数理解析研究所講究録
123巻 1971年 134-145

languageにおけるwordsのpermutationについて

静大 工 大芝 猛

§1 序

language $A \subseteq \Sigma^*$ に対し $\wp(A)$ を A の中の words の文字を permute することによってうるすべての words の集合とする。

一般に、A が context-free language であっても $\wp(A)$ は context-free とは限らない。以下では $\wp(A)$ が context-free になるための A に関する1つの代数的十分条件を与え、その応用として Ginsburg の1つの open problem の解答を与える。またこの十分条件は A が「1次独立な periods の集合をもつ linear set に対応する bounded set $(\subseteq a_1^* \cdots a_n^*)$」の場合は必要十分条件となる。

定義と記号

- $\Sigma = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, n個の相異なる文字の集合

- $N=\{0,1,2,\cdots\}$, 負でない整数の集合
- $u, v \in \Sigma^*$ に対し $\underline{u \equiv v} \Leftrightarrow$ "$\#_x(u)=\#_x(v)$ for all $x \in \Sigma$"

  但し $\underline{\#_x(w)}$ = wの中の 文字xの個数
- $w \in \Sigma^*$ に対し $\rho(w)=\{u \mid u \equiv w,\ u \in \Sigma^*\}$

  $A \subseteq \Sigma^*$ に対し $\rho(A)=\bigcup_{w \in A} \rho(w)$
- $A, B \subseteq \Sigma^*$ に対し $A \equiv B \Leftrightarrow \rho(A)=\rho(B)$
- $f_{\langle a_1,\cdots,a_n\rangle}$ はN^nから $a_1^* \cdots a_n^*$ の上への次のような 1:1 写像

  $f_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}([k_1,\cdots,k_n])=a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}$; $[k_1,\cdots,k_n] \in N^n$

  $f_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(L)=\{f_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(\gamma) \mid \gamma \in L\}$; $L \subseteq N^n$
- また $\psi_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}$ はΣ^*からN^n の上への次のような写像

  $\psi_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(w)=[\#_{a_1}(w),\cdots,\#_{a_n}(w)]$; $w \in \Sigma^*$

  $\psi_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(A)=\{\psi_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(w) \mid w \in A\}$; $A \subseteq \Sigma^*$
- $\tau \in N^n$, $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\} \subseteq N^n$ に対し

  $L(\tau;\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\})=\{\tau+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_r \in N\}$ とし

また $V[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]=\{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_r \in N\}$ も用いる。

Proposition

(1) $A, B \subseteq \Sigma^* \Rightarrow \rho(A \cup B)=\rho(A) \cup \rho(B)$, $\rho(AB)=\rho(BA)$

(2) $U, V \subseteq N^n \Rightarrow \rho(f_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(U+V))=\rho(f_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(U)\cdot f_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(V))$

(3) $V \subseteq N^n \Rightarrow \rho(f_{\langle a_1 \cdots a_n\rangle}(V)) \cap a_{i_1}^* \cdots a_{i_n}^* = f_{\langle a_{i_1} \cdots a_{i_n}\rangle}\left(V\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ i_1 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\right)$

但し $[x_1,\cdots,x_n]\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ i_1 & \cdots & i_n\end{pmatrix}=[x_{i_1},\cdots,x_{i_n}]$ （置換）

§2 $\wp(A)$ が Context-free になるための條件.

[Proposition] $A, B \subseteq \Sigma^*$ に対し,

(1) $\wp(A)$, $\wp(B)$ context-free $\Rightarrow$ $\wp(A \cup B)$ context-free

(2) $\wp(A)$ context-free (regular), $\wp(B)$ regular

$\Rightarrow \wp(AB)$ context-free (regular)

(3)[*] $\wp(A)$ context-free, $\mathbb{C}(A) \Rightarrow \wp(A^*)$ context-free

但し $\mathbb{C}(A) \Leftrightarrow$

$$\forall w \in \wp(A^* - A)\ \exists u, v, y\ (\ w = uyv\ ,\ uv \in \wp(A^*),\ y \in \wp(A^*)\ \ |uv| \neq 0\ ,\ |y| \neq 0\ )$$

