数理解析研究所講究録
123巻 1971年 43-67

オートマトンの代数的理論

東北大学 電気通信研究所
増永良文，野口正一.

§-1. 序論

従来数多くの著者によりオートマトンの代数的理論が議論されてきたが，とりわけオートマトンの直積分解性が，完全オートマトン[1]（Perfect Automaton）に対しては，オートマトンの自己同型群の群への直積分解性に等価である点を明らかにしたFleck[1]の結果は新らしいオートマトンの代数的理論の発芽の様に思われた。その後このFleckの議論は彼自身や[2]，主としてTrauth[3]，Bayer[4]等により拡張一般化され，関連した議論はWeeg[5, 6. 7, 8]，Oehmke[9]，Barnes[10]，Pickett[11] Arbib[12]，Jump[13]等により積極的に展開されてきた。

これらの議論では，オートマトンの自己同型群，自己準同型半群，あるいはオートマトンに付随する入力半群等の代数

的概念がオートマトンの構造を代数的に表現するものとして定義導入されている（オートマトンの自己同型群は Fleck [1]，オートマトンに付随する入力半群は Weeg [5] により初めて定義導入された）が，しかしながら従来の議論ではこれらオートマトンの代数的特徴の表現法，オートマトンの構造の表現法が統一的に記述されてなく，今後の理論の発展の為にはまずそれらを統一的に記述し見通しを良くすることが重要であると思われた。本論文ではそれら全てをオートマトンの状態集合上の全変換半群を使って表現することにより従来の議論を統一し，更に発展させ，一般に群のみならず半群の構造とオートマトンの構造とが対応しているオートマタの族を明らかにし，それらの構造を議論して，Fleck に始まったオートマトンの代数的理論を現在の方法論で取り扱える限界内で完結したと考えられる。

以下本稿ではその内容について要約を説明する。なお本稿では一般にオートマトンの状態数は一般に可付番無限と仮定して議論する。又半群に関する記号法は主として Clifford & Preston [22,23] によっている。

§-2. オートマトンの構造の半群論的表現.

最初ムーア型オートマトンの定義を与える。

定義2.1（ムーア型オートマトンの定義）

オートマトンAは3項系列，$A=(Q, M, I)$である。ここにQは状態のなす空でない一般には可付番無限集合，Iは入力半群，Mは$M: Q \times I \rightarrow Q$なる写像で状態遷移関数と呼ばれる。

なお本論文では入力半群Iに単位元が含まれていることを常に仮定しない。ここでムーア型オートマトンの定義から半群論的オートマトンの定義を導こう。入力$x \in I$に対して集合Q上の全変換半群$\mathcal{T}_Q$の元τ_xを次の様に対応させる写像$\varphi: I \rightarrow \mathcal{T}_Q$を考えてみる。$\forall x \in I$，$x\varphi = \tau_x =$

$$\begin{pmatrix} q_1, & q_2, & \cdots\cdots & q_i & \cdots\cdots \\ M(q_1, x), & M(q_2, x), & \cdots\cdots, & M(q_i, x), & \cdots\cdots \end{pmatrix}, \quad Q = \{q_i \mid i \in \Delta\}$$

ここにΔは一般に可付番無限添数集合，とすると次の補助定理が成立する。

補助定理2.1　φはIから$\mathcal{T}_Q$への準同型写像である。

以後集合$\{x\varphi \mid \forall x \in I\}$を$\mathcal{U}$と表わすと，Iが半群，$\varphi$が準同型写像だから$\mathcal{U}$は明らかに$\mathcal{T}_Q$の部分半群である。ここで半群論的オートマトンの定義を述べよう。

定義2.2（半群論的オートマトンの定義）

オートマトン$\mathfrak{A}$は4項系列，$\mathfrak{A} = (Q, \mathcal{U}, \varphi, I)$である。ここにQは状態のなす空でない一般には可付番無限集

合，Iは入力半群，$\mathfrak{T}$は集合Q上の全変換半群$\mathcal{T}_Q$の部分半群，φはIから$\mathfrak{T}$の上への準同型写像である。

なおこの定義に際し，Sunaga [14]，およびBeatty [15] を参照した。

ムーア型オートマトンの定義法と本稿で述べた半群論的定義法は明らかに等価である。

以下本論文では定義2.2に述べた半群論的オートマトンの定義を構造の表現法として用いる。そして$\mathfrak{A}=(Q, \mathfrak{T}, \varphi, I)$に於いては，オートマトンの構造を規定している$\mathcal{T}_Q$の部分半群$\mathfrak{T}$をオートマトン$\mathfrak{A}$の構造半群と呼ぶことにする。

