数理解析研究所講究録
124巻 1971年 73-83

von Neumann algebra の quotients について

東北大 教養 武元英夫

von Neumann algebra の reduction theory の議論において必要な quotients について話を進めて行こう。quotient algebra が von Neumann algebra になるかどうかという問題に対して、今までに色々な結果が得られている。特に、F. B. Wright [6] 境 [1] に見られる様に finite von Neumann algebra の maximal ideal による quotient algebra は finite factor であることが分っている。更に、それの拡張として、最近、竹崎 [4] がある種の結果を得ている。finite case 以外として、即ち、properly infinite von Neumann algebra に対しては、predual が separable の時、quotient algebra が von Neumann algebra になる必要十分条件は ideal が σ-weakly closed であることが [2], [3] で分っている。

残る問題として、finite な von Neumann algebra に対して、どういう条件の下で quotient algebra が von Neumann algebra になるかということが考えられる。この問題の部分的な解答として，最近，Vesterstrøm [5] の結果を見ることが出来る。そこで，本講演は Vesterstrøm [5] の結果を紹介することに中心をおく。

まず，main theorem を述べておく。

定理 1。J を finite von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ における uniformly closed two-sided ideal とする。今，$\mathfrak{A}/J$ が von Neumann algebra と仮定すると次の二つの事柄が成立する。

(1) J は maximal ideals の intersection である。

(2) $\mathfrak{A}/J$ の center が von Neumann algebra である。

定理 2。$\mathfrak{A}$ を center $\mathfrak{Z}$ をもつ von Neumann algebra とし，J を $\mathfrak{A}$ における uniformly closed two-sided ideal とする。今，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}$, J に対して次の三つの性質が成立しているとする。

(1) J は maximal ideals の intersection である。

(2) $\mathfrak{A}/J$ の center が von Neumann algebra である。

(3) $\mathfrak{A}/J$ の center が σ-finite である。

その時，$\mathfrak{A}/J$ は von Neumann algebra である。

定理 1 の証明において (2) は明らかである。(1) の方は，finite

von Neumann algebra と準同型な von Neumann algebra が又 finite になることと，finite von Neumann algebra は strongly semi-simple ということから分る。

従って，これからは定理2を証明することを目的とする。Vesterstrøm は定理2において $\mathfrak{A}$ が σ-finite と仮定しているがその条件は本質的でないのでここでは，その条件を除いて述べておき，それを証明する。今後，定理2の仮定の下で話を進める。

$C(\Omega) \cong \mathfrak{Z}$ なる hyperstonean space Ω に対して，finite von Neumann algebra における maximal ideal は Ω の元 ω に対して $\mathfrak{M}_\omega = \{a \in \mathfrak{A} ; (a^*a)^{\natural\wedge}(\omega) = 0\}$ で決定されることは分っている。$\mathfrak{M}_\omega$ に対して $\mathfrak{N}_\omega = \mathfrak{M}_\omega \cap \mathfrak{Z}$ を定義する。$\mathfrak{M}_\omega$, $\mathfrak{N}_\omega$ から次の様な定義をする。

<u>定義1.</u>　$S \subset \Omega$；部分集合に対して

$$\mathfrak{M}_S = \bigcap_{\omega \in S} \mathfrak{M}_\omega = \{a \in \mathfrak{A} ; (a^*a)^{\natural\wedge} = 0 \text{ on } S\}$$

$$\mathfrak{N}_S = \bigcap_{\omega \in S} \mathfrak{N}_\omega = \{a \in \mathfrak{Z} ; a^\wedge = 0 \text{ on } S\}$$

定義1の下で今 J が maximal ideals の intersection であることより Ω の closed subset S が存在して $J = \mathfrak{M}_S$ となる。すると，$I = J \cap \mathfrak{Z}$ とおくと $I = \mathfrak{N}_S$ である。

$\mathfrak{A} \ni x$ の $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_\omega$ の canonical image を $x(\omega)$ とおき，

$\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ への canonical image を $\hat{x}$ とおく。すると、$\{\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega\}$ の C^*-sum を $\sum_{\omega\in S}\oplus\, \mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ とおくと $\mathfrak{A}/\mathfrak{J} \ni \hat{x} \longrightarrow \sum_{\omega\in S}\oplus\, x(\omega) \in \sum_{\omega\in S}\oplus\, \mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ で表わされる対応でもって $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ と $\sum_{\omega\in S}\oplus\, \mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ は *-同型となる。従って、$\|\hat{x}\| = \sup_{\omega\in S}\|x(\omega)\|$ になる。

