) \cap W^1_0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ で $u/x \notin W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ なるものがある。

補題 2,3. $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}^n_+, \phi) \cap W^1_0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ とする。もしも，$\beta < 1-\alpha$ ならば，$x^{-\beta}\frac{\partial u}{\partial y_j}$ $(j=1, 2, \cdots, n-1) \in W^0(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ であり，$\forall \varepsilon > 0$ に対して

(2, 12) $\quad \| x^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial y_j} \|_{0,\phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2,\phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,\phi}$

がなりたつ。

最後に，一つの関数の族を導入する。

定義 2.4. $a(x,y) \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ であるとは，$D_\rho^j D_y^k a(x,y)$ $(j+|k| \leq m)$ がすべて連続で有界である時をいう。

Remark. $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ は十分に沢山の要素をもっている。実際 $\alpha(x,y) \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+)$ とすれば，$\alpha(\phi(x), y) \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+)$ であるし，$\varphi(x,y) + const \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ $(\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+))$ である。

## §3. 一般の領域 $\Omega$ における weighted Sobolev spaces.

$\Omega$ を $\mathbb{R}^n$ の中の領域とし，その境界は smooth で compact な hypersurface とする。まず，次の定義から始めよう。

定義 3.1. $\omega$ を $\Omega$ の境界の点の十分小さい closed neighbourhood とし，$\omega$ では，$\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\tau$ が定義されているものとする。$\omega$ 上の関数 $a(x)$ が $\mathcal{B}^m(\omega, \rho)$ に属しているとは，$\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^k a(x)$ $(j+|k| \leq m)$ が全て有界連続である場合を云う。

Remark. $a(x) \in \mathcal{B}^m(\omega, \rho)$ は，例えば，次のようにして作ら

れる。$\alpha(\nu,\tau)\in \mathcal{B}^m(R^n_+,\phi)$ とし、その support は十分小さいとする。$a(x)=\alpha\circ\theta^{-1}(\nu,\tau)$ とおくと $a(x)\in\mathcal{B}^m(\omega,\rho)$ である。ただし $\theta^{-1}$ は、(1.5) で定義された $\theta;\, x\longrightarrow(\nu,\tau)$ の逆変換である。

さて、$\overline{\Omega}$ の finite covering $\{\omega_p\}$ で、次のようなものをとろう。

1) $\Omega$ の境界 $\Gamma$ に contact ~~...~~ する covering neighborhood（それを $\omega^*_\lambda$ で表わす）については、十分小なる $\varepsilon>0$ に対して

$$\bigcup_\lambda \omega^*_\lambda \supset \overline{\Omega}_\varepsilon$$

2) inner coverings（それを $\tilde{\omega}_\mu$ で表わす）については、

$$\bigcup_\mu \tilde{\omega}_\mu \subset \complement\Omega_{\varepsilon/2}$$

ただし、$\Omega_\gamma=\{x\in\overline{\Omega};\ dis(x,\Gamma)<\gamma\}$ である。そして次のような $\overline{\Omega}$ 上の parition of unity $\{\varphi^*_\lambda\}\cup\{\tilde{\varphi}_\mu\}$ をとろう。

1) $\mathrm{supp.}\,\varphi^*_\lambda\subset\omega^*_\lambda$, $\mathrm{supp.}\,\tilde{\varphi}_\mu\subset\tilde{\omega}_\mu$,

ただし、各 $\omega^*_\lambda$ では $\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\tau$ が define されているとする。

2) $\sum\varphi^{*2}_\lambda+\sum\tilde{\varphi}^2_\mu=1$, $\varphi^*_\lambda\in\mathcal{B}^\infty(\overline{\omega}^*_\lambda,\rho)$, $\tilde{\varphi}_\mu\in C^\infty_0(\tilde{\omega}_\mu)$.

