数理解析研究所講究録
124巻 1971年 1-19

Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra.

茨城大 工短　芳賀義則

§0. まえがき.

中村－武田による finite factor に対する Galois 理論の一連の研究 [8]～[11] を M. Henle は一般の von Neumann algebra に拡張する事を試みたが，その最初の原稿の誤りが武田によって指摘された。それを修正したものも満足すべきものとは思えない。その一つの理由は，full group の概念の分析が不足しているため定理の設定が不十分であることによると思われる.

武田－芳賀 [5] は Dye による abelian algebra 上の full group の概念を非可換な場合へ拡張することによって Galois theory の いわゆる Fundamental theorem の構造を明らかにすることができたと考える。その大雑把な筋道は次の通りである。

以下特に断らない限り$\mathcal{A}$は von Neumann algebra, Gは$\mathcal{A}$上の(*-) automorphisms の可算群とする。 Kallman [7] は automorphism の free action の概念を一般化したが，それは factor $\mathcal{A}$ 上の outer automorphism と abelian algebra $\mathcal{A}$上の free action の概念を統一したものである。一方我々は abelian algebra $\mathcal{A}$ 上の automorphism の absolutely fixed なる概念を非可換の場合に拡張することによって full group の概念を一般化する。しかるとき長田 [1] の定理を非可換な場合へ拡張して freely acting group G の full group [G] の元を cross product $G \otimes \mathcal{A}$ の内部自己同型として characterize できる。それを用いて Dye の一定理を拡張すれば full group [G] の full subgroups と $G \otimes \mathcal{A}$ の $1 \otimes \mathcal{A}$ を含む subalgebras との間に1対1の自然な対応が存在することが知られる。この対応を commutants に移したものが Galois の対応に外ならない。ただし expectation の概念を自由に用いるために Dye の対応では$\mathcal{A}$が，Galois 対応では$\mathcal{A}'$が有限型であるとする。

§1. Free action と full group.

<u>定義 1</u> (Kallman) $\mathcal{A}$ 上の automorphism α が freely acting であるとは

(*) $$AB = \alpha(B)A \qquad \text{for all } B \in \mathcal{A}$$

ならば $A=0$ なることである. Gが freely acting on $\mathcal{A}$ であるとは, 単位元1以外の $g \in G$ がすべて freely acting なることとする.

定義 2. Pを$\mathcal{A}$の central projection とするとき, $\mathcal{A}$上の automorphism α が locally inner on P であるとは, $\mathcal{A}$の適当な partial unitary $V_{\alpha,P}$:

$$V_{\alpha,P} V_{\alpha,P}^* = V_{\alpha,P}^* V_{\alpha,P} = P$$

によって

$$\alpha(PB) = V_{\alpha,P} B V_{\alpha,P}^* \qquad (B \in \mathcal{A})$$

と表わされることをいう.

容易に分かるように,

補題 1. αが central projections の族$\{P_i\}$上で locally inner ならば, αは $\vee_i P_i$ 上で locally inner である.

また, 基本的な補題として,

補題 2. $\mathcal{A}$上の automorphism αが $A \in \mathcal{A}$ に対して (*) を満たすならば, αは A の central support 上で locally inner である.

証明. $A = W|A|$ を polar decomposition とするとこの W を $V_{\alpha,P}$ として α は locally inner である.

さて，補題1によって，その上でαが locally inner であるような unique maximal central projection F_α が存在する。対応する V_{α, F_α} を単に V_α と書くことにする。Dye による free action の定義と平行して次の系が得られる。

<u>系.</u>　α : freely acting $\rightleftarrows$ $F_\alpha = 0$.

