数理解析研究所講究録
121巻 1971年 43-57

Banach 空間における一階線形常微分方程式の初期値問題

東大 教養 牛島 照夫

はじめに

Banach 空間 X における線形作用素 A を係数とする常微分方程式：

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の初期値問題の研究は、吉田耕作，Hille，Phillips 等によって、充分に研究されている。しかし、これまでの理論の大部分は、A のレゾルヴェント集合 $\rho(A)$ が空でなく、かつ、ある実数 ω があって、

$$\rho(A) \supset (\omega, \infty),$$

および、$\lambda \to \infty$ のとき，

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = O(\lambda^{-1})$$

なることを基本的な仮定として論じられてきた。（[5]，定理 23.8.4 など）ところで、次のような簡単な例を考えてみよう。

$X = L^2(R^1) \times L^2(R^1) \ni f(k) = \begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{pmatrix}$ に対して，

$$A(k) = \begin{pmatrix} -k^2 & k^\ell \\ 0 & -k^2 \end{pmatrix}$$

から

$$D(A) = \{ f \in X,\ A(k)f(k) \in X \},$$

$$(Af)(k) \equiv A(k)\, f(k)$$

によって定まる A を考える．

k を固定して考えれば，

$$(\lambda - A(k))^{-1} = (\lambda + k^2)^{-1} E + (\lambda + k^2)^{-2} k^\ell F,$$

$$e^{tA(k)} = e^{-tk^2} E + t k^\ell e^{-tk^2} F$$

$$\left(E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

である。そこで，

$$(T_t f)(k) \equiv e^{tA(k)} f(k)$$

とおくと，$t > 0$ では，$T_t \in L(X)$ で，かつ $\{ T_t : t > 0 \}$ は，半群をなし $\{ |\arg t| < \pi/2 \}$ に解析接続できることがわかる。さらに，

$$\frac{d}{dt} T_t f = A T_t f,\quad \forall t > 0,\quad \forall f \in X;$$

$$f \in D(A) \text{ なら，} T_t f \longrightarrow f \quad (t \downarrow 0)$$

である。しかるに，$\ell > 4$ ならば，$\rho(A) = \emptyset$ となってしまう。

ところで，m を整数とすると，

$$(\lambda - A(k))^{-m} = (\lambda + k^2)^{-m} E + m(\lambda + k^2)^{-m-1} k^\ell F$$

であるから，$l \leq 2(m+1)$ なら，λ が非正の実数でない限り，$(\lambda - A(\xi))^{-m}$ は，X での有界作用素 $R_m(\lambda)$ に拡張される。

さらに，$R_m(\lambda)$ は，たとえば $|\arg(\lambda-1)| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, では，解析的で有界である。

一方，適当に積分路 Γ をとると，

$$e^{tA(\xi)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A(\xi))^{-1}d\lambda$$

と表わせる。したがって，部分積分によって，

$$t^m e^{tA(\xi)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m e^{t\lambda}(\lambda - A(\xi))^{-1}d\lambda$$

$$= \frac{(-1)^m}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m (\lambda - A(\xi))^{-1}d\lambda$$

$$= \frac{m!}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A(\xi))^{-m-1}d\lambda$$

となる。そこで，

$$T_t = e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\frac{(m-1)!}{t^{m-1}}\int_\Gamma e^{t\lambda}R_m(\lambda)\,d\lambda$$

としてやれば，例にのべた問題の解作用素を作れそうである。このような事情を明らかにするのが，本講の目的である。

§1. A^∞-適切性

まず次の条件(Y)を仮定する。

$(Y) \ni A \iff$

A は閉作用素かつ，$D(A^\infty) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ は X で稠密

このとき，$D(A^\infty)$ を，セミノルム系 $\{\|x\|_n = \|A^n x\| : n = 0, 1, 2 \cdots\}$ によって，Fréchet 空間とみなすことができる。今後この

46

Fréchet 空間をYであらわそう。さらに

$$A_\infty = A|Y$$

とおく。Yの位相のいれ方から、$A_\infty \in L(Y)$（YからYへの連続線形写像）である。添数∞は、Yに関係することを示すことにする。簡単のために、

$$|||x|||_n = \sum_{j=0}^{n} \|x\|_j , \quad x \in Y$$

と書く。

以下、次のような適切性の条件を考える。

$(A^\infty) \ni A \iff$

$A \in (Y)$ であり、かつ、A_∞ はYにおいてクラス C_0 の半群 $T_\infty(t)$ を生成する。

$(A^\infty_e) \ni A \iff$

$A \in (Y)$ であり、かつ、ある実数 ω があって、$A_\infty - \omega$ はYで同等連続なクラス C_0 の半群を生成する。

$(A^\infty_c) \ni A \iff$

$A \in (A^\infty)$ であり、かつ、その生成する半群 $T_\infty(t)$ に対して任意の $t > 0$ に対してある定数 C_t が存在して

$$\| T_\infty(t) x \| \leq C_t \|x\| , \quad \forall x \in Y$$

がなりたつ。

$A \in (A^\infty)$ のとき、その生成する半群 $T_\infty(t)$ がクラス C_0 であることは、局所同等連続であることと等しい（[6]，

