

Holomorphic Evolution Operator について

東大(理) 増田久弥

§1. はしがき

この話の目的は, holomorphic evolution operator (以下 H. E. O. と略記) に関する Kato-Tanabe の結果:

(1) Osaka Math. Journal, vol 14, 107-133

(2) Osaka Journal of Math., vol 4, 1-4

の逆を示すことである。最近, 私は, 拡散方程式

$$(3) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j,k} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_j a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x)u$$

$$(x \in \mathbb{R}^m, t > 0)$$

を, 例えば, 連続関数空間

$$C_0 \equiv \{u \mid u(x) \text{ は一様連続且 } |u(x)| \rightarrow 0 \text{ (} |x| \rightarrow \infty \text{)}\}$$

(位相は, maximum norm)

の中で積分する事に興味をもちました。ここで係数は,

次の条件をみたすとして、

(4) 係数は実数値

(5) $a_{j k}(\alpha)$ は、一様連続で、一様有界且

$$\sum a_{j k}(\alpha) \xi_j \xi_k \geq \delta |\xi|^2 \quad (\delta > 0, \alpha, \xi \in \mathbb{R}^m)$$

(6) $a_j(\alpha), a(\alpha)$ は、連続で、一様有界且

$$a(\alpha) \leq 0.$$

さて、この時

$$\mathcal{D}(A_p) = \{u \mid u \in C_0, u \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^m), Au \in C_0\}$$

$$A_p u = Au$$

$$(Au = \sum a_{j k}(\alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + au \text{ なる形式'的'な作用素})$$

と、 C_0 の中の作用素を定めると、

命題 1 $p > m$ に対し、

(i) A_p は、 p -~~独立~~な C_0 の中の作用素

(ii) $A (= A_p)$ は 解析的半群 T_t を生成し、 T_t は $\operatorname{Re} t > 0$ なる複素半平面全体に、 t に関し解析的に延長される。

係数が、 α に関する場合はどうでしょうか？ 係数が、 α に対し、上の (4) - (6) をみたす外に、 α に関し

(α につき $\|\cdot\|_2$ は一様に) Hölder 連続 と仮定すれば,

命題 2 各 t に対して, A と同様にして, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を定める存するば, $(A(t))$ は形式的に,

$$A(t)u = \sum_{j,k} a_{jk}(t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_j a_j(t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(t)u$$

と与えられる) $A(t)$ は C_0 の evolution operator $U(t, \mu)$ を生成する

$$(7) \quad U(t, r) = U(t, \mu) U(\mu, r) \quad (\mu < r < t)$$

$$(8) \quad U(t, t) = I \text{ (identity operator)}$$

(9) $U(t, \mu)$ は, $0 \leq \mu \leq t$ につき 強連続.

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t, \mu) = A(t) U(t, \mu) \quad (0 < \mu < t)$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} U(t, \mu)x = -U(t, \mu) A(\mu)x \quad (x \in D(A(\mu))).$$

ここで, $D(A(t))$ は, t につき 変化する ことに注意する必要があります。上の係数に関する条件のうち, t につき t につき (α につき一様に) 連続 のみで上の命題 2 が成るか, 示しはわかりませんでした。 t につき 解析的存するばどうでしょう? (1) 及び (2) の結果を適用して

$U(t, \mu)$ は実軸の近傍で, t と μ ($|\operatorname{arg}(t - \mu)| < \text{const.}$) \Rightarrow \pm 正則である —
 ことが示されます。このまじり $U(t, \mu)$ を H.F.O.
 と存づけます。

§2. 結果

定理 1. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Δ を $(0, \tau)$ の複素
 凸近傍. X を複素 Banach 空間. $\mathcal{S}_\delta = \{(A, t) \mid$
 $A, t \in \Delta, |\operatorname{arg}(t - A)| < \delta\}$.

$\{U(t, A)\}$ を, $(A, t) \in \mathcal{S}_\theta$ で定義された X
 の中の有界作用素の族 \bullet の条件をみたすとする。

$$(1-1) \quad U(t, A)U(A, r) = U(t, r)$$

$$U(t, t) = I$$

$$(r, A), (A, t) \in \mathcal{S}_\theta$$

$$(1-2) \quad \text{任意の } \varepsilon = \delta \text{ に対し,}$$

$$U(t, A) \text{ は } \mathcal{S}_{\theta, \varepsilon} \text{ 中一様有界で } \mathcal{S}_{\theta, \varepsilon}$$

$$\text{の中は, } \mu = t \text{ で連続}$$

$$(1-3) \quad U(t, A) \text{ は, } (A, t) \in \mathcal{S}_\theta \Rightarrow \pm \text{正則.}$$

この時,

$$D(A(t)) = \left\{ x \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(t+h, t) - I}{h} x = \text{存在} (=y) \right\}$$

$A(t)x = y$ ($\equiv \lim_{h \rightarrow 0} [\mathcal{U}(t+h, t) - I]x/h$)
と定めて,

(1-a) $A(t)$ は稠密に定義された閉作用素
任意のコンパクト集合 K (Δ 中) と任意の $\varepsilon > 0$
に対して, λ_0, M が存在して

(1-b)

$$\Sigma(\lambda_0; -\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon) (\equiv \Sigma) \subset \rho(A(t))$$

(t は K のある近傍中)

$$(1-c) \quad \|(z - A(t))^{-1}\| \leq M / |z| \quad \begin{matrix} t \in K \\ z \in \Sigma \end{matrix}$$

(1-d) $(z - A(t))^{-1}$ は, 各 z を固定した時に,
 $t \mapsto$ 正則 ($t \in K$).