ここでWeeg [5] により導入されたオートマトンに付随する入力半群の定義を与える（なお等価な定義はKrohn－Rhodes [16] により独立に与えられマシンの半群と呼ばれている）。オートマトンを$\mathfrak{A}=(Q, \mathfrak{T}, \varphi, I)$とする。入力半群$I$上の2項関係$\rho$を次の様に定義する。$x, y \in I$として，$x \rho y \Leftrightarrow \forall q \in Q,\ qx\varphi = qy\varphi$。

容易にρはI上の合同関係となることが示され，従ってIのρを法とする商半群I/ρが自然に定義される。I/ρをオートマトン$\mathfrak{A}$に付随する入力半群と呼び以後$\bar{I}$と書く。ρの定義から明らかに$\rho = \varphi \circ \varphi^{-1}$であるから，次の結果が得られる。

命題2.1. オートマトン$\mathfrak{A}$の構造半群と$\mathfrak{A}$に付随する入力半群は同型である。

§-3 オートマトンの準同型写像

本節では最初オートマトンの準同型写像，同型写像および像，商オートマトンの定義を与え，それらに関する基礎的な二・三の結果について述べ，本節後半ではオートマトンの自己準同型半群，自己同型群そしてオートマトンの構造半群の間の相互関係を状態集合上の全変換半群の上で明確にする。まずオートマトンの準同型写像から定義しよう。

定義3.1 オートマトン$\mathfrak{A}_1=(Q_1, \mho_1, \varphi_1, I)$から$\mathfrak{A}_2=(Q_2, \mho_2, \varphi_2, I)$への準同型写像$\eta$は次の様に定義される。$\eta : Q_1 \to Q_2$, $\forall q \in Q_1$, $\forall u \in \mho_1$, $qu\eta = q\eta u'$，ここに$u=x\varphi$なる$x \in I$に対して$u'=x\varphi_2$とする。

特にηが全単射の時，同型写像と云う。またオートマトン$\mathfrak{A}$から同じく$\mathfrak{A}$への準同型写像，同型写像を各々$\mathfrak{A}$の自己準同型写像，自己同型写像と云う。オートマトン$\mathfrak{A}=(Q, \mho, \varphi, I)$の自己準同型写像$\eta$は状態集合$Q$上の全変換半群$T_Q$の元$\eta$として，$\eta=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_i & \cdots \\ g_1\eta & g_2\eta & \cdots & g_i\eta & \cdots \end{pmatrix}$と表現出来，又自己同型写像は$Q$上の対称群の元として表現される。

$E(\mathfrak{A})$ で $\mathfrak{A}$ の全ての自己準同型写像からなる集合，$G(\mathfrak{A})$ で $\mathfrak{A}$ の全ての自己同型写像からなる集合を表わすと，

$\forall\eta_1, \eta_2 \in E(\mathfrak{A})$，$\forall q \in Q$，$q(\eta_1 \circ \eta_2) = (q\eta_1)\eta_2$ で η_1 と η_2 の積 $\eta_1 \circ \eta_2$ を定義すれば，この演算のもとで $E(\mathfrak{A})$ は恒等写像を単位元とするモノイドを，同様 $G(\mathfrak{A})$ は群をなすことは良く知られた結果である（$G(\mathfrak{A})$ が群をなすことは Fleck [1] により初めて示された）。$E(\mathfrak{A})$，$G(\mathfrak{A})$ を各々オートマトン $\mathfrak{A}$ の自己準同型半群，自己同型群と云う。

次の結果が得られる。

命題3.1 オートマトン $\mathfrak{A} = (Q, \mathfrak{T}, \varphi, I)$ の自己準同型半群 $E(\mathfrak{A})$ はオートマトン $\mathfrak{A}$ の構造半群 $\mathfrak{T}$ の全ての元と可換な $\mathcal{T}_Q$ の元全体のなす $\mathcal{T}_Q$ の部分モノイドであり，$\mathfrak{A}$ の自己同型群 $G(\mathfrak{A})$ は $E(\mathfrak{A})$ のユニットのなす群である。

また以下オートマトン $\mathfrak{A}$ の準同型写像 η による像オートマトンを $\mathfrak{A}/\eta = (Q_\eta, \mathfrak{T}_\eta, \varphi_\eta, I)$ と書き，$\mathfrak{A}$ の状態集合 Q 上の右合同関係 α による商オートマトンを $\mathfrak{A}/\alpha = (Q_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, \varphi_\alpha, I)$ と書くことにする（商オートマトンの定義等詳細は例えば Harrison [17] を参照）。

又主として Weeg 等によりオートマトンに付随する入力半群 I と $\mathfrak{A}$ の自己同型群 $G(\mathfrak{A})$ の間の関係が従来幾つか議論されているがここではこれ以上議論しない。