定義 3.2. $\Omega$ 上の distribution $u(x)$ が $W^m(\Omega,\rho)$ に属しているとは、

$$(3.1)\quad \|u\|^2_{m,\rho,\Omega}=\sum_{j+|k|\le m}\sum_\lambda\int_\Omega\left|\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k(\varphi^*_\lambda u)\right|^2\frac{dx}{\rho(r)}$$
$$+\sum_{|l|\le m}\sum_\mu\int_\Omega\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^l(\tilde{\varphi}_\mu u)\right|^2\frac{dx}{\rho(r)}$$

が有限の場合を云う。

Remark. (3.1)で与えられたノルムは，$\varepsilon$や単位の分解の選び方にdependするが，他の選び方をしても，同等のノルムを与えるので，$\|\cdot\|_{m,\rho,\Omega}$でもって，任意に固定された$W^m(\Omega,\rho)$のtopologyを表わすことにする。

又，$W_0^m(\Omega,\rho)$でもって$C_0^\infty(\Omega)$の$W^m(\Omega,\rho)$でのcomp-letionを表わすことにする。明らかに，$W^m(\Omega,\rho)$及び$W_0^m(\Omega,\rho)$は，$\|\ \|_{m,\rho,\Omega}$によってHilbert spaceになる。

(1.5)で定義された変換を考えることによって，次の命題や補題が得られる。

命題 3.1. $\forall u(x)\in W^m(\Omega,\rho)$に対して$D^\beta u(x)$ $(|\beta|<m)$は$\Gamma$へのtrace $\gamma D^\beta u\in H^{m-|\beta|-1/2}(\Gamma)$をもち

$$(3.2)\quad |\gamma D^\beta u|_{m-|\beta|-1/2,\Gamma}\leq \mathrm{const}\ \|u\|_{m,\rho,\Omega}$$

$$(3.3)\quad |\gamma D^\beta u|_{s,\Gamma}\leq \varepsilon\|u\|_{m,\rho,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|_{0,\rho,\Omega}$$

$$(s<m-|\beta|-1/2,\quad \forall\varepsilon>0)$$

がなりたつ。

補題 3.1. $u(x)\in W^2(\Omega,\rho)$ $(\alpha<1/3)$とすると，$\partial u/\partial x_j\in W^0(\Omega,\rho)$ $(j=1,2,\cdots,n)$であり，$\forall\varepsilon>0$に対して

$$(3.4)\quad \|\partial u/\partial x_j\|_{0,\rho,\Omega}\leq \varepsilon\|u\|_{2,\rho,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|_{0,\rho,\Omega}$$

がなりたつ。

補題 3, 2, $u(x) \in W^2(\Omega, \rho) \cap W^1_0(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/3)$ とすると $u/r(x) \in W^0(\Omega, \rho)$ であり, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(3,5) \quad \| u/r \|_{0,\rho,\Omega} \leqq \varepsilon \| u \|_{2,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \| u \|_{0,\rho,\Omega}$$

がなりたつ。

補題 3, 3, $u(x) \in W^2(\Omega, \rho) \cap W^1_0(\Omega, \rho)$ とする。各 $\omega^*_\lambda$ に対して, $\beta < 1 - \alpha$ のとき $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(3,6) \quad \int_{\omega^*_\lambda \cap \Omega} \left| r^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^2 \frac{dx}{\rho(r)} \leqq \varepsilon \| u \|_{2,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \| u \|_{0,\rho,\Omega}$$

がなりたつ。

§4 Dirichlet problems. さて, 次の方程式を考えよう。

$$(4,1) \begin{cases} Au \equiv -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u \\ \qquad = f(x) \in W^0(\Omega, \rho) \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ここで, $A$ は, 各 $\omega^*_\lambda$ において, 次のように表わされるとする。

$$(4,2) \quad A = -\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \partial_j \partial_k + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j(x) \partial_j + \tilde{c}_0(x) \frac{\partial}{\partial \nu} + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{c}_j(x) r^{-\beta} \partial_j + \tilde{d}_0(x) \frac{1}{r} + d(x)$$