さて,「$A \subseteq a_1^* \cdots a_n^*$ に対し

(*1) $\wp(A)$ context-free $\Rightarrow$ A context-free」

は $A = \wp(A) \cap a_1^* \cdots a_n^*$ から明らかである。このとき bounded な context-free language の Characterization から

(*2) $\psi_{\langle a_1 \cdots a_n \rangle}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} L(c_i ; \mathbb{P}_i)$

各 $\mathbb{P}_i = \{\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{i r_i}\}$ は 1次独立 かつ stratified とかける。但し

(定義) $\mathbb{P} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\} \subseteq N^n$ が stratified とは

「(1) 各ベクトル α_i は高々2つの座標を除いて0.

(*) Maurer (1969)

(2) nonzero座標を2つもつ任意の2つのベクトル$\in \mathbb{P}$

$\alpha_i=[0,\cdots,0,x_k,0,\cdots 0,x_\ell,0,\cdots 0]$, $\alpha_j=[0,\cdots,0,y_{k'},0,\cdots,0,y_{\ell'},0,\cdots 0]$

に対しては 決して $k<k'<\ell<\ell'$ とならずまた

$k'<k<\ell'<\ell$ とならない。

ことをいう。

一方(*1)の逆は一般に成立しない. 例えば

(*3) $A_1=f_{\langle a_1 a_2 a_3 a_4\rangle}L([0,0,0,0];\{[1,0,0,1],[0,1,1,0]\})\subseteq a_1^*\cdots a_4^*$

は periods の stratified set をもち Context-free

であるが $\rho(A_1)$ は context-free ではない。

($\because$) $\rho(A_1)$ context-free ならば

$A_2=\rho(A_1)\cap a_1^*a_2^*\underline{\underline{a_4^*a_3^*}}$ は context-free である。

一方 $A_2=f_{\langle a_1 a_2 a_4 a_3\rangle}L([0,0,0,0];\{[1,0,1,0],[0,1,0,1]\})$

の periods の集合は stratified でなく. A_2 は Context-free ではない。 矛盾。)

(*1)の逆が成立するために A の periods の集合に対する条件が stratified だけでは不足であり. これに次の

<u>pairwise connected</u> なる条件を付すると $\rho(A)$ は Context-free となる。

(定義) $\mathbb{P}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\subseteq N^n$ が <u>pairwise connected</u> とは

「nonzero座標を2つ以上もつ $\mathbb{P}$ の任意の2つのベクトル

α_i,α_j は少なくとも1つの座標番号において共に nonzero

要素をもつ。」

[定理 1]　$A \equiv f_{\langle a_1,\cdots a_n\rangle} L(\tau;\mathbb{P})$，$\tau \in N^n$，$\mathbb{P} \subseteq N^n$ 1次独立ならば

$$\wp(A)\ \text{context-free} \Leftrightarrow \mathbb{P}\ \text{stratified}\ かつ\ \text{pairwise connected}.$$

この定理を用いるならば更に一般に $\wp(A)$ が context-free なる十分条件として

[定理 2]　$A \subseteq \{a_1,\cdots,a_n\}^*$ に対し

「$\psi_{\langle a_1,\cdots a_n\rangle}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} L(\tau_i;\mathbb{P}_i)$，各 $\mathbb{P}_i$ は stratified かつ pairwise connected」 $\Rightarrow$ $\wp(A)$ は Context-free。

をうる。

更に $\mathbb{P} \subseteq N^3$ のときは必らず $\mathbb{P}$ は pairwise connected となるので、次の系をうる。

[系]　$A \subseteq a^* b^* c^*$ に対して

$$\wp(A)\ \text{context-free} \Leftrightarrow A\ \text{context-free}.$$

この系は次の Ginsburg の open problem に対する否定的解答を与える。

"$A \subseteq a^* b^* c^*$ に対し $\wp(A)$ が not context-free になる Context free language A は存在するか？"

さて[定理 1]の証明"$\Leftarrow$"には次の lemma が用いられる。（"$\Rightarrow$"の証明は前記(＊3)の証明と同様に容易。）

[lemma 1] 任意の2つの辺が少くとも1つの頂点を共有するようなグラフは①三角形かまたは②すべての辺が(少くとも)1つの頂点を共有するグラフかのいずれかである。