§4. オートマトンの特性化理論

本節では次節でオートマトンの準同型写像による構造の保存性や，次々節でオートマトンの直積分解性をそのオートマトンの自己同型群，自己準同型半群，あるいはオートマトンに付随する入力半群の直積分解性の上で議論する為に，最初従来定義された幾つかのオートマタのクラス及びその拡張について議論し，次いで半群から生成されたオートマトンと云う新たな概念を定義導入することによって，それらオートマタのクラスを半群論的に正確に規定する。

<u>定義4.1</u> オートマトン $\mathfrak{A}$ が完全（Perfect）であるとは，強連結でかつ次の条件を満たすこと。（Fleck [1]）。

$$\forall q \in Q,\quad \forall x, y \in I,\quad qxy\varphi = qyx\varphi。$$

特にオートマトンが定義4.1の後半の条件を満たすとき可換であると云おう。

§2で入力半群 I 上の合同関係 ρ を定義したが，次に I 上の2項関係 ρ_q（$q \in Q$）を次の様に定義する。

$$x\ \rho_q\ y \iff qx\varphi = qy\varphi \quad (x, y \in I)。$$

容易に ρ_q は I 上の右合同関係になることが示される。

<u>定義4.2</u> オートマトン $\mathfrak{A}$ が状態独立（State-independent）とは，$\forall q, q' \in Q$，$\rho_q = \rho_{q'}$ の成立する時を云う。（Trauth [3]）。

明らかにオートマトンが状態独立オートマトンでは，$\rho = \rho_q$ が任意の $q \in Q$ に対して成立する。

オートマトンが強巡回であるとはある状態 q_0 が存在して，$\forall q \in Q$, $\exists x \in I$, $q = q_0 x\varphi$ の成立する時を云う。この時 q_0 をオートマトン $\mathfrak{A}$ の強生成元と云う。次の定義は定義4.2の一般化である。

<u>定義4.3.</u>　強巡回なオートマトン $\mathfrak{A}$ が準状態独立（quasi-state-independent）とは，$\forall q \in Q$, $\rho_q \supseteq \rho_{q_0}$ が成立する時を云う。

即ち $\mathfrak{A}$ が強巡回準状態独立なら，$q_0 x\varphi = q_0 y\varphi \Rightarrow \forall q \in Q$, $qx\varphi = qy\varphi$ $(x, y \in I)$ である。

<u>定義4.4</u>　オートマトン $\mathfrak{A}$ が群型（group-type）とは，$\mathfrak{A}$ に付随する入力半群が群をなすときを云う。

<u>定義4.5</u>　$\mathfrak{A}$ がリセットオートマトンと呼ばれるのは次の条件を満たす時。$\forall q \in Q$, $\forall x, y \in I$, $qxy\varphi = qy\varphi$。

<u>定義4.6</u>　オートマトン $\mathfrak{A}$ が単位型（monoid-type）とは次の条件を満たす時を云う。$\exists e \in I$, $\forall q \in Q$, $qe\varphi = q$。

単位型の定義は一見不自然であるが，入力半群に例えば単位元（従来良く使われる空語んで良い）を付加すれば常に上の条件を満たすことになる。

また従来オートマトンの構造を議論する際にTrauth[3]

やFleck [1] によりオートマトンの状態集合上に次の様な演算が定義されてきた。

<u>定義4.7</u>　$\mathfrak{A}=(Q, \Sigma, \varphi, I)$ の適当な状態を q_0 とする。q, q' を $q=q_0 x\varphi$, $q'=q_0 y\varphi$ $(x, y \in I)$ なる状態とし状態集合 Q 上に演算 $*_{q_0}$ を次の様に定義する。

$q *_{q_0} q' = q''$，ここに $q''=q_0 xy\varphi$ 。

一般に演算 $*$ の定義が確定しているとは限らない。

<u>定義4.8</u>　オートマトン $\mathfrak{A}$ が擬完全（quasi-perfect）と云われるのは $\mathfrak{A}$ が強連結で状態独立かつ群型の時をいう。（Trauth [3]）。

しかしながら Trauth [3] によりオートマトンが擬完全の時には演算 $*$ は状態集合 Q 全ての上で任意の状態を q_0 として固定しても確定していることが示されている。特に本論文で導入した強巡回なオートマトンに対する準状態独立の定義は上述の様な状態集合上の演算が全状態集合上で確定する為の必要かつ十分条件であることを示せることに注意したい。即ち次の結果をうる。