ただし $\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \xi_j \bar{\xi}_k \geqq c|\xi|^2$, $(\beta < 1 - \alpha)$ $(\tilde{a}_{jk} = \overline{\tilde{a}_{kj}})$ であり, 各係数については, $\tilde{a}_{jk} \in \mathcal{B}^3(\omega^*_\lambda, \rho)$, $\tilde{b}_j(x), \tilde{c}_j(x) \in \mathcal{B}^1(\omega^*_\lambda, \rho)$

$(j=0,1,\cdots n-1)$ かつ $\tilde{d}_0(x),\ \tilde{d}(x) \in \mathcal{B}^0(\omega^*_\lambda, \rho)$ とする。

Dirichlet problem を扱うには，いわゆる Gårding の不等式が重要な働きをするが，そのために次の補題を準備する。

補題 4.1. $u(x) \in W^1_0(\Omega, \rho)$ とし，$\alpha < 1/2$ とする。この時 $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(4.3)\quad \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} u \right| \frac{dx}{\rho(r)} \leqq \varepsilon \|u\|^2_{1,\rho,\Omega} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$(4.4)\quad \int_\Omega \frac{|u|^2}{r} \frac{dx}{\rho(r)} \leqq \varepsilon \|u\|^2_{1,\rho,\Omega} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}$$

$$(4.5)\quad \int_{\omega^*_\lambda \cap \Omega} r^{-\beta} \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} u \right| \frac{dx}{\rho(r)} \leqq \varepsilon \|u\|^2_{1,\rho,\Omega} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega} \qquad (\beta < 1-\alpha)$$

がなりたつ。

補題 4.1 を使って，次の命題を示すことができる。

命題 4.1 (Gårding の不等式) 作用素 $A$ の principal part の係数は $C^1(\Omega)$，その他は $C^0(\Omega)$ に属しているものとする。更に (4.2) において，$\tilde{a}_{jk}(x) \in \mathcal{B}^1(\omega^*_\lambda, \rho)$，$\tilde{b}_j(x)$，$\tilde{c}_j(x)$，$\tilde{d}_0(x)$，$\tilde{d}(x) \in \mathcal{B}^0(\omega^*_\lambda, \rho)$ とする。このとき，$\forall u(x) \in W^1_0(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/2)$ に対して，正の定数 $C$ と $K$ があって

$$(4.6)\quad \mathrm{Re}\, \langle Au, \bar{u} \rangle_{\rho,\Omega} \geqq C\|u\|^2_{1,\rho,\Omega} - K\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}$$

がなりたつ。ここで，$\langle\ ,\ \rangle_{\rho,\Omega}$ は $W^0(\Omega,\rho)$ の内積より induce された $W^1_0(\Omega,\rho)' \times W^1_0(\Omega,\rho)$ 上の sesqui-linear form である。又，$\alpha \geqq 1/2$ とすると，(4-6) は一般になりたたない。

定義 4.1　$u(x) \in W^1_0(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/2)$ が全ての $v(x) \in W^1_0(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/2)$ に対して

$$(4.7) \quad \langle \overline{A^* v}, u \rangle_{\rho, \Omega} = \langle f, v \rangle_{\rho, \Omega}$$

をみたしているとき，$u(x)$ を (4.1) の weak solution という。ここで $A^*$ は $W^0(\Omega, \rho)$ の内積に関する formal adjoint である。