$\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ が finite factor 更に、$\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ における center valued trace $\hat{\natural}$ は $x(\omega)^{\hat{\natural}} = x^{\natural\wedge}(\omega)$ であることを考えると、$x\in\mathfrak{A}$ 且 $\hat{x}=0$ ならば $x^{\natural\wedge}=0$ on S である。そこで今

$\sharp$; $\mathfrak{A}/\mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{Z}/\mathfrak{I}$ $\quad \hat{x} \longrightarrow x^{\natural}|S$ によって定義するすると前の事柄より $\sharp$ は well-defined である。

定理2の証明は、境[1]で見られる証明方法を考えてやって行く。$\mathfrak{A}\ni a, x$ に対して $\Phi_a(x) = (ax)^{\natural}$ とおくと、$\Phi_a : \mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{Z}$ bounded $\mathfrak{Z}$-module homomorphism となる。$\hat{B}_{\mathfrak{Z}}$ を $\{\Phi_a ; a\in\mathfrak{A}\}$ の bounded $\mathfrak{Z}$-module homomorphism 全体から Banach space における closure とする。それに対して、次の境[1]の結果を得る。

<u>補題1</u>。$\hat{B}_{\mathfrak{Z}}\ni\Phi$ に対して次の事柄が挙げられる。

(1) $x\in\mathfrak{m}_\omega \Rightarrow \Phi(x)\in\mathfrak{m}_\omega$.

(2) $\Phi(\omega)$; $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega \ni x(\omega) \longrightarrow \Phi(x)^{\wedge}(\omega)$ は $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ 上の bounded linear functional である。

(3) $\|\Phi\| = \sup_{\omega\in\Omega}\|\Phi(\omega)\|$ 。

(4) $\exists u \in \mathfrak{A}$; partial isometry

$$\|\Phi(\omega)\| = \Phi(u)^\wedge(\omega) \quad \text{for } {}^\forall \omega \in \Omega .$$

(5) ρ ; $\widehat{B}_{\mathfrak{Z}} \ni \Phi \longrightarrow \Phi(\omega) \in (\mathfrak{A}/m_\omega)^*$

$\hat{\rho}$; $\widehat{B}_{\mathfrak{Z}}/\ker\rho \longrightarrow (\mathfrak{A}/m_\omega)^*$ とすると $\hat{\rho}$ は isometry である。

上の境の結果から次の事が簡単に分る。

<u>補題2.</u> $\widehat{B}_{\mathfrak{Z}} \ni \Phi$ に対して次の事柄が挙げられる。

(1) $x \in J \implies \Phi(x) \in J$

(2) induced map $\hat{\Phi}$; $\mathfrak{A}/J \to \mathfrak{Z}/I$ defined by $\hat{\Phi}(\hat{x}) = \widehat{\Phi(x)}$ は norm bounded である。

(3) $\|\hat{\Phi}\| = \sup_{\omega \in S} \|\Phi(\omega)\|$ 。

(4) $\{\hat{\Phi}$; $\Phi \in \widehat{B}_{\mathfrak{Z}}\}$ は $\mathfrak{A}/J$ から $\mathfrak{Z}/I$ への bounded linear mappings の closed subset である。

今, $\mathfrak{Z}/I \cong C(S)$ ということと, $\mathfrak{Z}/I$ が σ-finite であるから S 上 normal faithful measure μ が存在する。$E \overset{\text{def}}{=} \{\mu \circ \hat{\Phi}$; $\Phi \in \widehat{B}_{\mathfrak{Z}}\} \subset (\mathfrak{A}/J)^*$, E の closure を F とおく. その時, 次の事柄が云える。

<u>補題3.</u> (1) E, F は invariant subspaces である。

(2) $f(\hat{x})=0$ for $\forall f\in E \Rightarrow \tilde{x}=0$.

(3) $\|\mu\circ\hat{\Phi}\| = \int_S \|\Phi(\omega)\|\, d\mu(\omega)$.