<u>定理4.1</u>　強巡回なオートマトン $\mathfrak{A}$ に対して定義4.7の演算が全状態集合上で確定する為の必要かつ十分条件はオートマトン $\mathfrak{A}$ が準状態独立なること。但し q_0 は $\mathfrak{A}$ の強生成元ととる。

なお強巡回なオートマトンにオートマトンを限定したことは，状態集合全ての元のうえで演算を定義したい為である。

さてここで半群から生成されたオートマトンと云う定義を新たに導入する。

$V=\{v_i \mid i\in\Delta\}$，$\Delta$は一般に可付番無限の添数集合，を任意の半群とする。Vの各元vに対して，集合V上の全変換半群$\mathcal{T}_V$の元 $\bar{v}=\begin{pmatrix} v_1, & v, & \cdots & v_i & \cdots \\ v_1 v, & v_2 v, & \cdots & v_i v & \cdots \end{pmatrix}$ を対応させる写像をξとすると，明らかにξは準同型写像であって，<u>ξを半群Vの正則表現</u>（regular representation）と云う。更にξが単射の時，正則表現ξは忠実であると云う。半群Vは（$\forall v\in V$，$vv_i=vv_j$）$\Rightarrow v_i=v_j$ の成立する時，左可約（left reductive）と云う。半群Vの正則表現が忠実である為の必要かつ十分条件はVが左可約なることである。特にVがモノイドの場合，あるいはVが左消去律の成立する半群である場合にはVの正則表現は忠実である。半群Vの正則表現ξによる像半群を$\bar{V}=\{v\xi \mid \forall v\in V\}$で表わす。今入力半群$I$から半群$V$への全準同型写像が存在する場合には$V$の正則表現を使ってオートマトンを定義することが出来る。

<u>定義4.9</u>　Iを入力半群，Vを半群とし写像χをIからVへの全準同型写像とする。Vの正則表現ξによる像半群

を$\bar{V}$とし，$\varphi=\times_\xi$　とおく。この時オートマトン$\mathfrak{A}_V=(V,\bar{V},\varphi,I)$が定義できて，$\mathfrak{A}_V$を半群$V$から生成されたオートマトンと云う。

結論から述べる。オートマタの特性化定理の大略は次の様になる。

定理4.2（特性化定理）

(i)　オートマトン$\mathfrak{A}$が完全である為の必要かつ十分条件はあるアーベル群が存在して，$\mathfrak{A}$はこのアーベル群から生成されたオートマトンに同型なること。

(ii)　オートマトン$\mathfrak{A}$が擬完全である為の必要かつ十分条件はある群が存在して，$\mathfrak{A}$はこの群から生成されたオートマトンに同型なること。

(iii)　$\mathfrak{A}$が強連結な状態独立オートマトンである為の必要かつ十分条件はある右群が存在して，$\mathfrak{A}$はこの右群から生成されたオートマトンに同型なること。

(iv)　$\mathfrak{A}$が強巡回な準状態独立オートマトンである為の必要かつ十分条件はある左単位元を有する半群が存在して，$\mathfrak{A}$はこの半群から生成されたオートマトンに同型なること。

(v)　$\mathfrak{A}$が強巡回な単位型，準状態独立オートマトンである為の必要かつ十分条件はある単位半群が存在して，$\mathfrak{A}$はこの半群から生成されたオートマトンに同型なること。

(vi) $\mathfrak{A}$が強連結なリセットオートマトンである為の必要かつ十分条件はある右零半群が存在して，$\mathfrak{A}$がこの右零半群から生成されたオートマトンに同型になること。

(vii) $\mathfrak{A}$が強巡回な可換オートマトンである為の必要かつ十分条件はある単位可換半群が存在して，$\mathfrak{A}$がこの単位可換半群から生成されたオートマトンに同型なること。

更にオートマトンの準同型写像を媒介として次の様な特性化定理を得ることも出来る。

<u>定義4.10</u> $\mathfrak{A}$が置換オートマトンであるとは各入力が状態集合の置換を行なう時。

<u>定理4.3</u> $\mathfrak{A}$が強連結な置換オートマトンである為の必要かつ十分条件はある群が存在して，$\mathfrak{A}$がこの群から生成されたオートマトン（定理4.2，(ii)より擬完全オートマトン）のある準同型像であること。

§-5. オートマトンの準同型写像による構造の保存性.