[lemma 2] $K, L, M, N, P, Q > 0$ integer のとき

$\wp((b^K c^L)^*(c^N a^M)^*(a^P b^Q)^*)$ は context-free language である。

[lemma 3] $K_1, \cdots, K_r, L_1, \cdots L_r \geqq 0$ integers のとき

$\wp((a^{K_1} b_1^{L_1})^*(a^{K_2} b_2^{L_2})^* \cdots (a^{K_r} b_r^{L_r})^*)$ は context-free language である。

§3. 定理1 '⇐' の証明.

$A \equiv f_{\langle a_1 \cdots a_n \rangle} L(\tau; \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\})$

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ は1次独立, stratified, pairwise connected 故.

$$\begin{cases} \alpha_1, \cdots, \alpha_r : \text{nonzero 座標が2つのもの。} \\ \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s : \quad 〃 \quad 〃 \quad 1つ \quad 〃 \quad 。 \end{cases}$$

として一般性を失わない。$f_{\langle a_1 \cdots a_n \rangle}$ を f と略記すれば

$A \equiv f(\tau) \cdot f(V[\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) \cdot f(V[\alpha_{r+1}]) \cdot \cdots \cdot f(V[\alpha_s])$ 。

また, $\wp(f(\tau))$, $\wp(f(V[\alpha_{r+1}]))$, $\cdots$, $\wp(f(V[\alpha_s]))$ はいずれも regular。従って Proposition (2) から

$\wp(A) = \wp(f \cdot V[\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) \cdot f(\tau) \cdot f(V[\alpha_{r+1}]) \cdots f(V[\alpha_s]))$

が context-free であることを示すために

$\wp(f(V[\alpha_1\cdots\alpha_r]))$ が context-free である。ことを示せば十分である。

$$
\left.
\begin{array}{lccccccc}
\alpha_i = [0, \cdots, 0, & K_i, & 0, \cdots, 0, & L_i, & 0, \cdots, 0] \\
 & \wedge & & \wedge & \\
\text{座標番号} \quad 1 \cdots\cdots & I_i, & \cdots\cdots, & J_i & \cdots\cdots \quad n
\end{array}
\right\}
$$
とすると

$\{\alpha_1, \cdots \alpha_r\}$ も pairwise connected であることから

「$l_i = \{I_i, J_i\}$ $(i=1,\cdots,r)$ を辺とするグラフは lemma 1 の仮定をみたし、従って次の2つの場合のみを生ずる。

(Case 1) $\{l_1, \cdots, l_r\} = \{\{H, I\}, \{I, J\}, \{J, H\}\}$ $\quad 1 \leq H < I < J \leq n$

(Case 2) $\{l_1, \cdots, l_r\} = \{\{I, I_1\}, \cdots, \{I, I_r\}\}$, $I \neq I_i$ $(i=1,\cdots,r)$

Case 1 の場合は $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ の1次独立性から

$r = 3$ でなければならず

$$
\begin{aligned}
\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\
&= \left\{
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad \overset{H}{\downarrow} \qquad\qquad\qquad\quad \overset{I}{\downarrow} \qquad\qquad \overset{J}{\downarrow} \\
[0, \cdots\cdots\cdots, 0, K, 0, \cdots, 0, L, 0, \cdots, 0], \\
[0, \cdots, 0, M, 0, \cdots\cdots\cdots, 0, N, 0, \cdots, 0], \\
[0, \cdots, 0, P, 0, \cdots, 0, Q, 0, \cdots\cdots\cdots, 0]
\end{array}
\right\}
\end{aligned}
$$

$\therefore \wp(f V[\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) = \wp((a_I^K a_J^L)^* (a_J^N a_H^M)^* (a_H^P a_I^Q)^*)$

従って lemma 2 より context-free.

Case 2 の場合には同様にして

$\wp(f V[\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) = \wp((a_I^{K_1} a_{I_1}^{L_1})^* \cdots\cdots (a_I^{K_r} a_{I_r}^{L_r})^*)$

従って lemma 3 より context-free.