(4) $\mu\circ\hat{\Phi}\in E$ に対して $\exists\, \hat{v}\in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$; $\|\hat{v}\|\leq 1$ 且

$\mu\circ\hat{\Phi}(\hat{v}) = \|\mu\circ\hat{\Phi}\|$

E, F が invariant subspace であることが分った。E° を $(\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**}$ における E の polar とすると、E° は $\sigma((\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**}, (\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{*})$-closed な two-sided ideal となる。従って、$(\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**}/E^\circ$ は von Neumann algebra であってその predual は F である。

<u>補題4.</u>

(1) $(\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**}/E^\circ$ は finite, normal faithful trace をもつ。

(2) Composition $\mathfrak{A}/\mathfrak{J} \longrightarrow (\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**} \longrightarrow (\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**}/E^\circ$ は $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ を C^*-algebra として $(\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**}/E^\circ$ に induce する。

補題4の(1)は trace として $\tilde{x}\rightarrow\mu(\hat{x}^{\#})$ をとって来ると補題3.(2)が faithful であることが分り、求めるものとなる。(2)の方は、補題3.(2)から分る。

補題4を考えると $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ と $(\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^{**}/E^\circ$ が一致することを示せば十分である。それを示すにあたって境[1]で次の事が示さ

れている。

補題5. $\mathfrak{A}$ を faithful normal functional をもつ von Neumann algebra とし $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A}$ の C^*-subalgebra とする。もし $\mathfrak{A}_*^* \ni \forall\varphi$ に対して $\mathfrak{B}$ の元 b, $\|b\| \leq 1$ が存在して $\varphi(b) = \|\varphi\|$ になる時 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ となる。

上の境の結果をその方法を使うと次の事柄が示される.

定理3. $\mathfrak{A}$ を finite von Neumann algebra, $\mathfrak{Z}$ を $\mathfrak{A}$ の center とする。今 $\mathfrak{Z}$ の spectrum Ω の元 ω に対して π_ω を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}/m_\omega$ への canonical mapping とする。更に $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A}$ の C^*-subalgebra で $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{Z}$ であるものとし, $\mathfrak{A}(\omega) = \pi_\omega(\mathfrak{A})$ とおく。その時, 次の事は同値である。

(1) $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ の von Neumann subalgebra である。

(2) $\forall a \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A} \ni v$, $\|v\| \leq 1$ が存在して次を満す $\|\Phi_a(\omega)|\mathfrak{A}(\omega)\| = \Phi_a(v)^\wedge(\omega)$ for $\forall\omega \in \Omega$。

上の二つの事柄から求める事の議論を考えていく。

補題6. $\forall f \in F$ に対して, 次の (1)―(4) を満す $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty \subset \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{Z}}$ と $\{\Phi(\omega)\}_{\omega \in S}$ が存在する。

(1) $\mu \circ \widehat{\Phi}_n \longrightarrow f$.

(2) $\Phi_n(\omega) \longrightarrow \Phi(\omega)$ for μ-a.e. ω.

(3) $x \in \mathfrak{A}$ に対して, $\omega \longrightarrow \Phi(\omega)(x(\omega))$ は μ-integrable で

且 $f(\hat{x}) = \int_S \Phi(\omega)(x(\omega))\,d\mu(\omega)$ である。

(4) $\omega \longrightarrow \|\Phi(\omega)\|$ は μ-integrable 且 $\|f\| = \int_S \|\Phi(\omega)\|\,d\mu(\omega)$。

補題6はE, Fの定義を考えて, Riesz-Fisher theoremの証明と同じ様に出来る。

<u>補題7。</u> $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in F$ に対して, $\mathfrak{Z}/I$ の projection $\hat{z}$ と $\widehat{B}_{\mathfrak{z}}$ の元 Φ が存在して次の事が成立する。

(1) $\mu(1-\hat{z}) < \varepsilon$ (2) $f(\hat{z}\hat{x}) = \mu\circ\hat{\Phi}(\hat{x})$ for $\forall x \in \mathfrak{A}$。