補題 4.2　$a_{jk}(x) \in \mathcal{B}^3(C\Omega_\delta)$, $b_j(x) \in \mathcal{B}^1(C\Omega_\delta)$ $c(x) \in \mathcal{B}^0(C\Omega_\delta)$ $(\delta > 0)$ とし，各 $\omega^*_\lambda$ に対して，$\tilde{a}_{jk}(x) \in \mathcal{B}^3(\omega^*_\lambda, \rho)$ $\tilde{b}_j(x)$, $\tilde{c}_j(x) \in \mathcal{B}^1(\omega^*_\lambda, \rho)$ かつ $\tilde{d}_0(x)$, $\tilde{d}(x) \in \mathcal{B}^0(\omega^*_\lambda, \rho)$ とすると，$A^*$ の係数は命題 4.1 の仮定をみたす。

以上をまとめると，Lax-Milgram の lemma によって次の定理を得る。

定理 4.1,　A の係数は，補題 4.2 の仮定をみたしているものとする。もし，$\alpha < 1/2$ ならば，$\forall f \in W^1_0(\Omega, \rho)'$ に対して，$\lambda > 0$ を十分大にとれば，

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

は unique な weak solution をもつ。

次に $f(x) \in W^0(\Omega, \rho)$ のとき，weak solution $u(x)$ は

$W^2(\Omega, \rho)$に属するか，という問題であるが，これは無条件ではなりたたない。実際補題3.1及び補題3.2からもわかるように$\alpha < 1/3$の場合には正しい。即ち次の定理がなりたつ。

定理4.2　もしも$f(x) \in W^0(\Omega, \rho)$であり，$\alpha < 1/3$ならば，(4,1)の weak solution $u(x)$は$W^2(\Omega, \rho)$に属する。

この定理の証明は，大体において，退化していない楕円型方程式の解に対する differentiability を示す手法と同じであるが，若干の注意を要する。詳しくは[4]参照。

次に，$f(x) \in W^s(\Omega, \rho)$ならば，解$u(x)$は$W^{s+2}(\Omega, \rho)$に属するか，という問題があるが，これも一般には否定される。

次に$\Omega$が有界領域の場合，Fredholm's alternative theorem がなりたつ。実際次の命題がなりたつからである。

命題4.2.　$\Omega$が有界のとき$W_0^1(\Omega, \rho)$の有界集合は$W^0(\Omega, \rho)$の precompact set を作る。

§5. 高階の方程式に対する Dirichlet problems.　高階の方程式に対する Dirichlet problem も2階の場合と analogous にとり扱うことができる。$A$を$\Omega$で定義された$2m$階の微分作用素として，$\Omega$の内部では楕円型とする。そして各 boundary patch で次のように表わされるものとする。

$$(5,1)\quad A=\sum_{|\mu|=2m}\tilde a_\mu(x)\partial^\mu + \text{lower order operator}.$$

ここで, $\partial=(\rho(r)\partial/\partial\nu,\ \partial/\partial\tau_1,\ \cdots,\ \partial/\partial\tau_{n-1})$ であり, 更に

$$(5,2)\quad (-1)^m\,\mathrm{Re}\sum_{|\mu|=2m}\tilde a_\mu(x)\xi^\mu \geqq c|\xi|^{2m}$$

を仮定する。

我々の方程式は

$$(5,3)\begin{cases} Au=f\in W^0(\Omega,\rho) \\ \left(\rho(r)\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^j u\Big|_\Gamma=0 \quad (j=0,1,\cdots,m-1 \end{cases}$$

である。

定義 5,1. $u(x)\in W_0^m(\Omega,\rho)$ は, すべての $v(x)\in W_0^m(\Omega,\rho)$ に対して,

$$(5,4)\quad \langle \overline{A^*v},u\rangle_{\rho,\Omega}=\langle f,v\rangle_{\rho,\Omega}$$