次に，$F(\alpha, \beta) = F_{\alpha^{-1}\beta}$ とおいて full group を次のように定義する．これは Dye の定義の自然な拡張である．

<u>定義 3</u>.　G を $\mathcal{A}$ 上の automorphisms の（可算とは限らない）群とするとき

$$\sup_{g \in G} F(\alpha, g) = I$$

であるような$\mathcal{A}$上の automorphisms の全体を [G] で表わし G の full group とよぶ。また G = [G] なる群は full であるという。

このとき，Dye [3] と同様にして次の補題を得る。

<u>補題 3</u>.　(i)　[G] は $\mathcal{A}$ 上の automorphisms の群である。

(ii)　[[G]] = [G]

(iii)　[G] は次のように表わされる $\mathcal{A}$ の automorphism α の全体と一致する。即ち

$$\alpha(A) = \sum_n P_n g_n(VAV^*) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

ただし $g_n \in G$, V は $\mathcal{A}$ の unitary 元，また $\{P_n\}$, $\{g_n^{-1}(P_n)\}$ は互いに直交する central projections で和は I である。

(iv) $\mathcal{A}$ が finite で G の元が $\mathcal{A}$ の trace を preserve するならば, $[G]$ の元も同様である.

§ 2. Cross product.

cross product と expectation について簡単に説明し, 長田の定理を非可換な場合へ拡張する.

$\mathcal{A}$ は separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上に act するとする. まず $G\otimes\mathfrak{H}$ は formal sums

$$\sum_{a\in G} a\otimes\xi_a \qquad (\xi_a\in\mathfrak{H})$$

で $\quad \|\sum_{a\in G} a\otimes\xi_a\|_{G\otimes\mathfrak{H}} = \left(\sum_{a\in G}\|\xi_a\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} < \infty$

なるもの全体からなる Hilbert space とする。operation は

$$(a\otimes\xi_a)+(a\otimes\eta_a) = a\otimes(\xi_a+\eta_a)$$

$$\lambda(a\otimes\xi_a) = a\otimes\lambda\xi_a \qquad (\lambda : \text{complex})$$

で定義する。この $G\otimes\mathfrak{H}$ 上で operator $g\otimes A$ $(g\in G,\ A\in\mathcal{A})$ を

$$(g\otimes A)(a\otimes\xi) = ag^{-1}\otimes a(A)\xi$$

で定義すると

$$(g\otimes A)(h\otimes B) = gh\otimes h^{-1}(A)B$$

$$(g\otimes A)^* = g^{-1}\otimes g(A^*).$$

cross product $G\otimes\mathcal{A}$ とは space $G\otimes\mathfrak{H}$ 上で $\{g\otimes A \mid g\in G,\ A\in\mathcal{A}\}$ によって生成される von Neumann algebra をいう。

$1\otimes\mathcal{A}$ は $G\otimes\mathcal{A}$ の von Neumann subalgebra で $\mathcal{A}$ と代数同型であるから，以後 $A\in\mathcal{A}$ と $1\otimes A\in 1\otimes\mathcal{A}$ を identify する．また $g\otimes I$ は $G\otimes\mathfrak{H}$ 上の unitary operator で，$\mathcal{A}$ 上に automorphism g を induce する．なお $G\otimes\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の表現に無関係に定まることが知られている。

次に，$\mathcal{A}$ からその von Neumann subalgebra $\mathcal{B}$ への expectation とは，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への positive $*$-linear mapping $\Phi_{\mathcal{B}}$ で，$\Phi_{\mathcal{B}}(I)=I$ かつ

$$\Phi_{\mathcal{B}}(BA)=B\,\Phi_{\mathcal{B}}(A) \qquad (A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B})$$