補題7の証明は補題6と measure theory における Lusin の定理の手法を考える事によって示される。

<u>補題8。</u> $f \in F$, $\hat{z}_i \in (\mathfrak{Z}/I)_p$, $\Phi_i \in \widehat{B}_{\mathfrak{z}}$ $(i=1,2)$ に対して $f(\hat{x}\hat{z}_i) = \mu\circ\hat{\Phi}_i(\hat{x})$ for $x \in \mathfrak{A}$, $i=1,2$, が成立している時, $\widehat{B}_{\mathfrak{z}}$ の元 Φ が存在して $f(\hat{x}\hat{z}) = \mu\circ\hat{\Phi}(\hat{x})$ where $z = z_1 \vee z_2$ が成立する。

これは $\Phi = z_1\Phi_1 + (z_2 - z_1 z_2)\Phi_2$ とおくと良い。

補題9。 $^\forall f \in F$ に対して，$\{\Phi_n\} \subset \widetilde{B}_3$ と $\{z_n\} \subset \mathfrak{Z}_p$: orthogonal が存在して，

$$f(\hat{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\circ\widetilde{\Phi}_n(\hat{x}\hat{z}_n) \quad \text{for} \quad x \in \mathfrak{A}$$ が成立する。

これは補題7, 8から明らかである。

定理4。 $^\forall f \in F$ に対して，

$\exists\, \hat{v} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$; $\|\hat{v}\| \leq 1$, $f(\hat{v}) = \|f\|$ 。

証明。補題9における $\{z_n\}$, $\{\Phi_n\}$ をとると，$\|f\| \leq \sum \|\mu\circ\Phi_n\|$ である。一方，補題3.(4) を $\mu\circ\widetilde{\Phi}_n$ に適用すると，

$\exists\, v_n \in \mathfrak{A}$; partial isometry

$$\mu\circ\Phi_n(\hat{z}_n\hat{v}_n) = \|\mu\circ\hat{z}_n\widetilde{\Phi}_n\|$$

今 $v = \sum z_n v_n$ とおくと，$v \in \mathfrak{A}$ 且 $\|v\| \leq 1$, $\widehat{vz_n} = \hat{v}_n\hat{z}_n$ である。

従って，
$$\begin{aligned} f(\hat{v}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\circ\widetilde{\Phi}_n(\hat{v}\hat{z}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\circ\widetilde{\Phi}_n(\hat{v}_n\hat{z}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu\circ\hat{z}_n\widetilde{\Phi}_n\| \end{aligned}$$

従って，$f(\hat{v}) = \|f\|$ q.e.d.

以上の事から定理2が証明される。

以上によってfinite von Neumann algebraのquotient algebraがどういう条件の下でvon Neumann algebraになるかということが分った。しかし，定理2における条件(ii)を見ると，abelian caseにおいて別に考えなければないということが分る。しかし，abelian caseにおいてはどういう条件の下でquotient algebraになるかどうかということが分らないのでここではquotient algebraがvon Neumann algebraになるはとならない時の例を挙げて終りとする。

<u>定理5</u>。次のどの場合においても$\mathfrak{Z}_1 \to \mathfrak{Z}_2$上への相異なるkernelをもつnon-normal $*$-homomorphismが可付番存在する。

(1) $\mathfrak{Z}_1 = \ell^\infty(N)$, $\mathfrak{Z}_2 = \ell^\infty(N)$

(2) $\mathfrak{Z}_1 = L^\infty(0,1)$, $\mathfrak{Z}_2 = \ell^\infty(N)$

(3) $\mathfrak{Z}_1 = L^\infty(0,1)$, $\mathfrak{Z}_2 = L^\infty(0,1)$

<u>定理6</u>。$\mathfrak{Z}$を$L^\infty(0,1)$又は$\ell^\infty(N)$とした時，imageがvon Neumann algebraでなく，且互いに相異なるkernelを持つ$*$-homomorphismが可付番個存在する。

References

[1] S. Sakai ; The theory of W^*-algebras, Lecture Note, 1962.

[2] H. Takemoto ; On the homomorphism of von Neumann algebra, Tôhoku Math. J., 21 (1969), 152-157.

[3] H. Takemoto ; Complement to "On the homomorphism of von Neumann algebra", Tôhoku Math. J., 22 (1970), 210-211.

[4] M. Takesaki ; The quotient algebra of a finite von Neumann algebra, Pacific J., (1971).

[5] J. Vesterstrøm ; Quotients of finite W^*-algebras, (Preprint).

[6] F. B. Wright ; A reduction theory for algebras of finite type, Ann. Math., 60 (1954), 560-570.