簡単に要約を述べる。オートマトン$\mathfrak{A}_1$から$\mathfrak{A}_2$への全準同型写像ηが存在したとする。この時ηは$\mathfrak{A}_1$の構造半群$\mathfrak{T}_1$から$\mathfrak{A}_2$の構造半群$\mathfrak{T}_2$への全準同型写像を誘引する。従って命題2.1からηは$\mathfrak{A}_1$に付随する入力半群から$\mathfrak{A}_2$に付随する入力半群への全準同型写像を誘引する。ηが一般に$\mathfrak{A}_1$から$\mathfrak{A}_2$への準同

型写像の場合には$\mathfrak{U}_1$（又は$\mathfrak{A}_1$に付随する入力半群）から$\mathfrak{U}_2$（又は$\mathfrak{A}_2$に付随する入力半群）のある商半群への全準同型写像を誘引する。自己準同型半群，自己同型群の保存性に関しては，ηは一般に$E(\mathfrak{A}_1)$の中から$E(\mathfrak{A}_2)$への準同型写像を誘引する。$G(\mathfrak{A}_1)$に関しても同様な結果が成立する。また自己同型群の保存性に関してはFleck [2], Bayer [4], Paul [18] 等の積極的な議論があるが，ここではこれ以上議論しない。

前節でオートマトンが状態独立，準状態独立であるという概念が定義導入されたが，次にオートマトンの準同型写像がこの様な性質を如何なる条件のもとに保存するかを考察してみる。この議論は本質的には次節のオートマトンの直積分解と深いつながりを有する。結果を示す。

<u>定理5.1</u>　$\mathfrak{A}$を有限な強巡回準状態独立オートマトンとしηを$\mathfrak{A}$の準同型写像とする。$\mathfrak{A}/\eta$が又準状態独立オートマトンとなる為の必要かつ十分条件は$\eta\circ\eta^{-1}$が半群$(Q, *_{q_0})$の合同関係になること。但しq_0は$\mathfrak{A}$の強生成元とする。

$(Q, *_{q_0})$は定義4.7で定義した演算のもとに状態集合Qがなす左単位元を有する半群である。なおオートマトンが強連結な状態独立オートマトン（従って擬完全，完全オートマトン）の場合には，q_0を任意の状態に固定して上の結果は

無限オートマトンに対して状態独立性（従って擬完全，完全性）を保存する為の必要かつ十分条件として述べることが出来ることを証明出来る。

§-6 オートマトンの直積分解

本節では特に §-4 で導入された種々のオートマタの直積分解について議論する。これらの議論は定理 4.2，4.3 の特性化定理を使ってオートマトンの自己同型群，自己準同型半群，あるいはオートマトンに付随する入力半群の直積分解性と対比して行なわれ，又統一的に議論される。オートマトンの直積の定義は Rabin & Scott [19] に従う。ここで注意しなければならないのは，直積オートマトンの構造半群は各々の因子オートマトンの構造半群の直積には一般的にはならず，部分半群となる。

<u>定義 6.1</u>　オートマトン $\mathfrak{A}_1 = (Q_1, U_1, \varphi_1, I)$ と $\mathfrak{A}_2 = (Q_2, U_2, \varphi_2, I)$ が "関連" しているとは次の条件が成立している時を云う。 $\forall u \in U_1$， $\forall v \in U_2$， $\exists x \in I$

$$u = x\varphi_1 \wedge v = x\varphi_2$$ が成立する。

<u>命題 6.1</u>　オートマタ $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ の直積の構造半群が，$\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ の構造半群の直積に等しくなる為の必要かつ十分条件は $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ が関連していること。

定義6.2　オートマトン $\mathfrak{A}$ がオートマタ $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ の直積に分解されるとは $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$（$\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ の直積）に同型なる時を云う。

また一般にオートマトンが直積に分解される為の必要かつ十分条件はオートマトンの状態集合上の右合同関係の満すべき条件として既に Harrison [17] により示されている。まず半群から生成されたオートマトンの直積分解から議論する。結果を示す。

定理6.1　左可約な半群から生成されたオートマトン $\mathfrak{A}$ が，2つの関連した左可約な半群から生成されたオートマタの直積に分解される為の必要かつ十分条件は $\mathfrak{A}$ に付随する入力半群が2つの半群の直積に分解されること。

一般に左可約でない半群から生成されたオートマトンの直積分解性は定理6.1を証明した手法が使えず必要条件は明らかでない。しかしながら十分条件は成立する。特性化定理4.2中に表われた群，右群，左単位元を有する半群，従って単位半群，右零半群，単位可換半群等は全て左可約な半群であるから，定理4.2中の各オートマトンが関連した2つの同クラスのオートマタの直積に分解される為の必要かつ十分条件はそれらオートマトンに付随する入力半群が2つの半群の直積に分解されることである。ところが次の結果を示すこ

とが出来る。

<u>定理 6.2</u>　$\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ を強連結な状態独立オートマトンとし，直積オートマトン $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ が又強連結な状態独立オートマトンになったとする。すると $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ は関連していなければならない。