が成立する。

この逆は, H. Komatsu (東大理学部院記要, '61) に
ほじさり, Kato-Tanabe は, (1) (2) の中で, 次
の如く与えた。

定理 2 (Kato-Tanabe) $\{A(t)\}$ を, 上の

(1-a) ~ (1-d) をみたす X の中の作用素の族とする。
この時 \mathcal{U}_0 上で定義された X の中の有界作用素の族
 $\{\mathcal{U}(t, s)\}$ で, (1-1) (1-2) (1-3) 及び

$$(1-4) \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t, A) = A(t) U(t, A) \\ (A, t) \in \Omega_0$$

$$(1-5) \quad \frac{\partial}{\partial A} U(t, A) \alpha = -U(t, A) A(A) \alpha \\ (A, t) \in \Omega_0, \alpha \in D(A(A))$$

をみたすものが存在する。

§3 定理1の証明

任意の $t^* \in \Delta$ を固定する。十分小正数 $\eta > 0$ をとると、次の如き $\delta > 0$ と $t_1, \dots, t_4 \in \Delta$ が存在する;

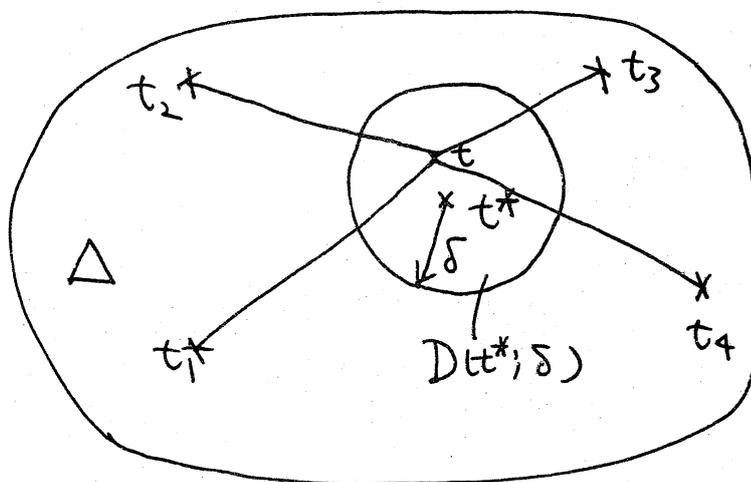
$$\theta - 2\eta < \arg(t - t_1) < \theta - \eta$$

$$\theta - 2\eta < \arg(t_3 - t) < \theta - \eta$$

$$-\theta + \eta < \arg(t - t_2) < -\theta + 2\eta$$

$$-\theta + \eta < \arg(t_4 - t) < -\theta + 2\eta$$

$$(\forall t \in D(t^*; \delta) \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t^*| \leq \delta\})$$



61

$$V(t, t_1; z) \equiv \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} U(t, A) dA$$

(積分路は線分 $[t_1, t]$)

と定めると、これは次の性質をもつ。

(i) $V(t, t_1; z)$ は $t \in D(t^*; \delta)$ につき 正則

(ii) $\|V(t, t_1; z)\| \leq \text{const.} / |z|$

($t \in D(t^*; \frac{\delta}{2})$, $-\frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta$)

(iii) $\|V_t(t, t_1; z)\| \leq \text{const.} / |z|$

(iii) と同じ t, z に対し z)

(iv) $\lambda V(t, t_1; \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} I$ (strongly)

(λ は実数)

(v) 任意の $x \in X$ に対し $z, V(t, t_1; z)x \in D(A(t))$

(vi) $(z - A(t))V(t, t_1; z) = I - V_t(t, t_1; z)$.

以下、順次証明する。

$$J_\varepsilon \equiv \int_{t_1}^{t-\varepsilon} e^{-z(t-A)} U(t, A) dA \quad \text{は (1-3) にあ$$

る正則。 $\varepsilon \downarrow 0$ の時、この積分は、尤も同様、

(1-2) であつ、

$$J \equiv \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} U(t, A) dA$$

に収束する。 かつ J は正則である。

$$\begin{aligned} \|V(t, t_1; z)\| &\leq \int_{t_1}^t e^{-\operatorname{Re}[z(t-A)]} \|U(t, A)\| dA \\ &\leq \operatorname{const.} / |z| \cos(\theta' + \theta'') \end{aligned}$$

$$(\theta' = \arg z, \theta'' = \arg(t-t_1))$$

より (ii) を得る。 $V(t, t_1; z)$ は正則かつ

$$V(t, t_1; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t^* - \zeta| = \delta} \frac{V(\zeta, t_1; z)}{\zeta - t} d\zeta$$