命題1.1)。これは，空間Yにおいては，任意の $t>0$ に対して，ある定数 C_t と n_t が存在して，評価：

$$\|T_\infty(s)x\| \leqslant C_t |||x|||_{n_t} \qquad 0 \leqslant s \leq t, \quad x \in Y$$

をみたすことと同等である。

同様に，$A_\infty - \omega$ の生成する半群が同等連続になることは，A_∞ の生成する半群 $T_\infty(t)$ に対してある $C>0$ と n が存在して

$$\|T_\infty(t)x\| \leqslant C e^{\omega t} |||x|||_n, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad x \in Y$$

がなりたつことと同等である。

さらに，

$(A_c^\infty) \ni A \iff$

$A \in (A^\infty)$ であり，かつ，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $C_\varepsilon>0$ が存在して，

$$\|T_\infty(t)x\| \leqslant C_\varepsilon \|x\|, \quad \varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon^{-1}, \quad x \in Y$$

となる。

さて，複素平面上の閉領域 Λ_L^* が，共役対数領域であるとは，正数 α と実数 β, γ が存在して，

$$\Lambda_L^* = \{\lambda = \xi + i\eta : \xi \geqslant \alpha \log|\eta| + \beta, \ \xi \geqslant \gamma\}$$

と書けることとしよう。このとき，(A^∞) であるための1つの充分条件として，次の定理が得られる。

__定理 1__ $A \in (Y)$ に対して $\rho(A_\infty)$ に含まれる共役対数領域 Λ_L^* が存在し，かつ，ある k と l が存在して，

$$\|(\lambda - A_\infty)^{-1}\lambda\| \leq C(1+|\lambda|)^k |||x|||_\ell, \ x \in Y, \ \lambda \in \Lambda_L^*$$

ならば $A \in (A^\infty)$ である。

(A_e^∞) に対する特徴づけは，同等連続な C_0 半群の特徴づけ（Yosida [11] 参照）から，ただちに得られるが，我々の場合には次のように変形ができる。

定理2　$A \in (A_e^\infty) \Longleftrightarrow$

実数 ω が存在して，右半平面 $\Lambda_E = \{Re\lambda \geq \omega\} \subset \rho(A_\infty)$ であり，かつ，ある k と ℓ が存在して，

$$\|(\lambda - A_\infty)^{-1}_\lambda\| \leq C(1+|\lambda|)^k |||x|||_\ell, \ x \in Y, \ \lambda \in \Lambda_E$$

をみたす。

さらに，大春氏と岡沢氏による次の結果（[8]）がある。

定理 3　$A \in (A_c^\infty) \Longleftrightarrow$

$A \in (A_c^\infty)$ であり，かつ次の条件 (F) をみたす：

(F)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の性質をみたす定数 C_ε が存在する。すなわち，任意の $x \in Y$ に対してある実数 $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, x)$ が存在して，$\lambda > \lambda_0$ かつ $\varepsilon < n/\lambda < \varepsilon^{-1}$ ならば，

$$\|\lambda^n(\lambda - A_\infty)^{-n}_x\| \leq C_\varepsilon \|x\|$$

をみたす。

定理 2 の略証　条件の必要なことは，

$$(\lambda - A_\infty)^{-1}_x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\infty(t)x\,dt, \ Re\lambda > \omega$$

がYの等式として意味をもつことからしたがう。十分性を示すためには，$\omega' > \omega$ として，

$$T_\infty(t)x = x + tA_\infty x + \frac{t^2}{2}A_\infty^2 x + \cdots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A_\infty^{k+1}x +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega'-i\infty}^{\omega'+i\infty} e^{t\lambda}\lambda^{-k-2}(\lambda - A_\infty)^{-1}A_\infty^{k+2}x\,d\lambda$$

としてやればよい。

§2 n 次の逐次レゾルヴェントとクラス (A^∞, n).