なるものをいう。容易に分かるように

$$\Phi_{\mathcal{B}}(A^*A)\geqq\Phi_{\mathcal{B}}(A)^*\,\Phi_{\mathcal{B}}(A)$$

であり，また $\mathcal{B}$ は $\Phi_{\mathcal{B}}$ の fixed points の set に一致する。

特に $\mathcal{A}$ が finite のとき，その faithful normal trace を τ とすると，$\mathcal{A}$ から任意の von Neumann subalgebra $\mathcal{B}$ 上への faithful normal expectation で

$$\tau(\Phi_{\mathcal{B}}(A)B)=\tau(AB) \qquad (B\in\mathcal{B})$$

なるものが unique に存在することは周知である。$A\in\mathcal{A}$ の trace norm を $\|A\|_2=(\tau(A^*A))^{1/2}$ で定義すれば，$\|\Phi_{\mathcal{B}}(A)\|_2\leqq\|A\|_2$ である。

一般の cross product $G\otimes\mathcal{A}$ で，P_g を $G\otimes\mathfrak{H}$ から $g\otimes\mathfrak{H}$ への projection とし $T\in G\otimes\mathcal{A}$ に対して

$$\Phi(T) = \sum_{g\in G} P_g T P_g$$

とおけば，Φ は $G\otimes\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ 上への faithful normal expectation である．ρ を $\mathcal{A}$ の faithful normal state とすると，それは $\rho = \rho\circ\Phi$ によって $G\otimes\mathcal{A}$ の faithful normal state に拡大できる．よって，特に $\mathcal{A}$ が finite ならば $G\otimes\mathcal{A}$ も finite である．また，$\|T\|_\rho = (\rho(T^*T))^{1/2}$ によって $\mathcal{A}$ 上にも，$G\otimes\mathcal{A}$ 上にも Hilbert norm を定義できる．この norm による pre-Hilbert space $\mathcal{A}$ の completion を $\mathfrak{H}$ とすれば，$\mathfrak{H}$ は state ρ による $\mathcal{A}$ の Gelfand-Segal 表現空間である。同様に，$G\otimes\mathcal{A}$ の completion は ρ による $G\otimes\mathcal{A}$ の表現空間であって，それは $G\otimes\mathfrak{H}$ と identify される．

$G\otimes\mathcal{A}$ の元は $G\otimes\mathfrak{H}$ の元とみなすことができるから $T\in G\otimes\mathcal{A}$ は ρ-norm で converge する Fourier 展開

$$T = \sum_{g\in G} g\otimes T_g \qquad (T_g\in\mathcal{A})$$

をもつ．このとき実は

$$\Phi\left(\sum_g g\otimes T_g\right) = T_1$$

である．

さて，長田 [1] の定理を拡張しよう．

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{U\in (G\otimes\mathcal{A})_u \mid U\mathcal{A}U^* = \mathcal{A}\}$$

とすると $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ の元は $\mathcal{A}$ の automorphism を induce する．U で induce される automorphism を φ_U で表わす事にする．

<u>定理 1</u>　G が freely acting on $\mathcal{A}$ であれば，任意の $\alpha \in [G]$ は $G \otimes \mathcal{A}$ の inner automorphism に拡大できる。逆に $U \in N(\mathcal{A})$ で induce される $\mathcal{A}$ 上の automorphism は $[G]$ に属する。

証明。$g \in G$ に対して $P_g = F(\alpha, g)$ とおけば，$\{P_g\}$ は互いに直交する central projections の族で $\sum P_g = I$ である。しかるとき $U = \sum_g g \otimes V^*_{\alpha^{-1}g}$ が $G \otimes \mathcal{A}$ の unitary operator であって，それによって induce される inner automorphism は α の extension である事は容易に分かる。逆に α を $U = \sum_g g \otimes A_g \in N(\mathcal{A})$ で induce される $\mathcal{A}$ の automorphism とすれば，$U(1 \otimes B) = (1 \otimes \alpha(B))U$ から

$$A_g B = g^{-1}\alpha(B) A_g \qquad (B \in \mathcal{A},\ g \in G)$$

が得られ，よって補題 2 により $g^{-1}\alpha$ は A_g の central support P_g 上で locally inner である。よって $P_g \leqq F(\alpha, g)$。また，$g \neq h$ ならば $g^{-1}h = (g^{-1}\alpha)(h^{-1}\alpha)^{-1}$ は locally inner on $P_g P_h$ であるが，G が freely acting だから補題 2 の系によって $\{P_g\}$ は互いに直交することになる。一方，U が unitary であることから $\sum P_g = I$ が得られるから