と分かる。より、

$$V_t(t, t_1; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t^* - \zeta| = \delta} \frac{V(\zeta, t_1; z)}{(\zeta - t)^2} d\zeta$$

と分かる、

$$\|V_t(t, t_1; z)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t^* - \zeta| = \delta} \frac{\|V(\zeta, t_1; z)\|}{(\zeta - t)^2} d\zeta$$

$$\leq \operatorname{const.} \|V(\zeta, t_1; z)\|$$

$$\leq \operatorname{const.} / |z| \quad [(ii) \text{ より}]$$

を得る。 (iv) を示す。

$$\begin{aligned} \lambda V(t, t_1; z) &= \lambda \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-A)} U(t, A) dA \\ &= \int_0^{\lambda(t-t_1)} e^{-A} U(t, t - \frac{A}{\lambda}) dA \\ &\xrightarrow{(3.5)} \int_0^{\infty} e^{-A} dA U(t, t) \end{aligned}$$

$$= I \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

ここで、仮定 (1-1) (1-2) を用いた。容易な計算より

$$\begin{aligned} & V(t+h, t_1; z) - V(t, t_1; z) \\ &= \int_{t_1}^{t+h} e^{-z(t+h-A)} U(t+h, A) dA \\ &\quad - \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} U(t, A) dA \\ &= \int_t^{t+h} e^{-z(t+h-A)} U(t+h, A) dA \\ &\quad + \int_{t_1}^t [e^{-z(t+h-A)} - e^{-z(t-A)}] U(t+h, A) dA \\ &\quad + \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} [U(t+h, A) - U(t, A)] dA \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

左辺は、(1) に於て、 z 正則かつ、両辺を $h \downarrow 0$ とし、 $h \downarrow 0$ とすることにより、

$$\text{左辺} \xrightarrow{\text{(強)}} V_t(t, t_1; z) \quad (h \downarrow 0)$$

容易に、

$$\frac{1}{h} J_1 \rightarrow \textcircled{\otimes} I \quad (h \downarrow 0)$$

$$\frac{1}{h} J_2 \rightarrow -z \int_{t_1}^t e^{-z(t-A)} U(t, A) dA$$

$$= -z V(t, t_1; z)$$

と $\epsilon > 0$ に対し、仮定 (1-1) により、

$$J_3 = [U(t+h, t) - I] V(t, t_1; z)$$

を得る。故に

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h, t) - I}{h} V(t, t_1; z) = \text{存在}$$

且

$$V_t(t, t_1; z) = I - z V(t, t_1; z) + A(t) V(t, t_1; z)$$

をみたす。これは (iv), (vii) の成立を示す。

同様に、

$$W(t_3, t; z) \equiv \int_t^{t_3} e^{-z(\cdot-t)} U(A, t) dA$$

と定義すると、この W は、(vi) (vii) - (viii) の外に、

(vii') 任意の $x \in D(A(t))$ に対し、

$$W(t_3, t; z) \wedge A(t)x = x + W_t(t_3, t; z)x$$

をみたす。

さて、 λ_0 を十分大きくとると、

$$\|V_t(t, t_1; z)\| < \frac{1}{2}$$

$$\|W_t(t_3, t; z)\| < \frac{1}{2}$$

が、 $|z| \geq \lambda_0$ に対し成立するとする。(vii') による。

次に,

$$B(t, t_1; z) = V(t, t_1; z) (I - V_t(t, t_1; z))^{-1}$$

とおく, (iv) - (iv') による

(12) $B(t, t_1; z)$ は, $t \in D(t^*, \frac{\delta}{2})$ に対し正則.

$$(13) \quad \|B(t, t_1; z)\| \leq 2 \|V(t, t_1; z)\| \\ \leq \text{const.} / |z|$$

$$(z \in \sum (\lambda_0) - \frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta))$$

$$(14) \quad (z - A(t)) B(t, t_1; z) = I$$

(iv') と (v) による $D(A(t))$ は X の中稠密且
又 (iv') を考慮すれば, $B(t, t_1; z) = (z - A(t))^{-1}$
且

$$(1) \quad \sum (\lambda_0) - \frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta) \subset \rho(A(t))$$

$$(2) \quad \|(z - A(t))^{-1}\| \leq \text{const.} / |z|$$

$$(z \in \sum (\lambda_0) - \frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta))$$

(1) $(z - A(t))^{-1}$ は, $t \in D(t^*, \frac{\delta}{2})$ に対し
正則

を示される。同様は, t_1, t_3 の代わりに, t_2, t_4 を
用い, t^* が Δ の任意の元, η は任意に小さい数,
コンパクト集合 $K \subset \Delta$ は $D(t_j^*, \delta_j)$ の有限個を
おおよぼす事を考慮すれば, 求めるべき結論を得る。