$A \in (Y)$ のとき，n 次の逐次レゾルヴェント集合 $\rho_n(A)$ を次のように定める。

$$\rho_n(A) = \{\lambda \in \rho(A_\infty);$$
ある $C_\lambda > 0$ が存在して，
$$\|[(\lambda - A_\infty)^{-1}]^{+n}x\| \leq C_\lambda\|x\|,\ x \in Y\}$$

$\lambda \in \rho_n(A)$ に対して，

$$R_n(\lambda) \equiv \overline{[(\lambda - A_\infty)^{-1}]^n} \in L(x)$$

を，n 次の逐次レゾルヴェントという。さらに n 次の本質的逐次レゾルヴェント集合 $\rho_{n,e}(A)$ を，

$$\rho_{n,e}(A) = \{\lambda \in \rho_n(A):$$
ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$ なら，
$$\|R_n(\lambda')\| \leq C_\lambda\}$$

とおこう。

$\lambda \in \rho_n(A)$ のとき，$\lambda \in \rho(A)$ であるためには，$(\lambda - A)^n$

が閉作用素であることが必要十分である。したがって，$\rho(A) \neq \phi$ ならば，$\rho_n(A) = \rho(A)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である。また，$\lambda \in \rho_n(A)$ で $R_n(\lambda) = [(\lambda - A)^{+n}]^{-1}$ ならば，$\lambda \in \rho(A)$，かつ，$R_n(\lambda) = (\lambda - A)^{-n}$ である。さらに $R_n(\lambda)$ は，閉集合 $\rho_{n,e}(A)$ 上で解析的なこともわかる。

定理 1，2 から，$\rho_n(A)$ が共役対数領域 Λ_L^*（又は，右半平面 Λ_E）を含み，Λ_L^*（又は Λ_E）上で $\|R_n(\lambda)\| \leq C(1 + |\lambda|)^k$ となるならば，$A \in (A^\infty)$（又は (A_e^∞)）であることがわかる。

逆に $A \in (A^\infty)$ のとき，$R_n(\lambda)$ の存在と挙動を調べるためには，次の補題が有用である。この補題の原形は，Chazarain による（[2]，[3] 参照）

補題　f は，その台が $(-\infty, a)$，$a < \infty$，に含まれる C^∞ 関数で，

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n$$

をみたすものとする。このとき，

$$R_f(\lambda)x \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} T_\infty(t) x \, dt$$

に対して

$$\Sigma = \{ \lambda : \|R_f(\lambda)x\| \leq C_\lambda \|x\|, \ \|R_{f^{(n+1)}}(\lambda)x\| \leq \tfrac{1}{2}\|x\| \}$$

とおくと，

$$\Sigma \subset \rho_n(A)$$

であり．$\lambda \in \Sigma$ のとき

$$R_{n+1}(\lambda) = \overline{R_f(\lambda)}\left(1 + (-1)^{n+1}\overline{R_{f^{(n+1)}}(\lambda)}\right)^{-1},$$

$$\| R_{n+1}(\lambda) \| \leq 2C_\lambda$$

となる。

略証　次の等式が右有限な台をもつ C^∞-関数 f に対して成立つことに注意する。

$$(\lambda - A_\omega) R_f(\lambda) x = (\lambda - A_\omega)^{n+1} f(0) x - (\lambda - A)^n f'(0) x +$$
$$+ \cdots + (-1)^n f^{(n)}(0) x + (-1)^{n+1} R_{f^{(n+1)}}(\lambda) x$$

この補題を使うためには．$T_\omega(t)$ の原点における挙動を超関数的に制限しておくと都合がよい。そこで．

$$|\varphi|_k = \sup_{t \in R^1,\, 0 \leq j \leq k} |\varphi^{(j)}(t)|$$

として．次の条件をおく。

$(A^\omega, n) \ni A \iff$

$A \in (A^\omega)$ かつ．次の条件 (n) をみたす：

(n) ある $C > 0$ と整数 $k \geq 0$ が存在して．$\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ ならば

$$\left\| \int_0^1 \varphi(t) t^n T_\omega(t) x \, dt \right\| \leq C |\varphi|_k \|x\|, \quad x \in Y$$

がなりたつ

$(A_e^\omega, n) \iff (A^\omega, n) \wedge (A_e^\omega)$

$(A_c^\omega, n) \iff (A^\omega, n) \wedge (A_c^\omega)$

とおく。さらに (A_c^ω, n) において．条件 (n) を次の $(n)_0$ で

おきかえたものを $(A_c^\infty, n)_0$ とおく。

$(n)_0$ あるC>0があって

$$\sup_{0<t\leq 1} \|t^n T_\infty(t)x\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in Y.$$