$$\sup_{g \in G} F(\alpha, g) \geqq \sum_g P_g = I$$

よって $\alpha \in [G]$。

次の section で屢々用いる補題を述べておく。証明は直接計算すれば簡単である。

補題 4. G が freely acting on $\mathcal{A}$ ならば

$$(G \otimes \mathcal{A}) \cap (1 \otimes \mathcal{A})' = 1 \otimes Z$$

ただし Z は $\mathcal{A}$ の center である。

§ 3. Dye の対応.

ここでは次の定理の証明を目標とする。

定理 2 $\mathcal{A}$ は finite, G は freely acting on $\mathcal{A}$ とする。このとき [G] の full subgroups K 全体の lattice と, $G \otimes \mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ の間の von Neumann subalgebras $\mathcal{B}$ (以下 intermediate subalgebra という) 全体の lattice とは同型である。その同型は K に subalgebra

$$\mathcal{B}(K) = \mathcal{R}[U \mid \varphi_U \in K]$$

を, $\mathcal{B}$ には full group

$$K(\mathcal{B}) = [\varphi_U \mid U \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}]$$

を対応させることによって得られる。

以下証明のための補題を準備するが, Dye の定理 ([4], Prop. 6.1) は cross product を用いていえば, 上の $\mathcal{A}$ が abelian の場合であることが分かり, 我々の証明もその方針は Dye と同じである。

この section では $\mathcal{A}$ は finite とし，その faithful normal trace を τ で表わす．また G は常に freely acting on $\mathcal{A}$ とする。前 section で述べたように $G\otimes\mathcal{A}$ はまた finite で τ は $G\otimes\mathcal{A}$ に拡大できる。そして $G\otimes\mathcal{A}$ からすべての von Neumann subalgebra 上への natural expectation が unique に存在する．また容易に分かるように

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{U \in (G\otimes\mathcal{A})_u \mid U\mathcal{A}U^* = \mathcal{A}\}$$

に対して $\mathcal{R}[\mathcal{N}(\mathcal{A})] = G\otimes\mathcal{A}$ である．

mapping $U \to \varphi_U$ は $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ から $\mathcal{A}$ 上の trace preserving automorphisms 全体の群の中への homomorphim でその kernel は $\mathcal{A}$ の center Z の unitary 全体の群 Z_u である．群 $[\varphi_U \mid U \in \mathcal{N}(\mathcal{A})]$ は定理 1. により $[G]$ と一致し，従ってそれ自身 full である。また，$G\otimes\mathcal{A}$ の intermediate subalgebra $\mathcal{B}$ に対し容易に分かるように定理 2 の $K(\mathcal{B})$ は $[G]$ の full subgroup である。

<u>補題 5</u>　$\mathcal{B}$ を $G\otimes\mathcal{A}$ の intermediate subalgebra とすると $U\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$ の $\mathcal{B}$ 上への expectation $\Phi_{\mathcal{B}}(U)$ は partial isometry でその initial 及び final projections は共に Z に属する。

証明。長田 [2] の証明を借用する。$S = |\Phi_{\mathcal{B}}(U)|$ とすると $\Phi_{\mathcal{B}}(U)A = \varphi_U(A)\Phi_{\mathcal{B}}(U)$ を用いて $S^2A = AS^2$ 即ち

$S^2 \in (1 \otimes \mathcal{A})'$ が分かる．補題4によって $S^2 \in Z$ だから $S \in Z$．そこで $\Phi_{\mathcal{B}}(U) = VS$ を polar decomposition とすると S が projection であることが分かり V^*V が S の support だから $S = V^*V$ よって $\Phi_{\mathcal{B}}(U)$ は partial isometry である．他の部分は簡単．