定理 6.1，6.2 から次の結果をうる。

<u>定理 6.3</u>　強連結な状態独立オートマトンが２つの強連結な状態独立オートマタの直積に分解される為の必要かつ十分条件はオートマトンに付随する入力半群が２つの半群の直積に分解されること。

そこで次にオートマトンに付随する入力半群とそのオートマトンの自己同型群，自己準同型半群の間の関係について議論する。なおこれに関する議論は Weeg [5, 他]，Tully [20] 等によりも行なわれている。

<u>命題 6.4</u>　$\mathfrak{A}$ を強巡回な単位型準状態独立オートマトンとすると，$\mathfrak{A}$ の自己準同型半群と $\mathfrak{A}$ に付随する入力半群は逆同型である。

従って強巡回な単位型準状態独立オートマタのクラスに属するオートマトンの直積分解に対する必要かつ十分条件は定理 6.1 の表現を変えず "付随する入力半群" の代りに "自己準同型半群" を使用しても同値である。　また強連結な状

態独立オートマトンに対しては，オートマトンの自己準同型半群と自己同型群は一致することが容易に示せるが，更に右群は常に群と右零半群の直積として表現されることと，定理4.2 (ii), (iii), (vi) と定理6.3 から次の結果をうる。

定理6.5　オートマトン$\mathfrak{A}$に関する次の2つの命題は同値である。

(i) $\mathfrak{A}$は強連結な状態独立オートマトンである。

(ii) $\mathfrak{A}$は擬完全オートマトンと強連結なリセットオートマトンの直積に同型である。

ところで今右群をVとし，Vの全ての巾等元のなす集合をE，v_0をVのある巾等元とし，v_0から生成されたVの左主イデアル$G = V \cdot v_0$とすると，Gは群をなし，$V \cong G \times E$であり，更にVから生成されたオートマトン（即ち強連結な状態独立オートマトン）の自己同型群は群Gと逆同型であることを示すことが出来る。オートマトンが擬完全なら定義から強連結な状態独立オートマトンであり，定理6.5, 6.3から次の結果をうる。

定理6.6　強連結な状態独立オートマトン$\mathfrak{A}$は一般に擬完全オートマトン$\mathfrak{A}_G$と強連結なリセットオートマトン$\mathfrak{A}_E$との直積に同型であるが，更に$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{A}_E$と2つの擬完全オートマタ$\mathfrak{A}_{G_1}$と$\mathfrak{A}_{G_2}$との直積に分解される為の必要かつ十

分条件は $G(\mathfrak{A})$ が2つの群の直積に分解されることである。

特に強連結な状態独立オートマトン$\mathfrak{A}$が擬完全オートマトンである場合には上記の強連結なリセットオートマトン$\mathfrak{A}_E$は自明な1状態オートマトンにしかなりえないから，Trauth [3]，Fleck [1] の結果を系として得る。

系6.7　擬完全オートマトン$\mathfrak{A}$が2つの擬完全オートマタの直積に分解される為の必要かつ十分条件は $G(\mathfrak{A})$ が2つの群の直積に分解されること。（Trauth [3]）。

系6.8　完全オートマトン$\mathfrak{A}$が2つのオートマタの直積に分解される為の必要かつ十分条件は $G(\mathfrak{A})$ が2つの群の直積に分解されること。（Fleck [1]）。

なお系6.8中"2つのオートマタ"と云う表現は完全オートマトンの準同型像は完全オートマトンにしかなりえないことによる。　また系6.7，6.8は強連結な置換オートマトンの構造が擬完全オートマトンの構造と密接に関係していることを議論することによっても得ることが出来る。その結果の一部が定理4.3であったが，次にその大略を述べる。

既にFleck [2] によりオートマトン$\mathfrak{A}$の自己同型群 $G(\mathfrak{A})$ の部分群Hに対して，$\mathfrak{A}$の状態集合をHによる可遷類で分割すれば，その分割は右合同関係となり，従って商オートマトン　，これを $\mathfrak{A}/H$ と記し，$\mathfrak{A}$のHを核とする商オー

トマトンと呼ぶ，を定義出来，この時 $\mathfrak{A}/H$ は $\mathfrak{A}$ の準同型像となることが示されている。しかしながら一般にオートマトン $\mathfrak{B}$ をオートマトン $\mathfrak{A}$ の準同型像とした場合に $G(\mathfrak{A})$ に部分群 H が存在して，$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/H$ となり得るとは限らない。しかしながら擬完全オートマトンに対しては次の結果を示すことが出来る。

<u>定理 6.9</u>　$\mathfrak{A}$ を擬完全オートマトンとする。オートマトン $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の準同型像である為の必要かつ十分条件は $G(\mathfrak{A})$ に部分群 H が存在して $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/H$ となること。