例として (A^∞, n) の特徴づけをあげよう。

定理 4　$A\in(Y)$ が (A^∞, n) に属すためには，$\rho_{n+1}(A)$ に含まれる共役対数領域 Λ_L^* が存在し，かつ，ある整数 k が存在して，$\lambda\in\Lambda_L^*$ ならば，

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leq C(1+|\lambda|)^k$$

となることが必要充分である。

証明　必要性：$\varphi\in\mathcal{D}$ を台が $(0,\infty)$ の内部に含まれ，非負でかつ，$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dt=1$ をみたすものにとろう。

$$f(t)=\frac{(-t)^n}{n!}\int_t^\infty \varphi(t)\,dt$$

とおくと，補題の条件をみたしている。補題の Σ が共役対数領域を含むことと，$R_{n+1}(\lambda)$ の評価は，条件 (A^∞, n) からしたがう。

充分性：Γ_L^* を Λ^* の境界として，

$$S_n(\varphi)x \equiv \int_{\Gamma_L^*}\hat{\varphi}(\lambda)R_{n+1}(\lambda)x\,d\lambda, \quad \varphi\in\mathcal{D},\ x\in X$$

とおく。ただし，$\hat{\varphi}(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{t\lambda}dt$ である。このとき，S_n は $L(X)$ に値をとる distribution であることが条件からしたがう。より一段の解析の後で，$x\in Y$ ならば，

$$S_n(\varphi)x=\int_0^\infty \varphi(t)\frac{t^n}{n!}T_\infty(t)x\,dt$$

となる。証明終り。

なお，(A_e^∞, n) の特徴づけは，定理4において Λ_L^* を右半平面 Λ_E におきかえたものである。

Da Prato [4] の結果から，$(A_c^\infty, n)_0$ の特徴づけを導くことができるが，省略する。

さらに，$\rho(A) \neq \emptyset$ のときは，条件 (A^∞) は，非斉次方程式 $\left(\frac{d}{dt} - A\right)u = f$ の適切性に関するある条件と同値である。この条件 $(\mathcal{D})$ をのべるために，記号を準備する。X に値をとる distribution で $[0, \infty)$ に台をもつものの全体を $\mathcal{D}'_+(X)$ とおく。

$(\mathcal{D}) \ni A \Longleftrightarrow$

A は閉作用素で，任意の $f \in \mathcal{D}'_+(X)$ に対して，次の条件 (T. 1) ~ (T. 3) をみたす $u \in \mathcal{D}'_+(X)$ が一意的に存在する。

(T. 1)　$u(\varphi) \in D(A)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

(T. 2)　$\left(\frac{d}{dt} - A\right)u(\varphi) = f(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

(T. 3)　写像 $f \to u$ は，$\mathcal{D}'_+(X)$ から $\mathcal{D}'_+(X)$ への連続写像である。

このとき，次の結果がある。

定理 5　次の三条件は同等：

1°　$A \in (A^\infty)$, $\rho(A) \neq \emptyset$;

2° $A\in(\mathcal{D})$, $\overline{D(A)}=X$;

3° $\overline{D(A)}=X$ かつある共役対数領域 Λ_L^* と $C>0$, $k\geq 0$ が存在して, $\lambda\in\Lambda_L^*$ なら $(\lambda-A)$ は, 次の評価をみたす有界な逆をもつ:

$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leq C(1+|\lambda|)^k.$$

この定理は, Lions の定義した正則な超関数的半群[7]の生成作用素の特徴づけを与えている([2], [9])。

§3. 解の滑らかさ

クラス(A_c^∞, n)に滑らかさの条件を附けると, $R_{n+1}(\lambda)$の存在領域と挙動によって, 特徴づけることができる。例として, 微分可能(したがってC^∞)なクラス(A_c^∞, n, L)と, 複素解析的なクラス(A_c^∞, n, H)についてのべる。

$(A_c^\infty, n, L)\ni A \iff$

$A\in(A_c^\infty, n)$であり, $T(t)=\overline{T_\infty(t)}$ は $t>0$ で微分可能。

$(A_c^\infty, n, H)\ni A \iff$

$A\in(A_c^\infty)$であり, あるθ_0とある$L(X)$値関数$T(z)$で, $\Sigma_{\theta_0}=\{|\arg z|<\theta_0\}$では解析的かつ$\overline{\Sigma}_{\theta_0}-\{0\}$では連続なものが存在し, 次の条件(H.1)~(H.3)をみたす:

(H.1) $T(t)=\overline{T_\infty(t)}$, $t>0$;

(H.2) $|\theta| \leqq \theta_0$ のとき $T(te^{i\theta})$ は条件(n)をみたす;

(H.3) あるkが存在して $\|T(z)x\| \leqq C |||x|||_k$, $0<|z|\leqq 1$,

$|\arg z| \leqq \theta_0$, $x \in Y$.