がなりたつとき, (5,3) の weak solution と云う。

補題 5,1. $B(x,D)$ を $(2m-1)$ 階の作用素とし, $\Gamma$の近傍$\omega$で, 次のように表わされるものとする。

$$(5,5)\quad B(x,D)=\sum_{j+|k|\leqq 2m-1}\tilde b_{j,(k)}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k +$$

$$+\sum_{i+j+l+|k|\leqq 2m-1}\tilde c_{i,j,(k),l}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j r^{-l+1+\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k$$

$$+\ \tilde d(x)\qquad (\beta<1-\alpha).$$

ただし, $\tilde b_{j,(k)}(x)\in\mathcal{B}^{3m-j-|k|-1}(\omega,\rho)$, $c_{i,j,(k),l}(x)\in\mathcal{B}^{2m-i-j-|k|-l}(\omega,\rho)$

そして $d(x)\in C^0(\omega)$ かつ $|d(x)|\leq K r^{-2m+1}$ とする。このとき、$\alpha<1/2m$ ならば、$\forall\varepsilon>0$ に対して

$$
(5,6)\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega |Bu\cdot u|\frac{dx}{\rho}\leq \varepsilon\|u\|^2_{m,\rho,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}\\ \displaystyle\int_\Omega |B^*u;u|\frac{dx}{\rho}\leq \varepsilon\|u\|^2_{m,\rho,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}\end{cases}
$$

がなりたつ。ここで $\alpha\geq 1/2m$ とすることは一般にできない。

命題 5,1 $\tilde a_\mu(x)\in\mathcal{B}^{3m}(\omega,\rho)$ とし，lower order term は補題 5,1 の条件をみたすものとし，又 $A$ の係数は（簡単のため）$C^{3m}(\Omega)$ に属しているものとする。このとき $\alpha<1/2m$ ならば，

$$
(5,7)\quad \mathrm{Re}\langle \overline{A^*u}, u\rangle_{\rho,\Omega}\geq C\|u\|^2_{m,\rho,\Omega}-K\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}
$$

が，すべて $u(x)\in W^m_0(\Omega,\rho)$ に対してなりたつ。

以上のことをまとめると，次の定理が得られる。

定理 5,1，$A(x,D)$ は 命題 5,1 の条件をみたしているものとする。このとき，$\alpha<1/2m$ で，$\lambda>0$ を十分大とすれば，任意の $f\in W^m_0(\Omega,\rho)'$ に対して

$$
\begin{cases}Au+\lambda u=f\\ u\in W^m_0(\Omega,\rho)\end{cases}
$$

の unique weak solution が存在する。

更に解の differentiability については，次の定理がなりたつ。

定理 5.2. 低階項 $B(x,D)$ は $\Gamma$ の近傍で

$$(5.8)\quad B(x,D)=\sum_{j+|k|\le 2m-1}\tilde{b}_{j,(k)}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{j}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}+$$

$$+\sum_{i+j+|k|+l\le m}\tilde{c}_{i,j,(k),l}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{i}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{j}r^{-l+1-\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}$$

$$+\tilde{d}(x)$$

と表わされるものとし，$|\tilde{d}(x)|\le K r^{-m}$ とする。このとき $\alpha<\frac{1}{2m+1}$ で $f(x)\in W^{0}(\Omega,\rho)$ ならば，weak solution $u(x)$ は $W^{2m}(\Omega,\rho)$ に属する。ここで，$\alpha\ge\frac{1}{2m+1}$ とは一般にできない。

$\Omega$ が有界の場合には，Fredholm の alternative theorem がなりたつ。

## References


[1] M. S. Baouendi : Sur une class d'operateurs elliptiques dégénérés. Thèse Paris 1966.

[2] S. Mizohata : Theory of Partial Differential Equations. Iwanami Tokyo 1965. (in Japanese)

[3] A. Nakaoka : Boundary value problems for some degenerate elliptic equations of second order with Dirichlet condition. Proc. Japan Acad. vol 46

1970, 248 − 252

[4] A. Nakaoka; On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations. Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 10, No 3, 1970 375 ~ 401

[5] L. Nirenberg: Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. vol 8 1955 648 − 674

[6] N. Shimakura: Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré, Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 9. No, 2, 1969 275 − 335