§4. lemma の証明.

lemma 2, 3 の証明にはそれぞれの集合の words のみをきっちり accept する push-down acceptor を与える。lemma 3 については容易なので lemma 2 についてのみ述る。

$$A_0 = \wp((b^K c^L)^*(c^N a^M)^*(a^P b^Q)^*) = T(\mathbb{A}_0)$$

$$\mathbb{A}_0 = (\mathbb{K}, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, q_0, \mathbb{F})$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \cup \{q_{\mathbb{F}}\}$$

$$\mathbb{K}_1 = \{\langle -l, -m, -n \rangle \mid l, m, n \text{ integers}, 0 \le l, m, n \le H\}$$

$$H = \max(K, L, M, N, P, Q)$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}, \quad \Gamma = \{z_0, a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$$

$$q_0 = \langle 0, 0, 0 \rangle, \quad \mathbb{F} = \{q_{\mathbb{F}}\}$$

δ は次の関係のすべてを含む最小の集合（但し特に条件を付していないときは $0 \le l, m, n \le H$, $z \in \Gamma$ なるすべての l, m, n z に対する関係を与えているものとする。）

1.1 Input to inner counter rules

$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, a, z) \ni (\langle -l+1, -m, -n \rangle, z)$ for $l, 0 < l \le H$

$\delta($ 〃 $, b, z) \ni (\langle -l, -m+1, -n \rangle, z)$ 〃 $m, 0 < m \le H$

$\delta($ 〃 $, c, z) \ni (\langle -l, -m, -n+1 \rangle, z)$ 〃 $n, 0 < n \le H$

1.2 Input to push down storage rules

$\delta(\langle 0, -m, -n \rangle, a, z) \ni (\langle 0, -m, -n \rangle, za)$

$\delta(\langle -l, 0, -n \rangle, b, z) \ni (\langle -l, 0, -n \rangle, zb)$

$$\delta(\langle -l, -m, 0 \rangle, c, Z) \ni (\langle -l, -m, 0 \rangle, Zc)$$

1.3 Detete rules

$$\delta(\langle 0, 0, -n \rangle, \Lambda, Z) \ni (\langle -P, -Q, -n \rangle, Z)$$

$$\delta(\langle 0, -m, 0 \rangle, \Lambda, Z) \ni (\langle -M, -m, -N \rangle, Z)$$

$$\delta(\langle -l, 0, 0 \rangle, \Lambda, Z) \ni (\langle -l, -K, -L \rangle, Z)$$

1.4 Adjust (storage to counter) rules

$$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, \Lambda, a) \ni (\langle -l+1, -m, -n \rangle, \Lambda), \text{ for } l ; 0 < l \leq H$$

$$\delta(\quad '' \quad, \Lambda, b) \ni (\langle -l, -m+1, -n \rangle, \Lambda), \quad '' \quad m ; 0 < m \leq H$$

$$\delta(\quad '' \quad, \Lambda, c) \ni (\langle -l, -m, -n+1 \rangle, \Lambda), \quad '' \quad n : 0 < n \leq H$$

2.1 Positive store rules

$$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, \Lambda, Z) \ni (\langle -l-1, -m, -n \rangle, Za), \text{ for } l : 0 \leq l < H$$

$$\delta(\quad '' \quad, \quad '' \quad) \ni (\langle -l, -m-1, -n \rangle, Zb), \quad '' \quad m : 0 \leq m < H$$

$$\delta(\quad '' \quad) \ni (\langle -l, -m, -n-1 \rangle, Zc), \quad '' \quad n : 0 \leq n < H$$