定理 6　$A \in (Y)$のとき, (A^∞_c, n, L)であるためには, ある$k \geqq 0$が存在して, 任意の$\varepsilon > 0$に対して$\rho_{n+1}(A)$に含まれるある対数領域$\Lambda^\varepsilon_L = \{\lambda = \xi + i\eta : \varepsilon\xi \geqq -\log|\eta| + \delta$ または $\xi \geqq \gamma\}$, $(\delta = \delta_\varepsilon, \gamma = \gamma_\varepsilon)$が存在し, $\lambda \in \Lambda^\varepsilon_L$ならば;

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leqq C_\varepsilon (1+|\lambda|)^k,$$

となることが必要充分である。

証明　必要性は, 補題による。

充分性: ΓをΛ^ε_Lの境界として,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\frac{n!}{t^n}\int_\Gamma e^{t\lambda} R_{n+1}(\lambda)\,d\lambda$$

を考えると, $t \geqq (k+1)\varepsilon$ なら $T(t) \in L(X)$ であり, $t \geqq (k+2)\varepsilon$ なら $\frac{d}{dt}T(t) \in L(X)$ である。条件はとくに(A^∞_e)であることを意味しているから, $\varphi \in \mathcal{D}$, $x \in Y$ なら

$$\int_0^\infty \varphi(t) t^n T_\infty(t) x\,dt$$
$$= \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, n!\, (\lambda - A_\infty)^{-n-1} x\,d\lambda$$
$$= \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, n!\, R_{n+1}(\lambda) x\,d\lambda$$

となることがわかる。ここで $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty e^{t\lambda}\varphi(t)\,dt$ である。一方, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset ((k+1)\varepsilon, \infty)$にとると, $x \in X$ で

$$\int_0^\infty \varphi(t)t^n T(t)x\,dt = \int_\Gamma \hat{\varphi}(\lambda)n!\,R_{n+1}(\lambda)x\,d\lambda$$

となる。Paley-Wiener の定理から，

$$= \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)n!\,R_{n+1}(\lambda)x\,d\lambda$$

これから，$t \geq (k+1)\varepsilon$ なら，$T(t) = \overline{T_\infty(t)}$ である。証明終り。

定理 7　$A \in (Y)$ のとき，(A_c^∞, n, H) であるためには，ある $k \geq 0$ と，$\rho_{n+1}(A)$ に含まれる角領域 $\Lambda_H = \{\lambda : |\arg(\lambda-\gamma)| \leq \pi/2 + \theta\}$，$(0 < \theta < \pi/2)$ が存在して，$\lambda \in \Lambda_H$ ならば

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leq C(1+|\lambda|)^k$$

となることが必要十分である。

証明　必要性：$A \in (A_c^\infty, n, H)$ ならば $e^{\pm i\theta_0} \in (A^\infty, n)$ に注意すると，定理 6 と略同様の方針で示される。証明終り。

微分可能性と複素解析性の間にあるクラス，すなわち，Gevrey クラス，準解析的クラス，実解析的クラスについても論じることができる。これらは，超関数的半群のときと平行に行なわれる（Barbu [1]，Ushijima [10] 参照）。

References

[1] Barbu, V., Differentiable distribution semi-groups, Annali della Scuola Norm. Sup. 23, 413-429(1969).

[2] Chazarain, J., Problèmes de Cauchy au sens des distrubutions vectorielles et applications, C.R.Acad. Sci.Paris Sér. A, t., 266, 10-13(1968).

[3] Chazarain, J., Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes. (to appear in J . Functional Analysis.).

[4] Da Prato, G., Semlgruppi di crescenza n., Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 20, 753-782(1966).

[5] Hille, E. and Phillips, R. S., Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31(1957).

[6] Komura, T., Semi-groups of operators in a locally convex spaces, J. Functional Analysis, 2, 258-296(1968).

[7] Lions, J. L., Les semi-groupes distributions, Portugal Math., 19, 141-164(1960).

[8] Oharu, S., Semigroups of linear operators in a Banach space, (to appear).

[9] Ushijima, T., Some properties of regular distribution semi-groups, proc. Japan Acad., 45, 224-227(1969).

[10] 牛島照夫, 線形作用素の半群の滑らかさについて, 数理解析研究所講究録 93, 56-75(1970).

[11] Yoshida, K., Functional Analysis, Springer, Berlin, 1965.