なおこの結果より更に強い結果として，強連結なオートマトンに対しては，全ての準同型写像が上述の意味でオートマトンの自己同型群の部分群から誘引される為にはオートマトンは擬完全でなければならない事も示すことが出来る。

上の結果を使って擬完全オートマトンの準同型像を次の様に特性化することが出来る。

<u>定理 6.10</u>（特性化定理）

$\mathfrak{A}$ を擬完全オートマトンとする。

(i) オートマトン $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の準同型像である為の必要かつ十分条件は $G(\mathfrak{A})$ に部分群 H が存在して，$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/H$ となること。この時 $\mathfrak{B}$ は常に強連結な置換オートマトンとなる。

(ii) 擬完全オートマトン $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の準同型像である為の必要

かつ十分条件は $G(\mathfrak{A})$ に正規部分群 H が存在して，$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/H$ となること。（Bayer [4]）。

(iii) 完全オートマトン $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の準同型像となる為の必要かつ十分条件は $G(\mathfrak{A})$ にこの交換子群を含む正規部分群 H が存在して，$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/H$ となること。

ここで特に以下オートマトン $\mathfrak{A}$ を有限な強連結置換オートマトンとする。$\bar{I}$ を $\mathfrak{A}$ に付随する入力半群とすると，$\bar{I}$ は群をなすことを示すことが出来る（即ち $\mathfrak{A}$ は群型であり，又逆も成立する）。そこでオートマトン $\mathfrak{A}_I = (\bar{I}, \sigma_I, \varphi_I, I)$ を $\forall [x] \in \bar{I}$，$\forall y \in I$，$[x]y\varphi = [xy]$ と定義すると，定理4.2 (ii) から $\mathfrak{A}_I$ は擬完全オートマトンとなり，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}_I$ の準同型像になることが証明出来る。従って $G(\mathfrak{A}_I)$ に部分群 H が存在して，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_I/H$ となる。所で $\mathfrak{A}_I$ の構成の仕方から，$\mathfrak{A}$ に付随する入力半群と $\mathfrak{A}_I$ に付随する入力半群は全く同一である。そして擬完全オートマトンに付随する入力半群とそのオートマトンの自己同型群は逆同型であることを今迄の議論に関連して示すことが出来るから，従ってオートマトン $\mathfrak{A}$ に付随する入力半群に $G(\mathfrak{A}_I)$ の部分群 H に同型な部分群 K が存在することになる。K を有限強連結置換オートマトン $\mathfrak{A}$ に付随する入力半群 $\bar{I}$ の"自然な部分群"と呼ぶことにする。系6.7，6.8 と同じ

く系として含む強連結な置換オートマトンに対する結果を次に示す。

<u>定理 6.11</u>　有限な強連結，置換オートマトン $\mathfrak{A}$ が 2 つのオートマタの直積に分解される為の必要かつ十分条件は $\mathfrak{A}$ に付随する入力"群"に 2 つの部分群 K_1，K_2 が存在して，次の条件を満たすこと。$K_1 \cap K_2 = K$，$K_1 K_2 = I$。ここに K は $\mathfrak{A}$ に付随する入力群 I の"自然な部分群"である。

又強連結な置換オートマトン $\mathfrak{A}$ が擬完全である時には，$\mathfrak{A}$ に付随する入力群の自然な部分群は自明な単位群であるから次の Fleck [2] の結果も系としてうる。

<u>系 6.12</u>　擬完全オートマトン $\mathfrak{A}$ が 2 つのオートマタの直積に分解される為の必要かつ十分条件は $G(\mathfrak{A})$ に 2 つの部分群 H_1，H_2 が存在して次の条件を満たすこと。

$H_1 \cap H_2 = \{e\}$，$H_1 H_2 = G(\mathfrak{A})$　（Fleck [2]）。

§-7　強巡回な単位型準状態独立アクセプター.

本節では前節までの構造論で議論されてきた種々のオートマトンの能力について議論して，先に定義された強巡回な単位型準状態独立オートマタの受理するテープの集合は正確に正規集合の族に一致することを示す。なおアクセプターの定義は従来の定義（例えば Harrison [17]）に従う。結果

のみを示す。

<u>定理7.1</u>　Σを有限アルファベットの集合とする。Σ^*の部分集合Tに関する次の2つの命題は同値である。

(i)　Tは正規集合である。

(ii)　Tはある強巡回な単位型準状態独立有限アクセプターにより受理される。

なお置換オートマトンに対する能力に関してThierrien [21] の結果が知られている。

§-8　おわりに．

本論文ではオートマトンの構造を半群論的に統一して議論している。その結果Fleck [1] に始まったオートマトンの代数的理論が拡張，一般化統一され，かつオートマトンの構造と半群の構造との対比が明らかにされた。なお本稿ではオートマトンの直並列分解に関する諸結果，Krohn & Rhodes [16] の理論との関連性を議論した諸結果については，紙面の都合上紹介しなかった。これらの結果は又別の機会に報告したい。またオートマトンの構造を理蔵する問題を代数的に議論することは未解決の問題の一つである。