<u>補題6</u>　$\mathcal{B}$ は $G \otimes \mathcal{A}$ の intermediate subalgebra とし $V \in \mathcal{B}$ は partial isometry で $VV^*, V^*V \in Z$, $V\mathcal{A}V^* \subset \mathcal{A}$, $V^*\mathcal{A}V \subset \mathcal{A}$ とする．しかるとき V は unitary $W \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ に拡大できる．

証明．Zorn の補題により，V が同じ条件を満たす proper extension を持たなければ V が unitary であることを示せば十分である．今 $V^*V = E \neq I$ とすると $VV^* = F \neq I$ で或る partial isometry $T \in \mathcal{B}$ によって $T^*T = I - E$, $TT^* = I - F$ となる．$G \otimes \mathcal{A}$ は $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ で生成されるから $\| T - \sum_1^n \lambda_i U_i \|_2 < \varepsilon$ なる $U_i \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ と scalar λ_i $(i = 1, \cdots, n)$ が存在する．$\Phi_{\mathcal{B}}$ が norm depressing だから $\| T - \sum \lambda_i \Phi_{\mathcal{B}}(U_i) \| < \varepsilon$ となるが，補題5を用い，$\varepsilon < \| T \|_2$ とすることにより，この式から或る i に対して　$V' \equiv (I - F) V_i (I - E) \neq 0$ なることが分かる．V' は partial isometry で $V'^*V' \leqq I - E$, $V'V'^* \leqq I - F$ かつ $V'\mathcal{A}V'^* \subset \mathcal{A}$, $V'^*\mathcal{A}V' \subset \mathcal{A}$．従って $V + V'$ が V と同じ条件を満たす partial isometry になって矛盾．

<u>補題 7</u>　α を $\mathcal{A}$ 上の automorphism, G は $\mathcal{A}$ 上の automorphisms の任意の群とする。このとき unique maximal central projection $E([G],\alpha)$ と $\beta\in[G]$ で

$$E([G],\alpha)\alpha(A) = E([G],\alpha)\beta(A) \qquad (A\in\mathcal{A})$$

なるものが存在する。そして

$$E([G],\alpha) = \sup_{\gamma\in[G]}\alpha(F(\alpha,\gamma)) = \alpha(F(\alpha,\beta)).$$

証明.　$P_n\alpha(A) = P_n\beta_n(A)$　$(A\in\mathcal{A})$ なるような，互いに直交する central projections $P_n\ (\neq 0)$ と $\beta_n\in[G]$ の maximal family を $(P_n,\beta_n)_{n=1,2,\cdots}$ とすると $\beta_n^{-1}(P_n)$ も互いに直交する。定理 1 によって各 $\beta_n\in[G]$ を $G\otimes\mathcal{A}$ の inner automorphism に拡大し，それが unitary $U_n\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$ によって induce されるとする。$V_n = U_n\beta_n^{-1}(P_n)$ とし，$V=\sum V_n$ とおけば V は補題 6 の条件を満たし従って unitary $W\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$ に拡大できる。W によって induce される automorphism β は定理 1 によって $[G]$ に属し $P=\sum P_n$ とおけば $P\beta(A) = P\alpha(A)$ となる。この projection $P = E([G],\alpha)$ が求める性質をもつ。