2.2 Negative store rules

$$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, \Lambda, Z_0) \ni (\langle -l+1, -m, -n \rangle, Z_0\bar{a}), \text{ for } l ; 0 < l \leq H$$

$$\delta(\quad '' \quad, \Lambda, \bar{a}) \ni (\quad '' \quad, \bar{a}\bar{a}) \quad '' \quad ''$$

$$\delta(\quad '' \quad, \Lambda, Z_0) \ni (\langle -l, -m+1, -n \rangle, Z_0\bar{b}), \quad '' \quad m ; 0 < m \leq H$$

$$\delta(\quad '' \quad, \Lambda, \bar{b}) \ni (\quad '' \quad, \bar{b}\bar{b}), \quad '' \quad ''$$

$$\delta(\quad '' \quad, \Lambda, Z_0) \ni (\langle -l, -m, -n+1 \rangle, Z_0\bar{c}), \quad '' \quad n ; 0 < n \leq H$$

$$\delta(\quad '' \quad, \Lambda, \bar{c}) \ni (\quad '' \quad, \bar{c}\bar{c}), \quad '' \quad ''$$

2.3 Adjust (input to storage) rules

$\delta(\langle 0,-m,-n\rangle,\ a,\ \bar{a}) \ni (\langle 0,-m,-n\rangle,\ \Lambda)$

$\delta(\langle -l,0,-n\rangle,\ b,\ \bar{b}) \ni (\langle -l,0,-n\rangle,\ \Lambda)$

$\delta(\langle -l,-m,0\rangle,\ c,\ \bar{c}) \ni (\langle -l,-m,0\rangle,\ \Lambda)$

2.4 End rule

$\delta(\langle 0,0,0\rangle,\ \Lambda,\ Z_0) \ni (q_F,\ \Lambda)$

[$A_0 = \mathcal{P}((b^K c^L)^*(c^N a^M)^*(a^P b^Q)^*) = T(\mathbb{A}_0)$ の証明]

A_0 の各 Configuration $\mathfrak{S} = (\langle -l,-m,-n\rangle,\ u,\ \gamma) \in K_1 \times \Sigma^* \times \Gamma^*$
に対して $\mathfrak{S}$ の含む文字情報の量を意味する

$$I(\mathfrak{S}) = a^{-l+\#_a(u,\gamma)-\#_{\bar{a}}(\gamma)}\, b^{-m+\#_b(u,\gamma)-\#_{\bar{b}}(\gamma)}\, c^{-n+\#_c(u,\gamma)-\#_{\bar{c}}(\gamma)}$$

を対応させる。

(I) "$T(\mathbb{A}_0) \subseteq A_0$"： ルール δ の作り方から一般に

「$\mathfrak{S} \overset{*}{\underset{\delta}{\vdash}} \mathfrak{S}'$, $I(\mathfrak{S}') \equiv (b^K c^L)^{d'}(c^N a^M)^{e'}(a^P b^Q)^{f'}$, $d', e', f' \geqq 0$

ならば $I(\mathfrak{S}) \equiv (b^K c^L)^{d}(c^N a^M)^{e}(a^P b^Q)^{f}$ for some $d, e, f \geqq 0$」

が成立する。従って，$w \in T(\mathbb{A}_0)$ 即ち

$$\mathfrak{S}_0 = (\langle 0,0,0\rangle,\ w,\ Z_0) \overset{*}{\underset{\delta}{\vdash}} (\langle 0,0,0\rangle,\ \Lambda,\ Z_0) = \mathfrak{S}' \underset{\delta}{\vdash} (q_F,\ \Lambda\ \Lambda)$$

のとき $I(\mathfrak{S}') = a^0 b^0 c^0 \equiv (b^K c^L)^0 (c^N a^M)^0 (a^P b^Q)^0$ に注意すれば

$w \equiv I(\mathfrak{S}_0) \equiv (b^K c^L)^{d}(c^N a^M)^{e}(a^P b^Q)^{f}$, 即ち $w \in A_0$

(II) "$A_0 \subseteq T(\mathbb{A}_0)$"： $w \in A_0$ 即ち $w \equiv (b^K c^L)^{d_0}(c^N a^M)^{e_0}(a^P b^Q)^{f_0}$, $d_0, e_0, f_0 \geqq 0$

に対し ルール δ 1.1 〜 1.4 を用いて

(i) $\mathfrak{S}_0 = (\langle 0,0,0\rangle,\ w,\ Z_0) \overset{*}{\underset{\delta}{\vdash}} \mathfrak{S}'(\langle -l,-m,-n\rangle,\ u,\ Z_0 x^g)$, $x = a, b$ or c