尚

本論文は東北大学，電気通信研究所，大泉研究室で行

なわれた研究であり，増永良文（博），猪瀬武久（修），植松尭雄（修）の卒業論文の一部を主としてまとめたものである。またこの研究に関する3編の論文が現在電子通信学会論文誌C分冊に掲載され，あるいは掲載が決定しているので参照されたい［24］,［25］,［26］。

文献

[1] A.C. Fleck : "Isomorphism Group of Automata" J. ACM 9, 4, p-469 (Oct.1962)

[2] A.C. Fleck "On The Automorphism Group of Automata" J. ACM 12, 4, p-566 (Oct 1965)

[3] C.A. Jr. Trauth: "Group- Type Automata" J. ACM 13, 1, p-170 (Jan.1966)

[4] R. Bayer; "Aotomorphism Groups and Quotients of Strongly Connectted Automata and Monadie Algebras" Rep. No.204, Dep. of Computer Science, Univ. Illinois (1966)

[5] G.P.Weeg: "The Group and Semigroup Associated with Automata" Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata, p-257, Polytechnique Press (1962)

[6] G.P. Weeg: "The Structure of an Automaton and Its Operation-Preserving Transformation Group" J. ACM 9,3, p-345(July 1962)

[7] G.P.Weeg: "The Automorphism Group of the Direct Product of Strongly Related Automata" J. ACM 12, 2, p-187 (Oct. 1965)

[8] G.P.Weeg: The Structure of the Semigroup Assoiated with Automata "Computer and Information Sciences", p-230,29, Spartan Books (1964)

[9] R.H. Oehmke: "On the Structure of an Automaton and Its Input Semigroup" J.ACM 10,4, p-521 (Oct. 1963)

[10] B.Barnes: "Groups of Automorphisms and Sets of Equivalence Classes of Input for Automata" J. ACM 12, 4, p-561 (Oct. 1965)

[11] H.E. Pickett: "Note Concerning The Algebraic Theory of Automata" J, ACM 14, 2, p-382 (April 1967)

[12] M.A. Arbib: "Automaton Automorphisms" Inf. & Cont. 11, 1/2, p-147 (July -Aug. 1967)

[13] J.Robert Jump "A Note on the Iterative Decomposition of Finite Automata" Inf.& Cont. Vol.15 (1969)

[14] T.Sunaga: "An Algebraic Theory of The Analysis and Sythesis of Automata" Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata, p-358, Polytechique Press (1962)

[15] J.C. Beatty: "On Some Properties of the Semigroup of a Machine which are Preserved Under State Minimization" Inf. & Cont. 11, 3, p-290 (Sep.1967)

[16] K.Krohn & J.Rhodes: "Algebraic Theory of Machines. 1" Trans. Am. Math. Soc. (1965)

[17] M.A. Harrison: "Introduction to Switching and Automata Theory" MaGraw Hill Book Co., Newyork, 1965

[18] M. Paul: "On the Automorphism Group of a Reduced Automata " IEEE Conference Record of 1966 7th Ann. Symp. on Switching and Automata Theory, p-298 (1966)

[19] M.O. Rabin & D. Scott: "Finite automata and their decision problems" IBM J. Rev. Feb. 3 (1959)

[20] E.J. Tully. Jr.: "Representation of a semigroup by transformation acting on a set" Amer. J. of Mathematics Vol. 83 (1961)

[21] G. Thierrion: "Permutation Automata" , Mathematical Systems Theory 2, p-83 (1968)

[22] A.H. Clifford & G.B. Preston: "The Algebraic Theory of Semigroups" Vol. 1 American Mathematical Society (1961)

[23] 仝上 Vol. 11 (1967)

[24] 増永, 野口. 大泉 : "オートマトンの構造の半群論的考察" 電子通信学会誌 Vol. 53-C, No.3 (1970.3月)

[25] 猪瀬, 増永, 野口. 大泉 : "オートマトンの構造の半群論的考察 ―自己準同型半群により規定されるオートマタ―" 電子通信学会誌 論文誌 C分冊 照会後採録決定.

[26] 増永, 野口. 大泉 : "群によって規定されるオートマタの構造論" 電子通信学会誌 論文誌 C分冊 掲載決定 (1971. 6月号予定).