<u>補題 8</u>　$\mathcal{B}$ を $G\otimes\mathcal{A}$ の intermediate subalgebra とすると，各 $U\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$ に対して

$$\Phi_{\mathcal{B}}(U) = E(K(\mathcal{B}),\varphi_U)W$$

なる $W\in\mathcal{N}(\mathcal{A})\cap\mathcal{B}$ が存在する。

証明. 既に注意したように $K(\mathcal{B})$ は full である。補題5により $V = \Phi_{\mathcal{B}}(U)$ は partial isometry で, それは補題6の条件を満たすから unitary $W \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ に拡大される。$F = VV^*$ とすると $F \leqq E(K(\mathcal{B}), \varphi_U)$ は容易に分かる。逆の不等号の成立が示されれば証明は終る. $E_1 = E(K(\mathcal{B}), \varphi_U)$ とすると補題7により或る $\varphi_W \in K$ に対して $E_1 \varphi_W(A) = E_1 \varphi_U(A)$ $(A \in \mathcal{A})$. しかるとき $E_1 U W^*$ は partial isometry で補題6の条件を満たし, よって $W' \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ に拡大できる. $E_1 U W^* = E_1 W'$ かつ $W'W \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. よって $E_1 U = E_1 W' W \in \mathcal{B}$. これから $(I - F) E_1 U = 0$ となり U が unitary だから $(I - F) E_1 = 0$ 即ち $E_1 \leqq F$ となる.

<u>系 1.</u> $G \otimes \mathcal{A}$ の intermediate subalgebra $\mathcal{B}$ は, すべて $\mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ で生成される.

<u>系 2</u> φ_U : freely acting on $\mathcal{A} \rightleftarrows \Phi_{\mathcal{A}}(U) = 0$

定理の証明. $\mathcal{B}(K(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$ は上の系1から明らか. 次に $K(\mathcal{B}(K)) \supset K$ は明らかだから逆の包含を示そう。それには $V \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}(K)$ として $\varphi_V \in K$ を示せばよいが K は full だから $F = \sup_{k \in K} F(\varphi_V, k) = I$ を示せば十分である. 補題7により $F(\varphi_V, \varphi_U) = F$ なる $\varphi_U \in K$ が存在し, φ_{U^*V} は locally inner on F. また補題2の系により,

各 $\varphi_W \in K$ に対し φ_{W^*V} は freely acting on $(I-F)\mathcal{A}$.
よって上の系2により $\Phi_{\mathcal{A}}(W^*V)(I-F)=0$.
$\mathcal{B}(K)$ の定義により $\varphi_{U_i} \in K$ なる unitaries U_i と scalar λ_i $(i=1,\cdots,n)$ を選んで $\|V-\sum_1^n \lambda_i U_i\|_2 < \varepsilon$ とすることができる。これから

$$\|I-F-\sum \lambda_i \Phi_{\mathcal{A}}(V^*U_i)(I-F)\|_2 < \varepsilon$$

ところが $\Phi_{\mathcal{A}}(V^*U_i)(I-F)=0$ だから $\|I-F\|_2<\varepsilon$.
即ち $F=I$ が得られた。これで2つの lattices の間の1対1の対応が示されたが，その対応は明らかに順序を保存するから lattice isomorphism である。

§4. Galois対応

前 section に述べた Dye の対応を commutant に移して考えることによって Galois 対応が得られる。

ここでは $\mathcal{A}$ が Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上に act し，G は freely acting on $\mathcal{A}$，各 $g \in G$ は $\mathfrak{H}$ 上の unitary U_g によって $g(A)=U_g A U_g^*$ $(A \in \mathcal{A})$ と表現されているものとする。

<u>補題9</u>　$\mathfrak{H}$ 上の unitary operator U が freely acting automorphism on $\mathcal{A}$ を induce するならば，$\mathcal{A}'$ 上にも freely acting automorphism を induce する。

この補題により G は freely acting on $\mathcal{A}'$ なる群とみなし

てよい。よって，いま $\alpha\in[G]$ が補題3によって

$$\alpha(A) = \sum_g P_g\, g(VAV^*) = \sum_g P_g U_g V A V^* U_g^*$$

と表わせるならば，α は $\mathcal{A}'$ 上に

$$\alpha(A') = \sum_g P_g U_g V A' V^* U_g^* = \sum_g P_g\, g(A')$$

なる automorphism を induce することになる。この形をもつ $\mathcal{A}'$ の automorphisms 全体を $[G]_Z$ で表わすと，これも group であり，これを centrally full group または Z-full group とよぶことにする。