$I(\mathfrak{S}') \equiv$ ① $(c^N a^M)^e (a^P b^Q)^f$ or ② $(b^K c^L)^d (a^P b^Q)^f$ or ③ $(b^K c^L)^d (c^N a^M)^e$

とすることが出来る。　更にルール δ 2.1 ～ 2.4 を追加することにより、

(ii) ①,②,③ のいずれの場合にも

$$\mathfrak{S}' = (\langle -l, -m, -n \rangle, u, z_0 x^g) \vdash^*_\delta (\langle 0, 0, 0 \rangle, \Lambda, z_0) \vdash_\delta (q_F, \Lambda, \Lambda)$$

とすることが出来　(i),(ii) より　$w \in T(\mathbb{A}_0)$　をうる。

(i) については，Acceptor $\mathbb{A}_0$ は 1 時点の Configuration が $\mathfrak{S}_i = (\mathfrak{r}, yv, \gamma)$; $\gamma \in (z_0 a^* \cup z_0 b^* \cup z_0 c^*)$ なる形をしているかぎり、必ず文字 y を読み込んで再び $\mathfrak{S}_i \vdash^*_\delta \mathfrak{S}_{i+1}$,
$\mathfrak{S}_{i+1} = (\mathfrak{r}', v, \gamma')$, $\gamma' \in (z_0 a^* \cup z_0 b^* \cup z_0 c^*)$ とし、$\mathfrak{S}_{i+1}$ の文字情報 $I(\mathfrak{S}_{i+1})$ は $I(\mathfrak{S}_i)$ に対し不変か、$(b^K c^L)$, $(c^N a^M)$, or $(a^P b^Q)$ のいずれか 1組の情報のみがきっちり減少したものとしうる。この結果すべての Input 文字を読み終り

$$\mathfrak{S}_0 \vdash^*_\delta \mathfrak{S}_1 \vdash^*_\delta \cdots \vdash^*_\delta \mathfrak{S}_s = (\langle -l, -m_s, -n_s \rangle, \Lambda, z_0 x^g), \; g \geq 0,$$

$$I(\mathfrak{S}_i) \equiv (b^K c^L)^{d_i} (c^N a^M)^{e_i} (a^P b^Q)^{f_i} \; (d_i, e_i, f_i \gtreqless 0 \text{ integers})^{(*)}$$

$(i=1, \cdots, s)$　とすることが出来る。　このとき d_s, e_s, f_s の少くとも 1つは nonpositive であることが導びかれ、3つの非増大列 $d_0, \cdots, d_s$; $e_0, \cdots, e_s$; $f_0, \cdots, f_s$ のいずれかは必らず 0 を含む。従って

$$\left.\begin{array}{l} ① \; d_j = 0 \text{ の場合は (i) の Case ①} \\ ② \; e_k = 0 \text{ の場合は (i) の case ②} \\ ③ \; f_t = 0 \text{ の場合は (i) の Case ③} \end{array}\right\} \text{であり、(i) が示される。}$$

(ii)の①については (1-2) $x=b$ or cの場合は$x=a$の場合に帰着しうること、及び (1-1) $x=a$の場合は容易に

$\mathfrak{S}' \vdash_\delta^* (\langle 0,0,0\rangle, \Lambda, Z_0) \vdash_\delta (q_F, \Lambda, \Lambda)$ が示されることから

$\mathfrak{S}_0 \vdash_\delta^* \mathfrak{S}' \vdash_\delta (q_F, \Lambda, \Lambda)$, 即ち $w \in T(\mathbb{A}_0)$ となる。

(ii)の②,③についても(i)の①と同様に示される。

(註)(※) 一般に $I(\mathfrak{S}) = a^i b^j c^k \quad i,j,k \geqq 0$

に対し $a^i b^j c^k \equiv (b^K c^L)^d (c^N a^M)^e (a^P b^Q)^f$

なる $d, e, f\ (\geqq 0)$ integers が存在する場合は一意である。

但し $K, L, N, M, P, Q \gneqq 0$ であり、

$\equiv$は 3文字 a, b, c から生成される Commutative group の要素としての equality と考える。