さて，以下においては $\mathcal{A}$ は $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann algebra で $\mathcal{A}'$ は finite であるとする。$G\otimes\mathfrak{H}$ 上で cross product $G\otimes\mathcal{A}'$ を作ると簡単に分かるように

<u>補題10</u>. $\mathcal{B}'$ を $G\otimes\mathcal{A}'$ の intermediate subalgebra, $\mathcal{B}$ をその commutant on $G\otimes\mathfrak{H}$ とすると，$\mathcal{B}$ は Z-full subgroup $K_Z(\mathcal{B})$ による fixed subalgebra of $(1\otimes\mathcal{A}')'$ である。即ち，

$$\mathcal{B} = [A\in \overset{(1\otimes\mathcal{A}')'}{\cancel{\mathcal{A}}} \mid k(A)=A \quad \text{for } k\in K(\mathcal{B}')]$$

以上に考察した事から次の事が分かる。まず，定理2によりDyeの対応は $G\otimes\mathcal{A}'$ の intermediate subalgebras と $[G]$ の full subgroups との lattice isomorphism を与える。また commutant を対応させることによって $G\otimes\mathcal{A}'$ の intermediate subalgebras $\mathcal{B}'$ と $(G\otimes\mathcal{A}')'\subset\mathcal{B}\subset(1\otimes\mathcal{A}')'$

なる von Neumann subalgebras $\mathcal{B}$ との間には自然な dual isomorphism がある．更に，上述の対応 $K(\mathcal{B}') \leftrightarrow K_Z(\mathcal{B})$ によって $(1\otimes\mathcal{A}')$ に対する $[G]$ の full subgroups の lattice と $(1\otimes\mathcal{A}')'$ に対する $[G]_Z$ の Z-full subgroups の lattice とは isomorphic である．従って，補題10 と合わせて次の定理が得られる．

<u>定理3</u>　$\mathcal{A}$ は $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann algebra で $\mathcal{A}'$ が finite であるとする．G は freely acting on $\mathcal{A}$ なる countable group of automorphisms とし，各 $g\in G$ は $\mathfrak{H}$ 上の unitary で induce されるとする．しかるとき $(1\otimes\mathcal{A}')'$ における $[G]_Z$ の Z-full subgroups K の lattice と $(G\otimes\mathcal{A}')' \subset \mathcal{B} \subset (1\otimes\mathcal{A}')'$ なる $\mathcal{B}$ の lattice とは dually isomorphic である．その対応は，K によって invariant な $(1\otimes\mathcal{A}')'$ の元からなる $\mathcal{B}$ を K に対応させることによって得られる．

この定理の対応を Galois 対応の原型とみて，我々は Galois 拡大を次のように定義する．

<u>定義4.</u>　G は freely acting on $\mathcal{A}$ とし，$\mathcal{B}$ を G による fixed subalgebra of $\mathcal{A}$ とする．このとき $\mathcal{A}$ が G を Galois 群とする $\mathcal{B}$ の Galois 拡大であるとは $\mathcal{A}$ が次のように或る Hilbert space $\mathfrak{K}$ 上に表現されることである．

(i) G の各元は unitary U_g on $\mathfrak{H}$ によって induce される.

(ii) $\mathcal{A}'$ は finite.

(iii) $\mathcal{B}' \cong G \otimes \mathcal{A}'$ algebraically. ただし，この対応で $\mathcal{A}' \leftrightarrow 1 \otimes \mathcal{A}'$, $U_g \leftrightarrow g \otimes I$ とする.

このとき，次の Fundamental theorem of Galois theory が成り立つ.

<u>定理 4</u>. $\mathcal{A}$ が G を Galois 群として $\mathcal{B}$ の Galois 拡大になっているならば，$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 間の von Neumann algebras $\mathbf{C}$ の lattice と $[G]_Z$ の Z-full subgroups K_Z の lattice とは K_Z-invariant な元からなる $\mathbf{C}$ を K_Z に対応させる Galois 対応によって dually isomorphic である.

<u>Galois 拡大の例</u>. Γ を standardly acting on $\mathfrak{K}$ なる finite von Neumann algebra とし G は freely acting on Γ なる countable group of automorphisms とする.
$\mathfrak{H} = G \otimes \mathfrak{K}$ 上で cross product $G \otimes \Gamma'$ を作ると，これは finite である。そして $g \in G$ は unitary $g \otimes I$ で induce される. よって今 $\mathcal{A} = (1 \otimes \Gamma')'$, $\mathcal{A}' = 1 \otimes \Gamma'$ とすると $\mathcal{A}'$ は finite であり G は freely acting on $\mathcal{A}$ としてよい.
$\mathcal{B}$ を G による fixed subalgebra of $\mathcal{A}$ とすると，$\mathcal{B}' \cong G \otimes \mathcal{A}'$ となるから $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ の Galois 拡大である。もし G が無限群ならば，$\mathcal{A}$ は properly infinite な Galois 拡大の例とな

る．またGが有限群ならば$\mathcal{A}$はfiniteになるが，一般にfinite von Neumann algebraに対しては次の定理が成立する．

<u>定理5</u>　$\mathcal{A}$がfiniteならば

$$G:\text{Galois群} \rightleftarrows G:\text{有限群}$$

M. HenleはGalois拡大を　$g(P_h) = P_{hg^{-1}}$　$(g, h \in G)$なる互いに直交し和がIであるようなprojections　$P_g \in \mathcal{A}$が存在すること，として定義し，我々の定義4の条件(iii)をそれから導いている。その意味では定義4の方がより一般である．ただ定義4の(ii)で$\mathcal{A}'$のfiniteなることを仮定しているがHenleはその仮定をしていない。しかしながら，もしGalois対応を彼のようにGのsubgroupにのみ限るのであれば我々の場合も$\mathcal{A}'$のfiniteな事は仮定しなくてもよい。即ち，そのときGのsubgroup KはG$\otimes \mathcal{A}'$のsubalgebra $K \otimes \mathcal{A}'$と対応させると$K \otimes \mathcal{A}' = \mathcal{R}[U \mid \varphi_U \in [K]]$であることは簡単に分かる。そしてK全体のlatticeはmapping $K \to [K]_Z$によって$[G]_Z$のZ-full subgroupsのlatticeにimbedされ，Kに対するfixed subalgebra of $\mathcal{A}$と$[K]_Z$のそれとは一致するから，$\mathcal{A}'$のfiniteなことを仮定せずにGalois対応が得られるわけである．

REFERENCES

[1] H. Choda: On automorphisms of abelian von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 41 (1965) 280-283.

[2] M. Choda: On the conditional expectation of a partial isometry in a certain von Neumann algebra, Proc. Japan Acad., 41 (1965) 277-279.

[3] H.A. Dye: On groups of measure preserving transformations I, Amer. J. Math., 81 (1957) 119-157.

[4] " : " II, Amer. J. Math., 85 (1963) 551-576.

[5] Y. Haga and Z. Takeda: Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Preprint (1971).

[6] M. Henle: Galois theory of W*-algebras, to appear.

[7] R.R. Kallman: A generalization of free action, Duke Math. J., 36 (1969) 781-789.

[8] M. Nakamura and Z. Takeda: A Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 36 (1960) 258-260.

[9] " " : On the fundamental theorem of the Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 36 (1960) 313-318.

[10] Z. Takeda: On the extension theorem of the Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 37 (1961) 78-82.

[11] " : On the normal basis theorem of the Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 37 (1961) 144-148.